



UNICA
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI CAGLIARI

Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2022/23

Structural Stability and Limit Analysis of Structures

(Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

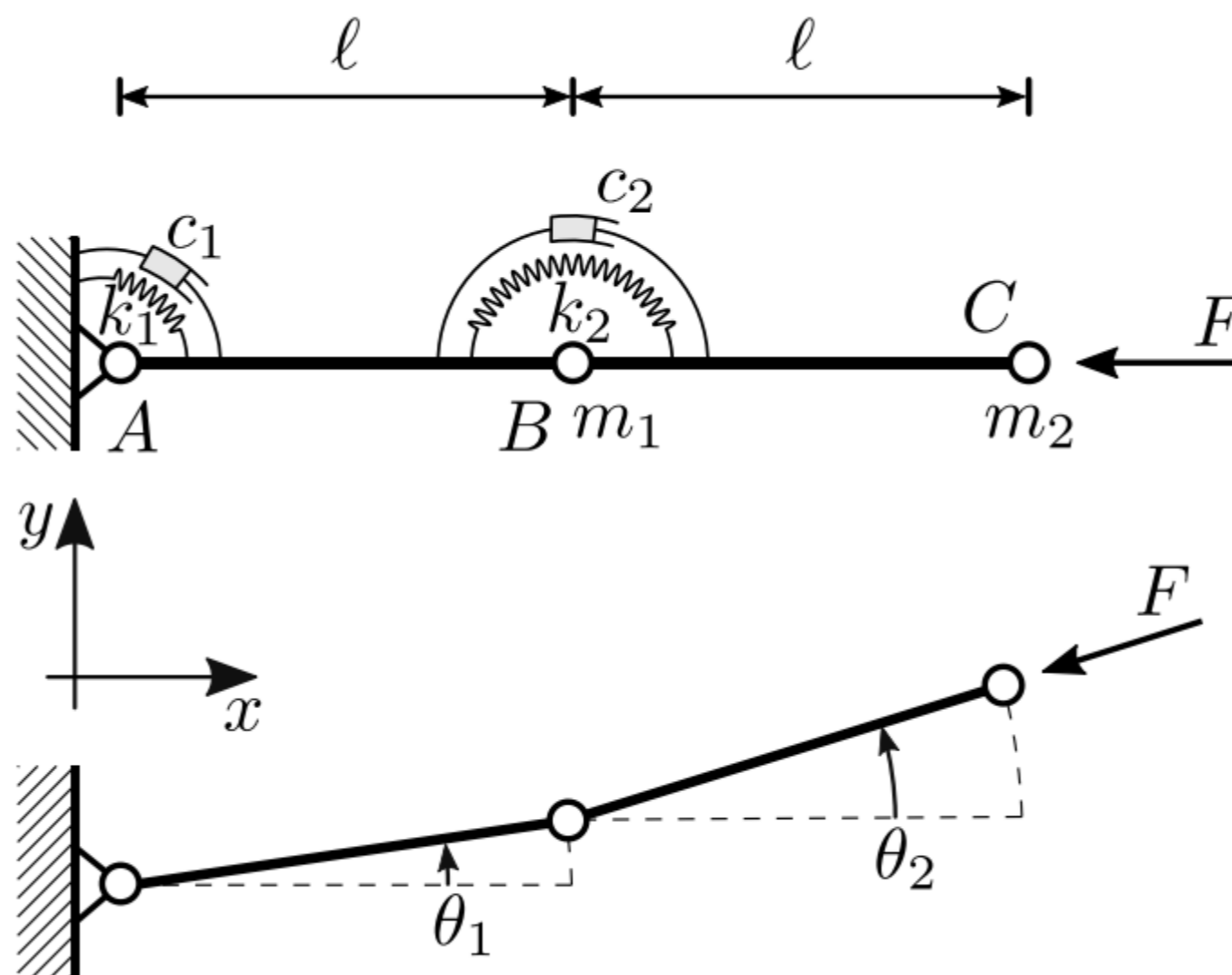
> **Lezione 10**

Instability of Ziegler's column

Victor Eremeev

victor.eremeev@unica.it

La colonna di Ziegler



La colonna di Ziegler

Si considera un sistema paradigmatico, a due gradi di libertà, noto come *colonna di Ziegler* **Figura** . Il sistema (bipendolo) è costituito da due aste rigide, AB e BC , prive di massa, ciascuna di lunghezza ℓ , collegate mutuamente ed al suolo da cerniere. Sul pendolo sono presenti due masse concentrate: una, di intensità m_1 , sulla cerniera interna B , l'altra, di intensità m_2 , sull'estremo libero C . Le due aste sono collegate, tra loro e al suolo, da organi visco-elastici lineari, di rigidezza k_1 e k_2 e viscosità c_1 e c_2 , rispettivamente applicati in A e B . Il doppio pendolo è caricato all'estremo libero da una forza follower di intensità F , che mantiene la sua direzione parallela all'asta BC .



Cinematica

La configurazione del sistema è descritta dalle rotazioni delle due aste, $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$, prese come parametri lagrangiani. Da considerazioni geometriche, si traggono le seguenti *relazioni esatte*, che esprimono le componenti di spostamento longitudinale u e trasversale v dei punti B, C :

$$\begin{aligned}u_B &= -\ell (1 - \cos \theta_1), \\v_B &= \ell \sin \theta_1, \\u_C &= -\ell (2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2), \\v_C &= \ell (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)\end{aligned}$$

Ritenendo i termini al più quadratici nei parametri lagrangiani, si ha:

$$\begin{aligned}u_B &= -\frac{\ell \theta_1^2}{2}, \\v_B &= \ell \theta_1, \\u_C &= -\ell \left(\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} \right), \\v_C &= \ell (\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

Legame costitutivo

In termini di spostamento

$$M_1 = k_1 \theta_1$$

$$M_2 = k_2 (\theta_2 - \theta_1)$$

Forma adimensionale delle equazioni del moto

Seguendo Ziegler, si fa riferimento ad una particolare famiglia di sistemi, nella quale $m_1 = 2m$, $m_2 = m$ e $k_1 = k_2 = k$. Inoltre, per rendere più agevole la discussione, si pongono le equazioni del moto in forma adimensionale. Si introduce a tal scopo una nuova variabile tempo \tilde{t} , un carico adimensionale μ , in accordo alle seguenti definizioni:

$$\tilde{t} := t \sqrt{\frac{k}{m\ell^2}}, \quad \mu := \frac{F\ell}{k}$$

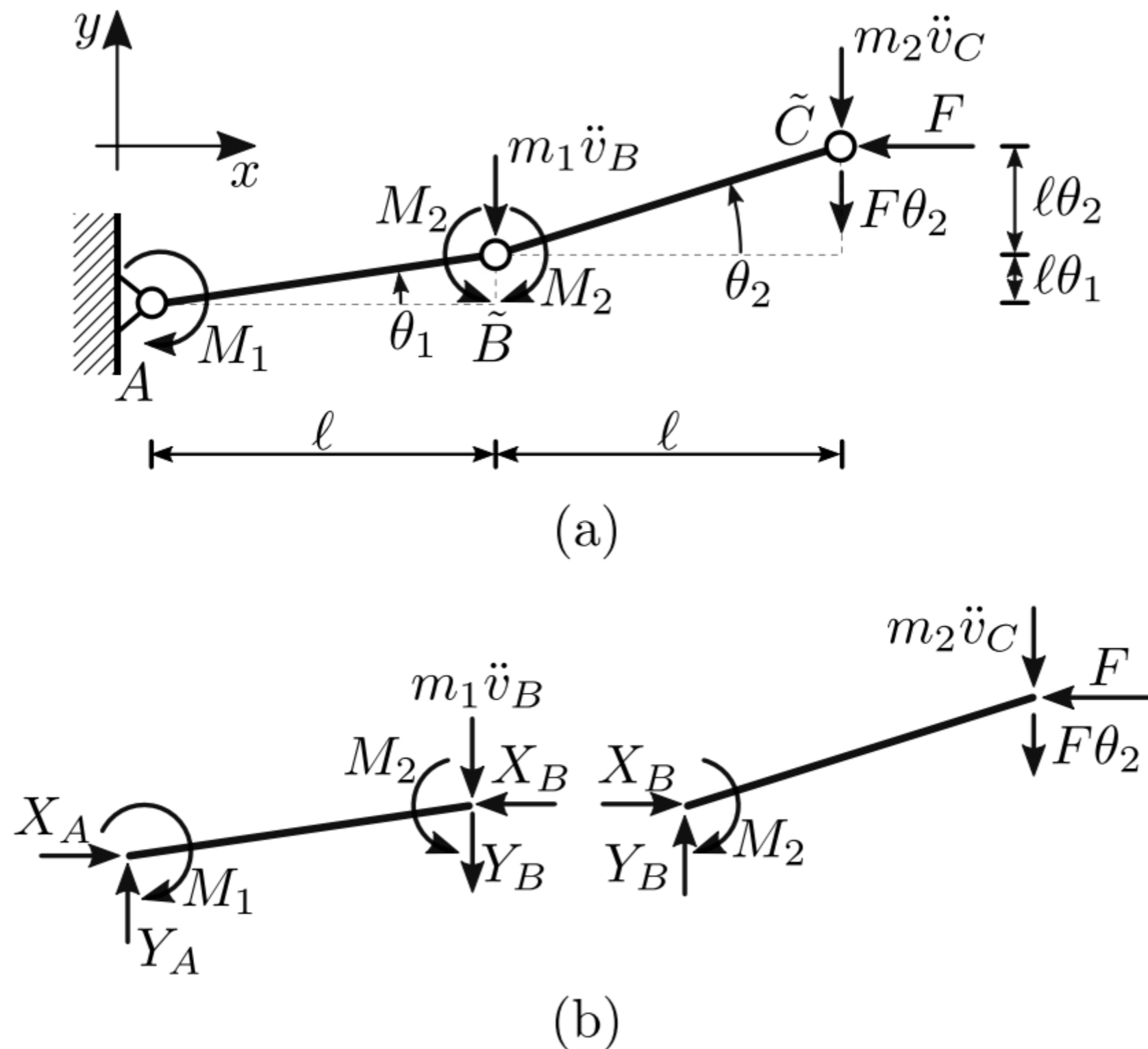


Figura Bilancio delle forze agenti sulla colonna di Ziegler: (a) forze d'inerzia, forze esterne ed interne attive; (b) esploso del sistema, che include le forze interne reattive.

Da questa seguono le equazioni di bilancio:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ell^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell^2 \ddot{\theta}_2 + M_1 - M_2 + F \ell (\theta_2 - \theta_1) &= 0 \\ m_2 \ell^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell^2 \ddot{\theta}_2 + M_2 &= 0 \end{aligned}$$

si ottengono le equazioni del moto:

$$\ell^2 \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} + F \ell \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esse sono del tipo:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g) \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

con $\mathbf{q} := (\theta_1, \theta_2)^T$, dove appaiono, nell'ordine, la matrice di massa, di rigidezza elastica e di rigidezza geometrica.

Si noti che, a differenza delle altre matrici, \mathbf{K}_g è non simmetrica, a testimonianza della non conservatività della forza F .

Legame costitutivo

In termini di spostamento

$$M_1 = k_1 \theta_1$$

$$M_2 = k_2 (\theta_2 - \theta_1)$$

Forma adimensionale delle equazioni del moto

Seguendo Ziegler, si fa riferimento ad una particolare famiglia di sistemi, nella quale $m_1 = 2m$, $m_2 = m$ e $k_1 = k_2 = k$. Inoltre, per rendere più agevole la discussione, si pongono le equazioni del moto in forma adimensionale. Si introduce a tal scopo una nuova variabile tempo \tilde{t} , un carico adimensionale μ , in accordo alle seguenti definizioni:

$$\tilde{t} := t \sqrt{\frac{k}{m\ell^2}}, \quad \mu := \frac{F\ell}{k}$$

Posta la soluzione del tipo $\mathbf{q}(t) = \mathbf{u} \exp(\lambda t)$, segue il problema agli autovalori:

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + (\mathbf{K}_e + \mu\mathbf{K}_g)] \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

ovvero, in forma esplicita:

$$\begin{bmatrix} 3\lambda^2 + 2 - \mu & \lambda^2 - 1 + \mu \\ \lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le cui radici λ decidono della stabilità della posizione di equilibrio banale. L'equazione caratteristica si scrive:

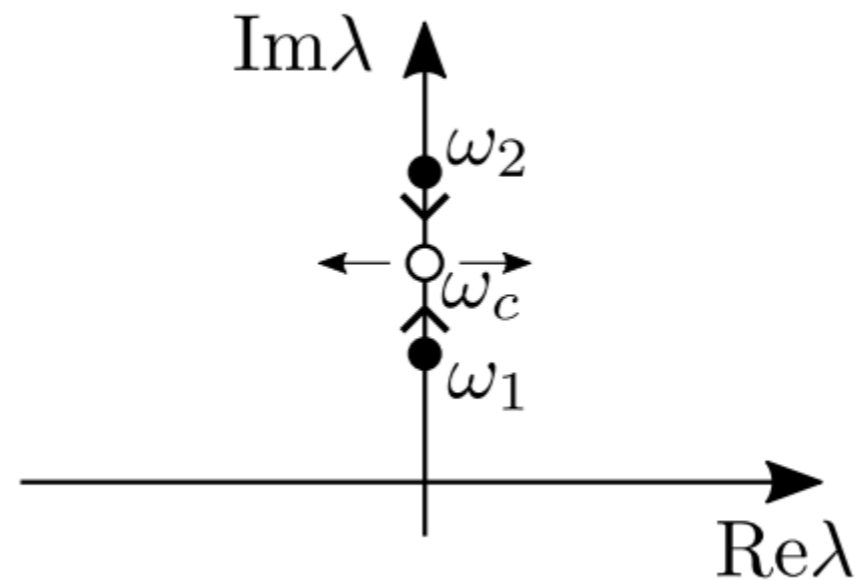
$$2\lambda^4 + (7 - 2\mu)\lambda^2 + 1 = 0$$

Essendo questa biquadratica, può essere risolta in forma chiusa, per fornire:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{4} \left(-(7 - 2\mu) \pm \sqrt{(7 - 2\mu)^2 - 8} \right)$$

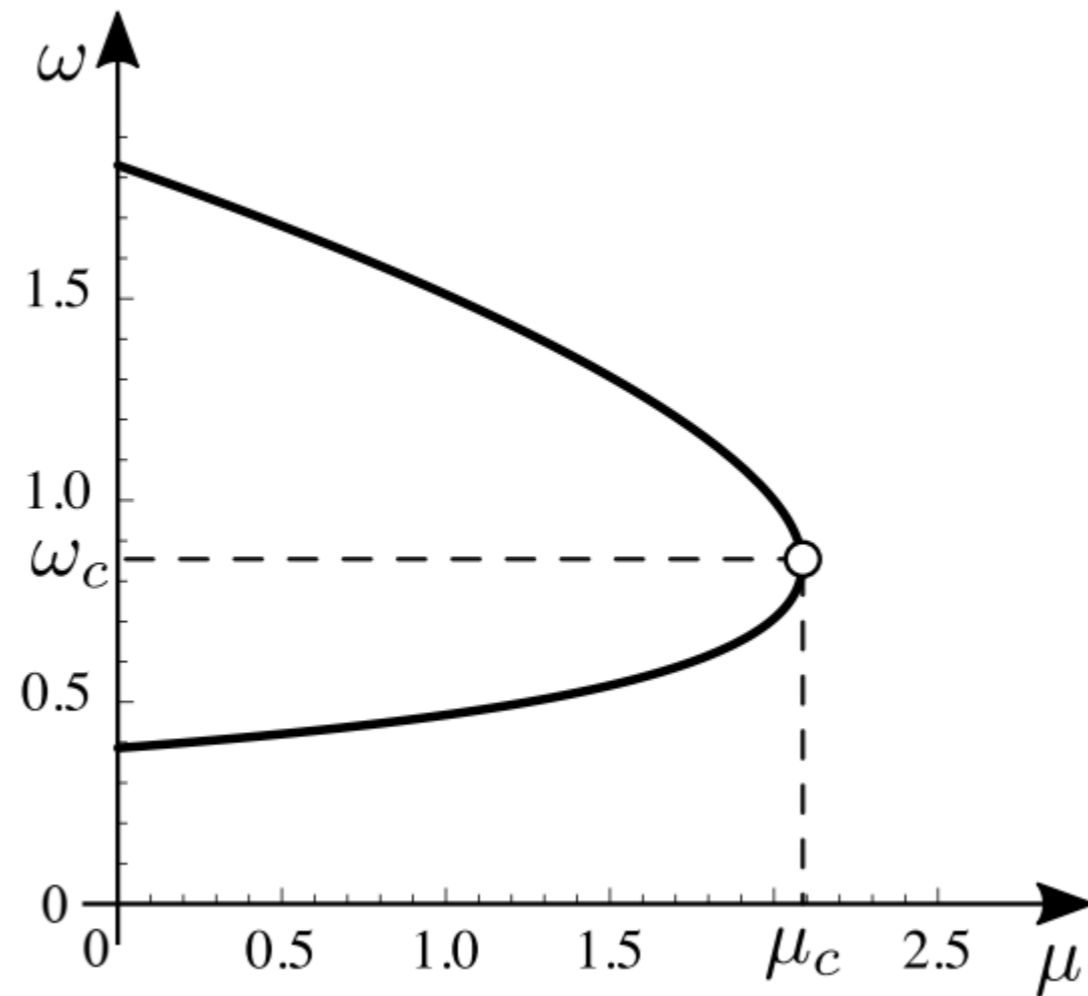
$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{4} \left(-(7 - 2\mu) \pm \sqrt{(7 - 2\mu)^2 - 8} \right)$$

Quando $\mu = 0$, il discriminante $\Delta := (7 - 2\mu)^2 - 8 > 0$, e dunque $\lambda_{1,2}^2 < 0$; posto $\lambda_{1,2}^2 =: -\omega_{1,2}^2$, i quattro autovalori sono puramente immaginari, $\lambda_{1,2,3,4} = (\pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$





Al crescere di μ , il discriminante Δ diminuisce, insieme alla differenza $|\omega_1 - \omega_2|$. Quando $\Delta = 0$, le due coppie di autovalori collassano in una, $\omega_1 = \omega_2 =: \omega_c$. Per un ulteriore aumento di μ , è $\Delta < 0$, cosicché i quattro autovalori sono complessi coniugati ed opposti in segno, del tipo $\pm\delta \pm i\omega$.



La condizione di biforcazione è dunque $\Delta = 0$, che si verifica quando la forza follower assume il valore critico:

$$\mu_c := \frac{7}{2} - \sqrt{2} \simeq 2.09$$

Corrispondentemente, la parte immaginaria degli autovalori coincidenti è $\omega_c = 2^{-1/4} \simeq 0.84$. Questa biforcazione è detta di *Hopf circolatoria o reversibile*. Il meccanismo è spesso rappresentato come in F **Figura** , che riporta le parti immaginarie degli autovalori in funzione di μ . Quando $\mu > \mu_c$ gli autovalori non sono più puramente immaginari, e dunque non più rappresentati in figura.

