Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Limiti di funzioni

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2022/23

LU 07 NOV 2022

LA CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

SI PUÒ DEFINIRE IN VARI MODI EQUIVALENTI:

① CONTINUITÀ PER SUCCESSIONI:

UNA FUNZIONE $f: S \to \mathbb{R}$, CON $S \subset \mathbb{R}$, SI DICE CONTINUA PER SUCCESSIONI IN UN PUNTO $x_0 \in S$ SE COMUNQUE SI PRENDA UNA SUCCESSIONE $S \ni a_n \longrightarrow x_0$ RISULTA $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

ABBIAMO GIÀ VERIFICATO IL 13/10 CHE LA FUNZIONE $f(x) = \log x$ È CONTINUA IN OGNI PUNTO $x_0 \in S = (0,+\infty)$.

CON IL RAGIONAMENTO DI MARTEDÌ 11/10 SI VEDE CHE SE $a_n \to a = x_0 \in \mathbb{R}$ ALLORA $\lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = b^a$ DUNQUE LA FUNZIONE $f(x) = b^x$ È CONTINUA IN OGNI $x_0 \in S = \mathbb{R}$.

LA FUNZIONE POTENZA $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, È CONTINUA IN OGNI $x_0 \in S = (0,+\infty)$:
PRENDO ARBITRARIAMENTE $0 < a_n \longrightarrow x_0$
E CONSIDERO $f(a_n) = a_n^\alpha = e^{\log(a_n^\alpha)} =$

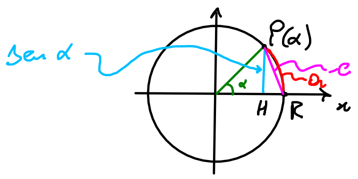
$= e^{\alpha \log a_n} = e^{\alpha b_n} \longrightarrow e^{\log x^\alpha} = x^\alpha$

ESSENDO $b_n = \log a_n \longrightarrow \log x_0$ E QUINDI $\alpha b_n \longrightarrow \alpha \log x_0 = \log x_0^\alpha$.

LE FUNZIONI IPERBOLICHE SONO CONTINUE: AD ESEMPIO, PER VERIFICARE CHE $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$ È CONTINUA IN OGNI PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$, PRENDO ARBITRARIAMENTE $a_n \longrightarrow x_0$ E CONSIDERO $f(a_n) = \dfrac{e^{2a_n} - 1}{2e^{a_n}} \longrightarrow \dfrac{e^{2x_0} - 1}{2e^{x_0}} = f(x_0)$.

ANCHE LE FUNZIONI CIRCOLARI SONO CONTINUE. INCOMINCIAMO A VERIFICARE LA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE $f(x) = \operatorname{sen} x$ NEL PUNTO $x_0 = 0$.

OSSERVIAMO CHE $|\operatorname{sen} x| \le |x|$ PER OGNI x REALE. CIÒ È OVVIO SE $x = 0$ PERCHÉ $\operatorname{sen} 0 = 0$, E ANCHE SE $|\operatorname{sen} x| \le 1 \le |x|$. ESSENDO $\operatorname{sen} x$ FUNZIONE DISPARI, BASTA VERIFICARE CHE $\operatorname{sen} \alpha < \alpha$ PER $\alpha \in (0,1)$ E CIÒ È VERO PERCHÉ CATETO $PH < c$ IPOTENUSA, E CORDA $c < a$ ARCO E $a = \alpha$ (RADIANTI)



PRESA ADESSO UNA SUCCESSIONE $a_n \longrightarrow 0$, POSSIAMO SCRIVERE $|\operatorname{sen} a_n| \le |a_n| \longrightarrow 0$ E QUINDI $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} a_n = 0$ PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO.

PER VERIFICARE LA CONTINUITÀ IN OGNI PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$ USEREMO LE FORMULE DI PROSTAFERESI.

LU 07 NOV 2022

VERIFICHIAMO LA CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI $\operatorname{sen} x$ E $\cos x$ IN OGNI PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$.

PRESA $a_n \to x_0$ DOBBIAMO VERIFICARE CHE $\operatorname{sen} a_n \to \operatorname{sen} x_0$, $\cos a_n \to \cos x_0$.

PER LE FORMULE DI PROSTAFERESI SI HA CHE

$$|\operatorname{sen} a_n - \operatorname{sen} x_0| = 2\left|\cos \frac{a_n + x_0}{2}\right| \cdot \left|\operatorname{sen} \frac{a_n - x_0}{2}\right|$$

$$\leq 2\,\frac{|a_n - x_0|}{2} = |a_n - x_0|$$

E LA TESI SEGUE. ANALOGAMENTE SI HA

$$|\cos a_n - \cos x_0| = \left|-2 \operatorname{sen} \frac{a_n + x_0}{2}\right| \left|\operatorname{sen} \frac{a_n - x_0}{2}\right| \leq$$

$$\leq 2\,\frac{|a_n - x_0|}{2} = |a_n - x_0| \longrightarrow 0.$$

ESERCIZIO: VERIFICARE LA CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI $f(x) = \operatorname{tg} x$ PER $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, E $g(x) = \tanh x$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE: PER UNA $f: S \to \mathbb{R}$ LA CONTINUITÀ IN $x_0 \notin S$ NON È DEFINITA! NON SI DOVREBBE DIRE CHE « $\operatorname{tg} x$ È DISCONTINUA NEL PUNTO $x_0 = \frac{\pi}{2}$ » O CHE « $\frac{1}{x}$ È DISCONTINUA NEL PUNTO $x_0 = 0$ ».

OSSERVAZIONE: PER VERIFICARE CHE $f: S \to \mathbb{R}$ È DISCONTINUA IN UN PUNTO $x_0 \in S$ BASTA TROVARE ANCHE UNA SOLA SUCCESSIONE

$S \ni a_n \longrightarrow x_0$ TALE CHE LA SUCCESSIONE $(f(a_n))$ NON AMMETTE LIMITE, OPPURE AMMETTE LIMITE $L \neq f(x_0)$.

ESEMPIO DI FUNZIONE DISCONTINUA:

$$\chi_{(0,+\infty)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

GRADINO DI HEAVISIDE

ESSA È CONTINUA IN OGNI PUNTO $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ED È DISCONTINUA IN $x_0 = 0$. INFATTI $f(x_0) = 0$ PERÒ PRENDO $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow x_0 = 0$ E VEDO CHE

$$f(a_n) = 1 \longrightarrow 1 \neq f(x_0) = 0.$$

MA 08 NOV 2022

LA FUNZIONE $f(x) = |x|$ È CONTINUA IN OGNI PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$ IN QUANTO

$$\big||x_1| - |x_2|\big| \leq |x_1 - x_2|$$

ANALOGA A

$$|\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta| \leq |\alpha - \beta|$$

$$|\cos\alpha - \cos\beta| \leq |\alpha - \beta|$$

LA SI VERIFICA FACILMENTE (ELEVANDO AMBO I MEMBRI AL QUADRATO).

IN GENERALE, SE ESISTE UNA $L \in [0, +\infty)$ TALE CHE $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ SI DICE CHE f SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ. QUESTE FUNZIONI SONO CONTINUE (ESERCIZIO).

TEOREMA: SIA $f: S \to \mathbb{R}$ CONTINUA NEL PUNTO $x_0 \in S$ E $g: X \to \mathbb{R}$ CONTINUA NEL PUNTO $f(x_0) = y_0 \in X$. ALLORA LA FUNZIONE COMPOSTA $g(f(x))$ È CONTINUA NEL PUNTO x_0:

CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE COMPOSTA.

DIMOSTRAZIONE: PRENDO $S \ni a_n \to x_0$ CON $f(a_n) \in X$ PER OGNI n. MI DOMANDO SE $\lim_{n \to +\infty} g(f(a_n)) = g(y_0)$.

SO PER IPOTESI CHE $b_n = f(a_n) \to f(x_0)$ E LA TESI SEGUE PER LA CONTINUITÀ DI g.

OSSERVAZIONE: DATA $f: S \to \mathbb{R}$ E PRESO ARBITRARIAMENTE $x_0 \in S \setminus DS$ (PUNTO ISOLATO), LA FUNZIONE f È CONTINUA IN x_0. INFATTI PRESI $S \ni a_n \to x_0$, ESSENDO x_0 ISOLATO, RISULTA $a_n = x_0$ DEFINITIVAMENTE E SI VEDE CHE $f(a_n) = f(x_0) \longrightarrow f(x_0)$.

② LA DEFINIZIONE ε-δ DI WEIERSTRASS

UNA $f: S \to \mathbb{R}$ SI DICE CONTINUA NEL PUNTO $x_0 \in S$ SE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE UN INTORNO $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ DI RAGGIO $\delta > 0$ TALE CHE $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ PER OGNI $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap S$.

③ DEFINIZIONE TOPOLOGICA

UN $x_0 \in S$ SI DICE INTERNO SE $x_0 \in (a, b) \subset S$. UN SOTTOINSIEME $A \subset \mathbb{R}$ SI DICE APERTO SE COSTITUITO ESCLUSIVAMENTE DA PUNTI INTERNI (L'INSIEME VUOTO È APERTO). UN INTORNO DI $x_0 \in \mathbb{R}$ È UN APERTO $A \ni x_0$.

UNA $f: S \to \mathbb{R}$ È CONTINUA IN $x_0 \in S$ SE PER OGNI INTORNO V DI $f(x_0)$ ESISTE UN INTORNO U DI x_0 TALE CHE $f(U) \subset V$.

NESSO: $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap S$;
$V = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

NESSO CON LA DEFINIZIONE 1: « TEOREMA PONTE ».

④ DEFINIZIONE MEDIANTE I LIMITI

PREMETTIAMO LA DEFINIZIONE DI LIMITE:

DATA $f: S \to \mathbb{R}$ E SCELTO $x_0 \in DS$

SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ OPPURE

$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ SE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$

RISULTA $|f(x) - l| < \varepsilon$ OGNIQUALVOLTA

$x \in S$ SODDISFA $0 < |x - x_0| < \delta$,

CON $\delta > 0$ OPPORTUNO (DIPENDENTE DA ε).

NOTA: RESTA ESCLUSO $x = x_0$. VALE $x_0 \notin S$.

CONTINUITÀ: UNA $f: S \to \mathbb{R}$ SI DICE CONTINUA IN $x_0 \in S$ SE:

1) $x_0 \in S \setminus DS$ (x_0 È UN PUNTO ISOLATO)

OPPURE 2) $x_0 \in S \cap DS$ E

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

OSSERVAZIONE: LE FUNZIONI ELEMENTARI, ESSENDO CONTINUE, SODDISFANO TALE UGUAGLIANZA IN TUTTI I PUNTI DEL DOMINIO.

ESEMPIO: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1.$

ESEMPIO: $\lim_{x \to 1} e^x = e$

LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO

Ⓐ LIMITE DESTRO PRESUPPOSTO: OGNI INTERVALLO (x_0, b) CONTIENE INFINITI PUNTI DEL DOMINIO S DELLA FUNZIONE f.

SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ OPPURE

$f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} l$ SE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$

RISULTA $|f(x) - l| < \varepsilon$ OGNIQUALVOLTA

$x \in S$ SODDISFA $0 < x - x_0 < \delta$,

CON $\delta > 0$ OPPORTUNO (DIPENDENTE DA ε).

Ⓑ LIMITE SINISTRO PRESUPPOSTO: OGNI INTERVALLO (a, x_0) CONTIENE INFINITI PUNTI DEL DOMINIO S DELLA FUNZIONE f.

SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ OPPURE

$f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} l$ SE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$

RISULTA $|f(x) - l| < \varepsilon$ OGNIQUALVOLTA

$x \in S$ SODDISFA $0 < x_0 - x < \delta$,

CON $\delta > 0$ OPPORTUNO (DIPENDENTE DA ε).

OSSERVAZIONE: SE OGNI (a, x_0) ED OGNI (x_0, b) CONTIENE INFINITI PUNTI DI S ALLORA x_0 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE. IN TAL CASO RISULTA

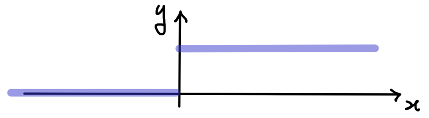
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ SE E SOLO SE

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

ESEMPIO:

$$\chi_{(0,+\infty)}(x) = \begin{cases} 1, & x\in(0,+\infty) \\ 0, & x\in(-\infty,0] \end{cases}$$

GRADINO DI HEAVISIDE



VERIFICHIAMO CHE $\lim\limits_{x\to 0^+} \chi_{(0,+\infty)}(x) = 1$:

PRESO $\varepsilon\in(0,+\infty)$ RISULTA

$$\left|\chi_{(0,+\infty)}(x) - 1\right| = 0 < \varepsilon \quad \text{PER OGNI } x\in(0,1)$$

CIOÈ $0 < x - x_0 < 1$

VERIFICHIAMO CHE $\lim\limits_{x\to 0^-} \chi_{(0,+\infty)}(x) = 0$:

PRESO $\varepsilon\in(0,+\infty)$ RISULTA

$$\left|\chi_{(0,+\infty)}(x) - 0\right| = 0 < \varepsilon \quad \text{PER OGNI } x\in(-1,0)$$

CIOÈ $0 < x_0 - x < 1$

IN VIRTÙ DELL'OSSERVAZIONE PRECEDENTE, SI DEDUCE CHE LA FUNZIONE $\chi_{(0,+\infty)}(x)$ NON AMMETTE LIMITE PER $x\to 0$. QUANDO

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ E $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}\setminus\{\ell_1\}$ SI DICE CHE f HA UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE.

LIMITI AL FINITO (PER $x\to x_0\in\mathbb{R}$)

SAPPIAMO DA MARTEDÌ 8/11 CHE DATA $f: S\to\mathbb{R}$ E SCELTO $x_0\in DS$ SI SCRIVE $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell\in\mathbb{R}$ OPPURE $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}\ell$ SE PER OGNI $\varepsilon\in(0,+\infty)$ RISULTA $|f(x)-\ell| < \varepsilon$ OGNIQUALVOLTA $x\in S$ SODDISFA $0<|x-x_0|<\delta$, CON $\delta>0$ OPPORTUNO (DIPENDENTE DA ε).

SI SCRIVE, INVECE, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ OPPURE $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}\pm\infty$ SE PER OGNI $M\in\mathbb{R}$ RISULTA $f(x) \gtrless M$ OGNIQUALVOLTA $x\in S$ SODDISFA $0<|x-x_0|<\delta$, CON $\delta>0$ OPPORTUNO (DIPENDENTE DA ε).

ANALOGAMENTE SI DEFINISCE IL LIMITE DESTRO, A CONDIZIONE CHE OGNI INTERVALLO (x_0,b) CONTENGA INFINITI PUNTI DI S: SI SCRIVE $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ SE PER OGNI M REALE ESISTE $\delta\in(0,+\infty)$ TALE CHE PER OGNI $x\in S\cap(x_0, x_0+\delta)$ SI HA $f(x)\gtrless M$.

PER IL LIMITE SINISTRO SI SOSTITUISCE (x_0,b) CON (a,x_0) E $(x_0, x_0+\delta)$ CON $(x_0-\delta, x_0)$.

OSSERVAZIONE: SE OGNI (a, x_0) ED OGNI (x_0, b) CONTIENE INFINITI PUNTI DI S ALLORA x_0 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE. IN TAL CASO RISULTA

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{SE E SOLO SE}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

ESEMPIO: $f(x) = \frac{1}{x}$, $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$. LA FUNZIONE $f(x)$ NON AMMETTE LIMITE PER $x \to 0$.

VERIFICHIAMO CHE $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

PRENDIAMO $M \in \mathbb{R}$ E CERCHIAMO $\delta \in (0, +\infty)$ TALE CHE $\frac{1}{x} > M$ PER OGNI $x \in (x_0, x_0+\delta) = (0, \delta)$. SE $M \in (0, +\infty)$, PRENDO $\delta = \frac{1}{M}$ E OTTENGO $\frac{1}{x} > M$ PER $x \in (0, \delta) = \left(0, \frac{1}{M}\right)$ CIOÈ $0 < x < \frac{1}{M}$. AVENDOLO VERIFICATO PER OGNI $M \in (0, +\infty)$ HO, IN PARTICOLARE, $f(x) > 1$ PER OGNI $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$. SE ADESSO PRENDO $M \in (-\infty, 0]$ HO CHE $f(x) > 1 > M$ IN $(x_0, x_0 + \delta_1)$.

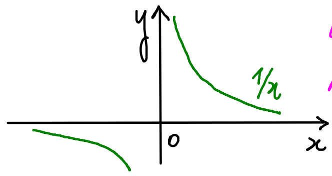
SIMILMENTE, SE PER OGNI $M < 0$ HO $\delta \in (0, +\infty)$ TALE CHE $f(x) < M$ PER $x \in S \cap (x_0, x_0 + \delta)$ METTO $M = -1$ ED HO $f(x) < -1$ PER $x \in S \cap (x_0, x_0 + \delta_1)$. SE ADESSO PRENDO $M \geq 0$ HO $f(x) < -1 < M$ IN $S \cap (x_0, x_0 + \delta_1)$.

GI 10 NOV 2022

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:

SE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ SI DICE CHE LA RETTA $x = x_0$ È UN ASINTOTO VERTICALE PER LA f.

IDEM SE $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$



L'ASSE y È UN ASINTOTO VERTICALE.

OSSERVAZIONE: SE $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \pm\infty$ E f È DISPARI, ALLORA $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \mp\infty$, SE INVECE f È PARI, ALLORA $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \pm\infty$.

VERIFICHIAMO CHE $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

LA CONCLUSIONE SEGUE DAL FATTO CHE $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ PER DISPARITÀ.

RITROVIAMO ORA IL RISULTATO APPLICANDO LA DEFINIZIONE: PRENDO $M \in (-\infty, 0)$ E CERCO $\delta \in (0, +\infty)$ TALE CHE RISULTI $\frac{1}{x} < M$ PER OGNI $x \in (-\delta, 0)$.

BASTA PRENDERE $\delta = -\frac{1}{M} > 0$. INFATTI, SE $\frac{1}{M} = -\delta < x < 0$ HO CHE $\frac{1}{x} < M$ PERCHÉ $x, M < 0$.

GI 10 NOV 2022

TEOREMI SUI LIMITI

PERMANENZA DEL SEGNO: SE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L > 0$, EVENTUALMENTE $L = +\infty$, ALLORA ESISTE $\delta \in (0, +\infty)$ TALE CHE $f(x) > 0$ PER OGNI $x \in S \cap (x_0, x_0+\delta)$.

DIMOSTRAZIONE. SE $L = +\infty$ PRENDO $M = 1$ ED ECCO CHE $f(x) > 1 > 0$ PER OGNI $x \in S \cap (x_0, x_0+\delta)$. SE, INVECE, $L \in (0, +\infty)$ PRENDO $\varepsilon \in (0, L)$ TIPO $\varepsilon = \frac{L}{2}$ ED HO CHE $0 < L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ PER OGNI $x \in S \cap (x_0, x_0+\delta)$.

STESSO DISCORSO SE $\lim_{x \to x_0^-} f(x) < 0$.

COROLLARIO: SE $f(x) > 0$ PER OGNI x, ED ESISTE $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = L$, FINITO O INFINITO, ALLORA $L \geq 0$

TEOREMA DEL CONFRONTO: DATE $f, g : S \to \mathbb{R}$, SE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$ E $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = L_2$ ANCHE INFINITI, E SE $f(x) \leq g(x)$ PER OGNI $x \in S \cap (x_0, x_0+\delta)$ CON UN $\delta > 0$ ALLORA $L_1 \leq L_2$.

DIMOSTRAZIONE: PERMANENZA DEL SEGNO PER LA FUNZIONE $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$.

VARIANTE: DATE $f, g, h : S \to \mathbb{R}$ CON $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ PER OGNI $x \in S \cap (x_0, x_0+\delta)$, SE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} h(x)$ ALLORA $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

DIMOSTRAZIONE: SE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ SEGUE DAL RAGIONAMENTO PRECEDENTE. SE, INVECE, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ PRENDO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ E TROVO:

δ_1 TALE CHE $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ PER $x \in (x_0, x_0+\delta_1)$

δ_2 TALE CHE $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$ PER $x \in (x_0, x_0+\delta_2)$

PONGO $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ED HO CHE

$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$ PER $x \in (x_0, x_0+\delta)$.

ALGEBRA DEI LIMITI

SE $f, g : S \to \mathbb{R}$ AMMETTONO LIMITE FINITO $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \in \mathbb{R}$ E $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = b \in \mathbb{R}$ ALLORA: $\lim_{x \to x_0^+} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$; $\lim_{x \to x_0^+} f(x) g(x) = ab$; SE $b \neq 0$ ALLORA $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$; SE POI $b \in (0, +\infty)$ ALLORA $g(x) > 0$ IN $(x_0, x_0+\delta)$ E $\lim_{x \to x_0^+} (g(x))^{f(x)} = b^a$.

GI 10 NOV 2022

Per la dimostrazione, si può adattare alle funzioni f, g il ragionamento fatto per le successioni a_n, b_n (al posto di n_0 mettere δ eccetera). Oppure si può usare il Teorema Ponte: Risulta $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, finito o infinito, se e solo se comunque si prenda una successione di $a_n \in S \cap (x_0, +\infty)$ convergente a x_0, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = L.$$

Quest'ultima viene detta « definizione successionale di limite ».

VE 11 NOV 2022

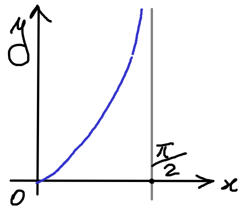
Nello stesso modo si può dimostrare il Teorema dell'unicità del limite: data $f: S \to \mathbb{R}$ e preso $x_0 \in DS$, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ allora per ogni $h \neq \ell$ $f(x) \not\to h$.

Dimostrazione: prendo $a_n \in S \setminus \{x_0\}$ convergente ad x_0. Per ipotesi, e per il teorema ponte, $f(a_n) \to \ell$. Per l'unicità del limite delle successioni (30/09) $f(a_n) \not\to h$ e quindi, per il teorema ponte, $f(x) \not\to h$.

VE 11 NOV 2022

Un altro esempio di limite infinito:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

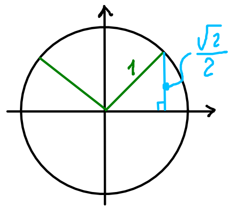


Per la verifica, usiamo l'identità $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e ricordiamo che, per continuità,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Per la permanenza del segno si ha $\operatorname{sen} x > 0$ in $\left(\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}+\delta\right)$.

Dalla definizione di $\operatorname{sen} x$ segue che $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ per $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right)$. Quindi



$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} > \frac{1}{\sqrt{2}\cos x} \quad \text{per } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

perché $\cos x$ è lì positivo. Per il teorema del confronto è sufficiente verificare che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}\cos x} = +\infty.$$

Preso $M > 0$ vediamo se esiste $\delta \in (0, +\infty)$ tale che

$$\frac{1}{\sqrt{2}\cos x} > M \quad \text{per ogni } x \in \left(\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}\right).$$

Tale disuguaglianza equivale a

$$\cos x < \frac{1}{\sqrt{2}M}$$

e quindi la risposta è affermativa perché prendo $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{2}M}$ nella definizione di $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$.

CON LO STESSO RAGIONAMENTO SI DIMOSTRA CHE SE $f, g : S \to \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) > 0$, $\lim_{x \to x_0^-} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ PER OGNI $x \in (a, x_0)$ CON UN $a \in (-\infty, x_0)$, ALLORA

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

(IL FAMIGERATO $\frac{1}{0^+} = +\infty$).

SIMILMENTE SI ESTENDE L'ALGEBRA DEI LIMITI AD ALCUNI CASI IN CUI ESSI VALGONO ZERO O INFINITO. RESTANO LE FORME INDETERMINATE.

ESEMPIO DI UNA FUNZIONE CHE NON AMMETTE LIMITE AL FINITO: $H(x)$ LA FUNZIONE A GRADINO DI HEAVISIDE.

ESEMPIO DI UNA FUNZIONE CHE NON AMMETTE LIMITE DESTRO:

$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ NON AMMETTE LIMITE PER $x \longrightarrow x_0^{\pm} = 0^{\pm}$. INFATTI SE SOSTITUISCO

$$x = a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} = \frac{2}{(2n+1)\pi} \longrightarrow 0$$

VEDO CHE $f(a_n) = \operatorname{sen} \frac{1}{a_n} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$ NON AMMETTE LIMITE.

VE 11 NOV 2022

CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ

SIA $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ DISCONTINUA NEL PUNTO $x_0 \in (a,b)$. LA DISCONTINUITÀ SI DICE DI

PRIMA SPECIE SE ESISTONO FINITI I LIMITI DESTRO E SINISTRO MA SONO DIVERSI;

SECONDA SPECIE SE ALMENO UNO DEI DUE NON ESISTE O È INFINITO;

TERZA SPECIE SE ESISTONO ENTRAMBI, SONO FINITI, SONO UGUALI FRA LORO MA DIFFERISCONO DA $f(x_0)$. IN TAL CASO SI PUÒ DEFINIRE

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b) \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x), & x = x_0 \end{cases}$$

E $\tilde{f}(x)$ RISULTA CONTINUA PER $x = x_0$: SI DICE CHE SI ELIMINA LA DISCONTINUITÀ.

VE 11 NOV 2022

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI CIRCOLARI INVERSE

LA CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI arcsen x, arccos x, arctg x SEGUE DAL

TEOREMA: SIA $f: I \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE STRETTAMENTE MONOTONA, I UN INTERVALLO (APERTO O CHIUSO, LIMITATO O ILLIMITATO) ALLORA f È INVERTIBILE E LA SUA INVERSA

$$g: f(I) \to I \subset \mathbb{R} \text{ È CONTINUA.}$$

PER LA DIMOSTRAZIONE, PREMETTIAMO IL

LEMMA: SE $g: S \to \mathbb{R}$ È MONOTONA, $x_0 \in S$, E L'INTERVALLO (x_0, b) CONTIENE INFINITI PUNTI DI S PER OGNI $b > x_0$, ALLORA $\lim_{x \to x_0^+} g(x)$ ESISTE FINITO ED È $\geq$ ($\leq$) $g(x_0)$ SE g È CRESCENTE (DECRESCENTE).

DIMOSTRAZIONE: AMMETTIAMO CHE g SIA CRESCENTE, E PONIAMO $\ell = \inf_{x > x_0} g(x)$ CHE È FINITO PERCHÉ $g(x_0) \leq g(x)$ PER $x > x_0$.

VERIFICHIAMO CHE $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = \ell$. SI HA, OVVIAMENTE,

$$\ell - \varepsilon < \ell \leq g(x) \text{ PER OGNI } x > x_0.$$

PER FINIRE, VEDO SE $g(x) < \ell + \varepsilon$ PER OGNI $x \in S \cap (x_0, x_0 + \delta)$ CON $\delta > 0$ OPPORTUNO.

ESSENDO ℓ IL PIÙ GRANDE MINORANTE, IL NUMERO $\ell + \varepsilon$ NON È UN MINORANTE QUINDI RISULTA $g(x_1) < \ell + \varepsilon$ PER ALMENO UN $x_1 > x_0$.

MA ALLORA, PER MONOTONIA, $g(x) \leq g(x_1) < \ell + \varepsilon$ PER OGNI $x \in (x_0, x_1) \cap S$.

QUINDI $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = \ell$ COME ASSERITO.

ESSENDO $g(x) \geq g(x_0)$ PER OGNI $x > x_0$, PER LA PERMANENZA DEL SEGNO SI HA $\ell \geq g(x_0)$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

COROLLARIO: SE $g: S \to \mathbb{R}$ È CRESCENTE E DISCONTINUA, ALLORA L'IMMAGINE $g(S)$ HA ALMENO UNA LACUNA, CIOÈ O

$g(x_0) < \lim_{x \to x_0^+} g(x)$ OPPURE

$g(x_0) > \lim_{x \to x_0^-} g(x)$. ALLORA I VALORI IN $\left(g(x_0), \lim_{x \to x_0^+} g(x)\right)$ O QUELLI IN $\left(\lim_{x \to x_0^-} g(x), g(x_0)\right)$ NON SONO ASSUNTI DA g OVVERO NON APPARTENGONO A $g(S)$.

 LU 14 NOV 2022

PENSIAMO, AD ESEMPIO, AD UN VALORE $\lambda \in \left(g(x_0), \lim_{x \to x_0^+} g(x)\right)$. ALLORA $g(x) \leq g(x_0) < \lambda$ PER $x \leq x_0$, $\lambda < \lim_{x \to x_0^+} g(x) = \inf_{x > x_0} g(x) \leq g(x)$ PER $x > x_0$. QUINDI L'IMMAGINE $g(S)$ CONTIENE ELEMENTI $< \lambda$ E ALTRI $> \lambda$ MA NON L'ELEMENTO λ.

DIMOSTRIAMO IL TEOREMA:

SIA $f: I \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE STRETTAMENTE MONOTONA, I UN INTERVALLO (APERTO O CHIUSO, LIMITATO O ILLIMITATO). ALLORA f È INVERTIBILE E LA SUA INVERSA $g: f(I) \to I \subset \mathbb{R}$ È CONTINUA.

SAPPIAMO CHE $g: S = f(I) \to \mathbb{R}$ È STRETTAMENTE MONOTONA DAL 28/10 (ESERCIZIO), LA SUA IMMAGINE È $g(S) = I$ PRIVA DI LACUNE, DUNQUE g È CONTINUA.

$$\boxed{\text{LIMITI ALL'INFINITO } (x \to \pm\infty)}$$

CONSIDERIAMO UNA $f: S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE). SI SCRIVE $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, OPPURE $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \ell$ SE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE PER OGNI $x \in S$ SODDISFACENTE $x \geq x_0$ ($x \leq x_0$) RISULTA

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

ANALOGAMENTE, SE S È ILLIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE), SI SCRIVE $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ SE PER OGNI $M \in (0, +\infty)$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE PER OGNI $x \in S$ SODDISFACENTE $x \geq x_0$ ($x \leq x_0$) RISULTA

$$f(x) > M.$$

INFINE, SE S È ILLIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE), SI SCRIVE $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ SE PER OGNI $M \in (0, +\infty)$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE PER OGNI $x \in S$ SODDISFACENTE $x \geq x_0$ ($x \leq x_0$) RISULTA

$$f(x) < -M.$$

VALGONO I CONSUETI TEOREMI SUI LIMITI.

TEOREMA DEL CONFRONTO: SE $f, g: S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE, E $f(x) \leq g(x)$ IN S, ALLORA $\lim_{x \to +\infty} f(x) \leq \lim_{x \to +\infty} g(x)$ AMMESSO CHE I LIMITI ESISTANO. SE SO CHE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ POSSO DEDURRE $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

LU 14 NOV 2022

ALTRA VERSIONE: SE $f, g, h : S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ PER OGNI $x \in S$, SE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x)$ (FINITI O INFINITI) ALLORA $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

PERMANENZA DEL SEGNO: SE $f : S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE SODDISFA $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L > 0$, ANCHE $+\infty$, ALLORA ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE PER OGNI $x \in S \cap (x_0, +\infty)$ RISULTA $f(x) > 0$. RAFFINAMENTO: SE $L \in (0, +\infty)$ POSSIAMO FAR SÌ CHE $f(x) > \frac{L}{2} > 0$. SE $L = +\infty$ POSSIAMO FAR SÌ CHE $f(x) > 1$.

LA COMPLETEZZA IMPLICA CHE SE $f : S \to \mathbb{R}$, CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE, È MONOTONA, ALLORA IL $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ESISTE, FINITO O INFINITO.

SI PUÒ DIMOSTRARE PER ESERCIZIO. SUGGERIMENTO: IL $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$ ESISTE: QUESTO LO SAPPIAMO...

$$\boxed{\text{SEMPLICI ESEMPI}}$$

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \ell$, $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

VERIFICA: PRENDO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ E CERCO x_0 TALE CHE PER OGNI $x \in S \cap (x_0, +\infty)$ RISULTI $|f(x) - \ell| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$.

BASTA PRENDERE $x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, ED ECCO CHE SE $x > x_0 = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ RISULTA $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \varepsilon$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

2) $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ QUALUNQUE SIA $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$. PRENDO $M \in (0, +\infty)$ E DETERMINO x_0 TALE CHE $x^n > M$ PER OGNI $x > x_0$. BASTA PRENDERE $x_0 = \max\{1, M\}$, OVVERO PRENDERE UN $x_0 \ge M$ CHE SIA ANCHE ≥ 1. INFATTI SE $x > x_0 = \max\{1, M\}$ HO CHE $x^n \ge x > x_0 \ge M$.

LA SOLUZIONE DELLO STUDENTE: PRENDO $x_0 = \sqrt[n]{M}$ E SE $x > x_0 = \sqrt[n]{M} > 0$ TROVO SUBITO $x^n > M$.

LU 14 NOV 2022

3) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. PER LA VERIFICA, RICORDIAMO CHE LA SUCCESSIONE (e^n) DIVERGE A $+\infty$. OSSERVIAMO CHE OGNI $x \in \mathbb{R}$ SODDISFA $n \leq x < n+1$ CON UN UNICO $n \in \mathbb{Z}$ OPPORTUNO, DETTO PARTE INTERA DI x E INDICATO CON $[x]$, $\lfloor x \rfloor$, $\text{floor}(x)$. ESEMPIO: $[0,5] = 0$, $[-\pi] = -4$ PERCHÉ $0 \leq 0{,}5 < 1$ E $-4 \leq -\pi < -3$. A PROPOSITO: LA FUNZIONE $f(x) = [x]$ È MONOTONA, E DISCONTINUA SE $x \in \mathbb{Z}$.

VERIFICHIAMO CHE $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. PRENDO $M \in (0,+\infty)$ E SO CHE $e^n > M$ PER $n \geq n_0$ OPPORTUNO. POSTO $x_0 = n_0$ HO CHE SE $x > x_0 = n_0$ LA SUA PARTE INTERA $[x] \geq x_0 = n_0 \in \mathbb{Z}$ QUINDI $e^x \geq e^{[x]} > M$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE. LA SOLUZIONE DELLO STUDENTE: HO CHE $e^x > M$ SE $x > \log M$.

ALGEBRA DEI LIMITI

SE $f,g : S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE SODDISFANO $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ E $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b \in \mathbb{R}$, ALLORA $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) \pm g(x)\big) = a \pm b$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)\,g(x) = ab$. SE $b \neq 0$ ALLORA $g(x) \neq 0$ IN $S \cap (x_0, +\infty)$ E $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$. SE, INFINE, $b > 0$ ALLORA $\lim_{x\to+\infty} \big(g(x)\big)^{f(x)} = b^a$. PER LA DIMOSTRAZIONE, O SI ADATTA IL RAGIONAMENTO, O SI USA IL TEOREMA PONTE.

DEFINIZIONE SUCCESSIONALE DI LIMITE: DATA $f : S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE, SI SCRIVE $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, FINITO O INFINITO, SE PER OGNI SUCCESSIONE A TERMINI $a_n \in S$ TALE CHE $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ SI HA $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = L$.

TEOREMA PONTE: LA DEFINIZIONE SUCCESSIONALE EQUIVALE ALLE DEFINIZIONI $\varepsilon - x_0$ E $M - x_0$.

MA 15 NOV 2022

QUALCHE ALTRO ESEMPIO

4) $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ SE $\alpha\in(0,+\infty)$.

INFATTI $x^\alpha > M > 0$ SE $x > x_0 = M^{\frac{1}{\alpha}}$

(USIAMO LA MONOTONIA DI x^α COME IL 28/10)

5) $\lim_{x\to+\infty} x^\beta = 0$ SE $\beta\in(-\infty,0)$.

INFATTI $0 < x^\beta = \frac{1}{x^{|\beta|}} < \frac{1}{M}$ DEFINITIVAMENTE.

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ PERCHÉ $\left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right| \le$

$\le \frac{1}{x}$ PER $x>0$ E LA TESI SEGUE PER CONFRONTO

7) $\lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty$. SI HA, INFATTI,

$\log x > M$ PER OGNI $x > x_0 = e^M$.

8) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ PERCHÉ $0<e^x<$

$<\varepsilon$ PER $x<\log\varepsilon$. OPPURE SCRIVIAMO

$e^x = \frac{1}{e^y}$ CON $y=-x$ E RICORDIAMO CHE

$\lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$.

9) $\lim_{x\to0^+}\log x = -\infty$ IN QUANTO SI HA

$\log x < -M$ PER $x\in(0,e^{-M})$ PER

LA MONOTONIA DELLA FUNZIONE LOGARITMICA.

10) POSTO $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ CON $n, a_n > 0$,

RISULTA $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. INFATTI SI HA

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k =$$

$$= a_n x^n \left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{a_n x^{n-k}}\right) \to +\infty$$

ESTENSIONE DEL TEOREMA DEL PRODOTTO AL CASO IN CUI UN FATTORE TENDE A $+\infty$ E L'ALTRO È POSITIVO E LONTANO DA ZERO: SE $f(x)\to+\infty$ E $g(x)>\varepsilon_0>0$ ALLORA $f(x)g(x) > M\varepsilon_0$ PER $x>x_0$ OPPORTUNO. COME TROVO x_0? SO PER IPOTESI CHE $f(x)>M$ PER $x>x_0$ OPPORTUNO! NELL'APPLICAZIONE, IL FATTORE

$$g(x) = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{a_n}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-k} \longrightarrow 1$$

QUINDI $g(x)>1-\varepsilon>0$ PER $x>x_0$ OPPORTUNO.

11) CON LO STESSO METODO SI TROVANO I LIMITI DELLE FUNZIONI RAZIONALI (RAPPORTI DI POLINOMI). SI RACCOMANDA LO SVOLGIMENTO DI QUALCHE ESERCIZIO.

$$\frac{1-x^2}{2x^2+x+3} = \frac{\frac{1}{x^2}-1}{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} \quad \text{PER } x\ne0,$$

QUINDI $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^2}{2x^2+x+3} = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1-x^3}{2x^2+x+3} = \frac{\frac{1}{x^3}-1}{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\cdot x \quad \text{PER } x\ne0,$$

$$\frac{\frac{1}{x^3}-1}{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} \to -\frac{1}{2} \quad \text{QUINDI}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^3}{2x^2+x+3} = \mp\infty$$

MA 15 NOV 2022

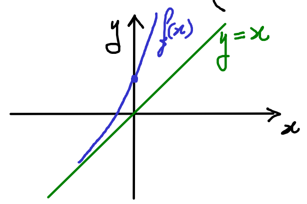
ASINTOTI ALL'INFINITO

DATA $f: S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE), SI DICE CHE LA RETTA GRAFICO DI $y(x) = mx + q$ È UN ASINTOTO PER $x \to \pm\infty$ SE $\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - y(x) \right) = 0$.

ESEMPI: L'ASSE x, GRAFICO DI $y(x) = 0$, È UN ASINTOTO DI $f(x) = \frac{1}{x}$ PER $x \to \pm\infty$.

LA RETTA ORIZZONTALE $y = -\frac{1}{2}$ È UN ASINTOTO DI $f(x) = \frac{1 - x^2}{2x^2 + x + 3}$ PER $x \to \pm\infty$.

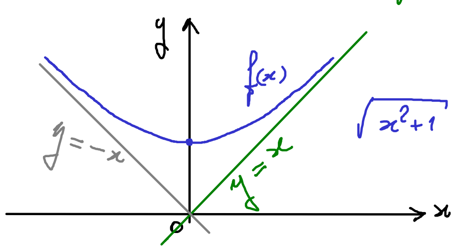
LA BISETTRICE DEL TERZO QUADRANTE, GRAFICO DI $y(x) = x$, È UN ASINTOTO DI $f(x) = x + e^x$ PER $x \to -\infty$ (CFR. ESEMPIO 8: $e^x \to 0$).



ESEMPI TIPICI SONO LE IPERBOLI. OLTRE A $f(x) = \frac{1}{x}$ ABBIAMO, AD ESEMPIO, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

VERIFICHIAMO CHE $y(x) = x$ È UN ASINTOTO PER $x \to +\infty$. A TAL FINE OSSERVIAMO CHE $\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = 1$ QUINDI

$$f(x) - y(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \to 0$$



$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$

RICERCA DEGLI EVENTUALI ASINTOTI

SIA DATA $f: S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE). ① CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE PER L'ESISTENZA DI UN ASINTOTO A $\pm\infty$ È CHE IL LIMITE $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ ESISTA FINITO. LA CONDIZIONE È NECESSARIA PERCHÉ SE $f(x) - y(x) \to 0$ PER UNA $y(x) = mx + q$ ALLORA DEFINISCO $g(x) = f(x) - y(x) \to 0$ E VEDO CHE $\frac{f(x)}{x} = \frac{g(x) + mx + q}{x} = \frac{g(x) + q}{x} + m$

LA CONDIZIONE NON È SUFFICIENTE: INFATTI $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^\alpha} \longrightarrow 0$ MA $f(x) = \sqrt{x}$ NON HA ASINTOTI.

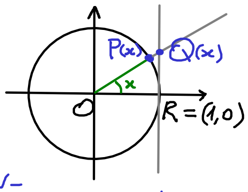
② SUPPONIAMO CHE IL $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ ESISTA FINITO E LO INDICHIAMO CON m. CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER L'ESISTENZA DI UN ASINTOTO A $\pm\infty$ È CHE IL LIMITE $\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx \right)$ ESISTA FINITO. LA CONDIZIONE È NECESSARIA PERCHÉ SE $f(x) = g(x) + mx + q$ CON $g(x) \to 0$ HO CHE $f(x) - mx = g(x) + q \longrightarrow q$. LA CONDIZIONE È SUFFICIENTE: SE IL LIMITE DI $f(x) - mx$ ESISTE FINITO LO INDICO CON q E SO CHE $f(x) - mx \longrightarrow q$ IL CHE SIGNIFICA $f(x) - mx - q \longrightarrow 0$ DUNQUE LA RETTA $y(x) = mx + q$ È UN ASINTOTO.

GI 17 NOV 2022

TRE LIMITI UTILI PER IL CALCOLO DIFFERENZIALE

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. DATA LA PARITÀ DELLA FUNZIONE $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, BASTA VERIFICARE CHE $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. RICORDIAMO CHE $\sin x < x$ PER $x \in (0,1)$ (LEZIONE DEL 7/11) QUINDI $\frac{\sin x}{x} < 1$.

PER FINIRE, CONSIDERIAMO IL SETTORE DI APERTURA x LA CUI AREA A SI RICAVA DA $\frac{A}{\pi} = \frac{x}{2\pi}$, DUNQUE $A = \frac{x}{2}$



ED È MINORE DELL'AREA DEL TRIANGOLO $ORQ(x)$, OVVERO $A = \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$

DA QUESTO SEGUE $x < \frac{\sin x}{\cos x}$ E QUINDI

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

E LA TESI SEGUE DALLA CONTINUITÀ DI $\cos x$.

② $\lim_{h\to 0^\pm} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$. SCRIVIAMO $\frac{\log(1+h)}{h} = \frac{1}{h}\log(1+h) = \log(1+h)^{\frac{1}{h}}$. POSTO $x = \frac{1}{h} \to \pm\infty$ DIVENTA $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ E LA TESI SEGUE DALLA CONTINUITÀ DEL LOGARITMO IN QUANTO $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

PER VERIFICARE CHE $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ BASTA RICORDARE CHE $n \le x < n+1$, CON $n=[x]$, QUINDI $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

E $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \ge \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \to e$

E LA TESI SEGUE PER CONFRONTO. INFINE, POSTO $y=-x$ ABBIAMO $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} =$

$$= \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) \xrightarrow[y\to+\infty]{} e$$

③ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$. INFATTI, POSTO $h = e^x - 1 \to 0$ SI HA $x = \log(1+h)$ E QUINDI $\frac{e^x-1}{x} = \frac{h}{\log(1+h)} = \dfrac{1}{\frac{\log(1+h)}{h}}$

E LA TESI SEGUE DAL LIMITE ②.

GI 17 NOV 2022

TEOREMA DEGLI ZERI: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua e $f(a)<0<f(b)$ allora esiste almeno un $x_0\in(a,b)$ tale che $f(x_0)=0$.

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua e $f(a)<f(b)$ allora per ogni $y_0 \in (f(a),f(b))$ esiste almeno un $x_0\in(a,b)$ tale che $f(x_0)=y_0$.

APPLICAZIONE: prendo $f(x)=x^2$, so che $f(0)=0$ e $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, quindi per ogni $y_0\in(0,+\infty)$ scelgo $a=0$ e b tale che $y_0<f(b)=b^2$.

Il teorema assicura che esiste $x_0\in(a,b)$ tale che $f(x_0)=x_0^2=y_0$. L'unicità di x_0 segue dalla monotonia di $f(x)$. Si definisce

$$\sqrt{y_0}=x_0.$$

NOTA: il teorema degli zeri è il caso particolare in cui $y_0=0$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI: data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, e preso $y_0\in(f(a),f(b))$, definisco $g(x)=f(x)-y_0$ cosicché $g(a)=f(a)-y_0<0<f(b)-y_0=g(b)$.

Per il teorema degli zeri, esiste $x_0\in(a,b)$ tale che $g(x_0)=f(x_0)-y_0=0$ quindi $f(x_0)=y_0$ come volevasi dimostrare.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEGLI ZERI:

Si definiscono per ricorrenza due successioni che convergono (per completezza) ad x_0.

Poniamo $a_0=a$, $b_0=b$. Poi per ogni $n=0,1,2,3,\dots$ definiamo innanzitutto $c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$

e quindi, se $f(c_n)\geq 0$, poniamo $\begin{cases} a_{n+1}=a_n<c_n \\ b_{n+1}=c_n<b_n \end{cases}$

se, invece, $f(c_n)<0$, poniamo $\begin{cases} a_{n+1}=c_n>a_n \\ b_{n+1}=b_n>c_n \end{cases}$

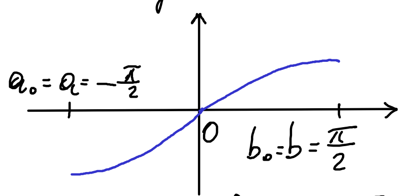
Essendo $a_0\leq a_n\leq a_{n+1}<b_{n+1}\leq b_n\leq b_0$, per completezza esistono $\lim_{n\to+\infty} a_n=x_0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n=x_1$. Ma si vede per induzione che

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$$

quindi $x_1-x_0=0$.

Infine, per continuità, si ha che $f(x_0)=\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\leq 0$ per la permanenza del segno e similmente $f(x_0)=\lim_{n\to+\infty} f(b_n)\geq 0$ quindi $f(x_0)=0$ come volevasi dimostrare.

ESEMPIO: $f(x)=\operatorname{sen} x$ sull'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



1) $c_0=0$; 2) $f(c_0)\geq 0$

3) $a_1=-\frac{\pi}{2}$, $b_1=0$

4) $c_1=-\frac{\pi}{4}$, $f(c_1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$,

$a_1=c_1=-\frac{\pi}{4}$, $b_1=0$; 5) $a_2=-\frac{\pi}{8}$, $b_2=0$

$a_n=-\frac{\pi}{2^{n+1}}\to x_0=0$, $b_n=0\to x_0=0$.

LU 21 NOV 2022

LIMITE DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

VEDIAMO QUALCHE TIPICO ESEMPIO:

LEMMA: SE $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ SODDISFA $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ ALLORA: 1) $\lim_{y\to-\infty} f(-y)=\ell$; 2) $\lim_{h\to 0^+} f\left(\frac{1}{h}\right)=\ell$.

DIMOSTRAZIONE. 1) PRESO $\varepsilon\in(0,+\infty)$ SAPPIAMO PER IPOTESI CHE ESISTE $x_0\in(0,+\infty)$ TALE CHE PER OGNI $x>x_0$ RISULTA $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. MA ALLORA, PER OGNI $y<y_0=-x_0$ RISULTA ANCHE $|f(-y)-\ell|<\varepsilon$. 2) SVOLGERE PER ESERCIZIO.

IL TEOREMA DI WEIERSTRASS

ESPRIME UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA PER L'ESISTENZA DEL MASSIMO E DEL MINIMO DI UNA FUNZIONE DATA: IL SUSSISTERE DELLA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE E DELLA COMPATTEZZA DEL DOMINIO. UN SEMPLICE ENUNCIATO È IL SEGUENTE:

TEOREMA: SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È CONTINUA IN TUTTO L'INTERVALLO $[a,b]$ ALLORA HA MASSIMO E MINIMO (DEFINITI IL 2/11).

ESERCIZI: 1) TROVARE f CONTINUA E PRIVA DI MINIMO (VEDI 2/11); 2) TROVARE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ PRIVA DI MINIMO.

PER LA DIMOSTRAZIONE, INTRODUCIAMO LA NOZIONE DI COMPATTEZZA PER SUCCESSIONI:

UN INSIEME $S\subset\mathbb{R}$ SI DICE COMPATTO PER SUCCESSIONI SE OGNI SUCCESSIONE A TERMINI $x_n\in S$ HA ALMENO UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE AD UN LIMITE $\ell\in S$.

ESEMPIO: $S=(0,1)$ NON È COMPATTO PERCHÉ POSSIAMO DEFINIRE $x_n=\frac{1}{n}\in(0,1)$ E TUTTE LE SUE SOTTOSUCCESSIONI CONVERGONO A $0\notin(0,1)$.

ESEMPIO DI UNA SUCCESSIONE COMPATTA:

$$S=\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots\right\}$$

LU 21 NOV 2022

VERIFICHIAMO CHE $S=[a,b]$ È COMPATTO.

PRENDO UNA SUCCESSIONE ARBITRARIA A TERMINI $x_n \in S$. SAPPIAMO DAL 14/10 CHE ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ MONOTONA (CRESCENTE O DECRESCENTE DIPENDE DA (x_n)). PER IPOTESI SI HA $a \le x_{n_k} \le b$ PER OGNI k. PER LA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$ RISULTA $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \ell$. PER LA PERMANENZA DEL SEGNO SI HA $a \le \ell \le b$ DUNQUE $\ell \in S=[a,b]$.

INTRODUCIAMO IL CONCETTO DI SUCCESSIONE MINIMIZZANTE: DATA $f: S \to \mathbb{R}$ UNA SUCCESSIONE MINIMIZZANTE È FATTA CON TERMINI $x_n \in S$ ED È TALE CHE $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf_{x\in S} f(x)$

ESEMPI: $f(x)=e^x$, $S=\mathbb{R}$, $x_n=-n$ PERCHÉ $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0 = \inf_{\mathbb{R}} e^x$;

$f(x)=x$, $S=\mathbb{R}$, $x_n=-n$ PERCHÉ $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty = \inf_{\mathbb{R}} f(x)$;

$f(x)=\cos x$, $S=\mathbb{R}$, $x_n=\pi$ PER OGNI n PERCHÉ $\lim_{n\to+\infty} \cos\pi = -1 = \inf_{\mathbb{R}} \cos x$.

TEOREMA: QUALUNQUE $f: S\to\mathbb{R}$ CON $S\neq\emptyset$ HA ALMENO UNA SUCCESSIONE MINIMIZZANTE.

DIMOSTRAZIONE. 1) SE $\inf f = \mu \in \mathbb{R}$ ALLORA $\mu \le f(x)$ PER OGNI x E $\mu + \frac{1}{n}$ NON È UN MINORANTE, CIOÈ ESISTE $x_n \in S$ TALE CHE $\mu + \frac{1}{n} > f(x_n) \ge \mu$. PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO, $f(x_n) \to \mu$.

P.ES. SE $f(x)=e^x$ HO $\mu=0$, $\mu+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$ E PER OGNI n ESISTE x_n TALE CHE $e^{x_n}<\frac{1}{n}$ COME $x_n = \left(\log\frac{1}{n}\right) - 1 = -\log n - 1$. INFATTI $e^{x_n} = \frac{1}{ne} \to 0$.

2) SE $\inf f = -\infty$ SI PROCEDE IN MODO ANALOGO (ESERCIZIO).

SVOLGIAMO LA DIMOSTRAZIONE DEL

TEOREMA: SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È CONTINUA IN TUTTO L'INTERVALLO $[a,b]$ ALLORA HA MINIMO (DEFINITO IL 2/11).

PRENDO UNA SUCCESSIONE MINIMIZZANTE $x_n \in [a,b]$, DUNQUE $f(x_n)\to \inf_{[a,b]} f$.

SICCOME $[a,b]$ È COMPATTO, ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE $x_{n_k}\to \ell\in[a,b]$ E OVVIAMENTE $f(x_{n_k})\to \inf_{[a,b]} f$. SICCOME f È CONTINUA, $f(x_{n_k})\to f(\ell)$ QUINDI $f(\ell)=\inf_{[a,b]} f$

DA CUI SEGUE CHE $\min_{[a,b]} f = f(\ell)$ ED $x_0=\ell$ È UN PUNTO DI MINIMO.

COROLLARIO: SE $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ È CONTINUA, ALLORA AMMETTE MASSIMO.

DIMOSTRAZIONE 1: ADATTARE IL RAGIONAMENTO.
DIMOSTRAZIONE 2: SFRUTTARE L'ESISTENZA DEL MINIMO DI $f(x)=-g(x)$.

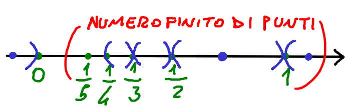
COME VEDERE SE UN INSIEME $S\subset\mathbb{R}$ È COMPATTO? TEOREMA DI HEINE - BOREL: CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ UN INSIEME $S\subset\mathbb{R}$ SIA COMPATTO È CHE SIA CHIUSO E LIMITATO.

DEFINIZIONE: S È CHIUSO SE $\mathbb{R}\setminus S$ È APERTO.

OPERATIVAMENTE, SI VEDE SE S È CHIUSO CONTROLLANDO CHE $DS\subset S$, OPPURE CHE $\partial S\subset S$, DOVE ∂S DENOTA LA FRONTIERA DI S, COSTITUITA DAI PUNTI $x\in\mathbb{R}$ CHE NON SONO NÉ INTERNI NÉ ESTERNI. I PUNTI $x\in\mathbb{R}$ ESTERNI AD S SONO I PUNTI INTERNI A $\mathbb{R}\setminus S$.

ESEMPIO: $S=[a,b]$ È CHIUSO PERCHÉ $\mathbb{R}\setminus S = (-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ È APERTO, INOLTRE $DS=[a,b]\subset S$. L'INTERNO DI S È $\mathring{S}=(a,b)$ ED I PUNTI $x=a$, $x=b$ NON SONO NÉ INTERNI NÉ ESTERNI: $\partial S=\{a,b\}$.

ESEMPIO: $S=\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$

SICCOME $DS=\{0\}\subset S$ SI PUÒ DIRE CHE S È CHIUSO. IL COMPLEMENTARE $\mathbb{R}\setminus S$ È APERTO PERCHÉ UNIONE DI UNA SUCCESSIONE DI INTERVALLI APERTI 

LA FRONTIERA DI S È $\partial S=(S\cap\partial S)\cup(\partial S\cap(\mathbb{R}\setminus S))$ MA $\mathbb{R}\setminus S$ È APERTO QUINDI NON INTERSECA ∂S:

$$\partial S\cap(\mathbb{R}\setminus S)=\emptyset$$

INOLTRE NESSUN $x\in S$ È INTERNO: $S=\partial S$