Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Funzioni elementari

prof. Antonio Greco

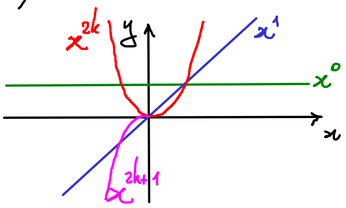
Anno accademico 2022/23

GI 27 OTT 2022

LE PRINCIPALI FUNZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

LE POTENZE DELLA x SI DEFINISCONO IN MODO INCREMENTALE (13 OTTOBRE).

x^n, $n \in \mathbb{N}$, HA PER DOMINIO L'INSIEME $\mathbb{R}$:



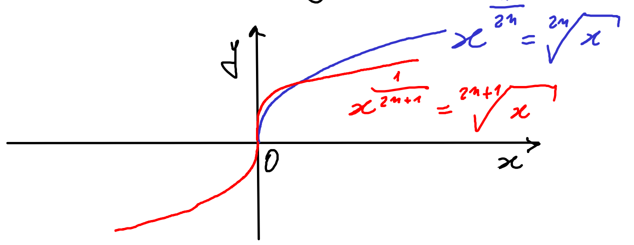
POLINOMI IN UNA VARIABILE: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k =$

$= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ PERCHÉ $x^0 = 1$ PER OGNI x, COMPRESO $x = 0$: QUESTO NON È UN LIMITE!

ESEMPIO: LA RETTA $y = mx + q$ SI PUÒ SCRIVERE

$y = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} a_k x^k$ AVENDO POSTO $a_0 = q$ E $a_1 = m$.

FUNZIONI $x^{\frac{1}{k}}$, $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ SI DEFINISCONO, DATO x, DIMOSTRANDO L'ESISTENZA E L'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE y DELL'EQUAZIONE $y^k = x$, IL CHE, SE k È PARI, RICHIEDE $x \in [0, +\infty)$ E LA SOLUZIONE y SI CERCA IN $[0, +\infty)$.



LA FUNZIONE $x^{\frac{1}{2n}}$ DA $[0, +\infty)$ A $[0, +\infty)$ È LA FUNZIONE INVERSA DELLA RESTRIZIONE DELLA FUNZIONE y^{2n} ALL'INTERVALLO $[0, +\infty)$

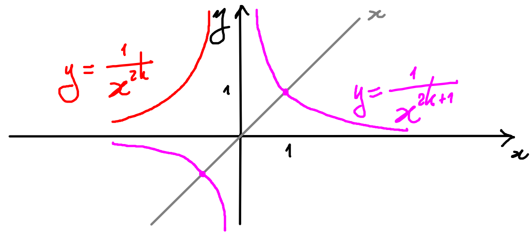
LA RADICE QUADRATA DEI NUMERI NEGATIVI NON ESISTE

$\boxed{\Updownarrow}$

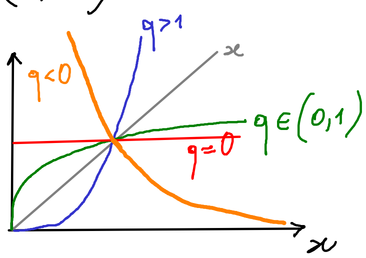
PER TROVARE $\sqrt{y}$ CERCO x TALE CHE $x^2 = y$

LA FUNZIONE x^2 NON È SURIETTIVA VERSO L'INSIEME $\mathbb{R}$

LE FUNZIONI x^{-n} SI DEFINISCONO $\dfrac{1}{x^n}$ PER $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$



LA FUNZIONE $x^q = x^{\frac{n}{k}} = (\sqrt[k]{x})^n$ CON $q = \dfrac{n}{k} \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Z}$ E $k = 2, 3, 4, \dots$ CONSEGUE PER $x \in (0, +\infty)$ DALLE PRECENTI.



SE $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, L'ANDAMENTO DEL GRAFICO DI x^α È DEL TUTTO SIMILE PERCHÉ $x^\alpha = \lim_{k \to \infty} x^{q_k}$ ESSENDO q_k RAZIONALI E $q_k \to \alpha$.

VE 28 OTT 2022

VERIFICA ANALITICA DELLE PROPRIETÀ RAPPRESENTATE NEI GRAFICI

OSSERVAZIONE 1: PER OGNI $b \in (0,+\infty)$ E $\alpha \in \mathbb{R}$ SI HA $b^\alpha > 0$. INFATTI $b^n = \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ VOLTE}} > 0$

PER $\alpha = n \in \{1,2,3,\dots\}$; $\sqrt[k]{b} = b^{\frac{1}{k}} > 0$ PER LA DEFINIZIONE DI $\sqrt[k]{b}$ (13/10, 27/10), $k \in \{2,3,4,\dots\}$; $b^{\frac{n}{k}} = (\sqrt[k]{b})^n > 0$ PER CONSEGUENZA; $b^\alpha = \lim_{i \to +\infty} b^{q_i} > 0$

PERCHÉ $b^{q_i} > 0$, $\mathbb{Q} \ni q_i \xrightarrow[i \to +\infty]{} \alpha \in (0,+\infty)$;

INFINE $b^0 = 1 > 0$ E $b^{-\alpha} = \frac{1}{b^\alpha} > 0$.

OSSERVAZIONE 2: SE $b \in [0,1)$ E $\alpha \in (0,+\infty)$ ALLORA $b^\alpha < 1$. INFATTI $b^n = \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ VOLTE}} < 1$

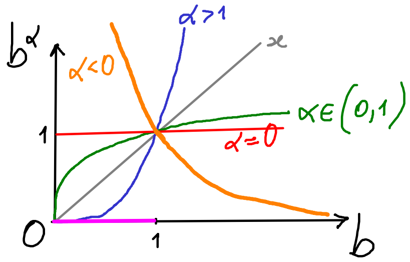
SE $\alpha = n \in \{1,2,3,\dots\}$; INOLTRE $\underbrace{\sqrt[k]{b} \cdots \sqrt[k]{b}}_{k \text{ VOLTE}} = b < 1$ QUINDI $\sqrt[k]{b} < 1$ PER $k \in \{2,3,\dots\}$;

$b^{\frac{n}{k}} = (\sqrt[k]{b})^n < 1$ PER CONSEGUENZA;

$b^\alpha = \lim_{i \to +\infty} b^{q_i} < 1$ PERCHÉ $b^{q_i} < 1$ E

$\mathbb{Q} \ni q_i \longrightarrow \alpha \in (0,+\infty)$.

NOTA: $b^{-\alpha} = \frac{1}{b^\alpha} > \frac{1}{1} = 1$. ($b^\alpha < 1$)



LA MONOTONIA DELLE FUNZIONI

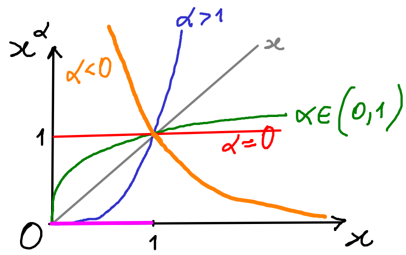
DEFINIZIONE: f È STRETTAMENTE CRESCENTE SE RISULTA $f(x_1) < f(x_2)$ OGNIQUALVOLTA $x_1 < x_2$.

NOTA: LA MONOTONIA IN UN SINGOLO PUNTO NON HA SENSO!

ESEMPIO: $f(x) = x^\alpha$ PER $\alpha \in (0,+\infty)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE SULL'INTERVALLO $[0,+\infty)$.

VERIFICA: PRENDO $0 \le x_1 < x_2$ E VEDO SE $f(x_1) = x_1^\alpha < x_2^\alpha = f(x_2)$. DIVIDENDO PER $x_2^\alpha > 0$ DIVENTA $b^\alpha < 1$, $b = \frac{x_1}{x_2} \in [0,1)$, VERA PER L'OSSERVAZIONE 2.

NOTA: SE $0 < x_1 < x_2$ ALLORA $x_1^{-\alpha} = \frac{1}{x_1^\alpha} > \frac{1}{x_2^\alpha} = x_2^{-\alpha}$ QUINDI $g(x) = x^{-\alpha}$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE SULL'INTERVALLO $(0,+\infty)$.



VE 28 OTT 2022

PARITÀ E DISPARITÀ DI UNA FUNZIONE

PREMESSA: UN SOTTOINSIEME $S \subset \mathbb{R}^N$ SI DICE SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE SE IL PUNTO $-x = (-x_1, \dots, -x_N)$ APPARTIENE AD S OGNIQUALVOLTA VI APPARTIENE $x = (x_1, \dots, x_N)$.

CONSIDERIAMO $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ CON $S \subset \mathbb{R}^1$ SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE. ESEMPIO: L'INSIEME $S = \mathbb{R}$ È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE, L'INTERVALLO $S = [0, +\infty)$ NO PERCHÉ $1 \in S$ E $-1 \notin S$.

f SI DICE PARI SE $f(x) = f(-x)$ PER OGNI $x \in S$;

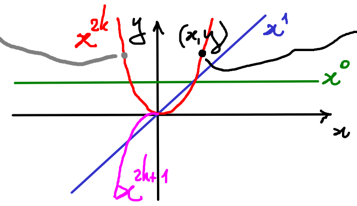
f SI DICE DISPARI SE $f(x) = -f(-x)$ OVVERO $-f(x) = f(-x)$ PER OGNI $x \in S$.

ESEMPIO: $\sqrt{x}$ NON È NÉ PARI NÉ DISPARI PERCHÉ IL SUO DOMINIO È L'INTERVALLO $S = [0, +\infty)$.

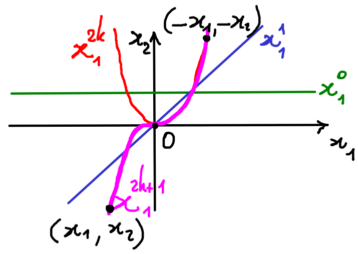
ESERCIZIO: TROVARE UN $S \subset \mathbb{R}$ ED UNA $f: S \to \mathbb{R}$ CHE SIA PARI E ANCHE DISPARI.

ESEMPI: $f(x) = x^{2k}$ È PARI PER OGNI $k \in \mathbb{N}$, INFATTI $f(-x) = (-x)^{2k} = ((-x)^2)^k = (x^2)^k = f(x)$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = x^{2k+1}$ È DISPARI (ESERCIZIO).

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA. IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE $f: S \to \mathbb{R}$ È L'INSIEME $\Gamma = \{(x, y) : y = f(x)\}$. f È PARI SE E SOLO SE L'INSIEME Γ È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE y, CIOÈ IL PUNTO $(-x, y)$ APPARTIENE A Γ OGNIQUALVOLTA $(x, y) \in \Gamma$.



f È DISPARI SE E SOLO SE L'INSIEME $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE.



ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $f(x) = -2x$ E $g(x) = -\frac{x^3}{4}$ SONO FUNZIONI DISPARI E TRACCIARNE I GRAFICI.

ESERCIZIO: SE $f_1, f_2, g_1, g_2 : S \to \mathbb{R}$, f_1, f_2 SONO PARI, g_1, g_2 SONO DISPARI, LE FUNZIONI $f_1(x) \cdot f_2(x)$, $f_1(x) g_1(x)$, $g_1(x) \cdot g_2(x)$ SONO PARI O DISPARI?

LE PRINCIPALI FUNZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

LA FUNZIONE ESPONENZIALE $f(x) = e^x$ HA PROPRIETÀ ANALOGHE A 10^x E 2^x, ANCHE b^x CON $b \in (1, +\infty)$.

INOLTRE SE $a \in (0,1)$ DEFINISCO $b = \frac{1}{a} \in (1, +\infty)$ E RISULTA $a^x = \frac{1}{b^x}$. IL DOMINIO È L'INSIEME $\mathbb{R}$ E LA DEFINIZIONE È QUELLA GIÀ VISTA IL 10 ED IL 27.

DALL'OSSERVAZIONE 1 SEGUE CHE $e^x > 0$ PER OGNI x. DALL'OSSERVAZIONE 2 SEGUE LA MONOTONIA: PRESI $x_1 < x_2$ VOGLIO SAPERE SE $e^{x_1} < e^{x_2}$. DIVIDO PER $e^{x_2} > 0$ E DIVENTA

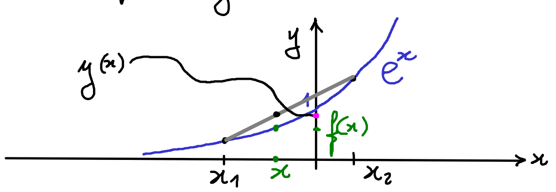
$$e^{x_1 - x_2} = \frac{1}{e^{x_2 - x_1}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{x_2 - x_1} < 1 \quad \text{OVVERO}$$

$$b^\alpha < 1 \text{ CON } b = \frac{1}{e} < 1 \text{ E } \alpha = x_2 - x_1 > 0.$$

PER ANDARE AVANTI OCCORRE STABILIRE LA CONVESSITÀ: UNA $f: I \to \mathbb{R}$ DOVE I È UN INTERVALLO, APERTO O CHIUSO, LIMITATO O ILLIMITATO, SI DICE CONVESSA SE COMUNQUE SI PRENDANO $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,

POSTO $$y(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1),$$

RISULTA $f(x) \leq y(x)$ PER OGNI $x \in (x_1, x_2)$.



VE 28 OTT 2022

ESERCIZI: VERIFICARE CHE LE FUNZIONI $|x|$ E x^2 SONO CONVESSE SULL'INTERVALLO $I = \mathbb{R}$.

VERIFICARE CHE LA FUNZIONE $\frac{1}{x}$ È CONVESSA SULL'INTERVALLO $I = (0, +\infty)$.

LA CONVESSITÀ DI e^x SI PUÒ DIMOSTRARE CON IL CALCOLO DIFFERENZIALE.

LA FUNZIONE LOGARITMICA SI DEFINISCE COME LA FUNZIONE INVERSA DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE. PIÙ ESATTAMENTE, FISSATO $y \in (0, +\infty)$ SI DIMOSTRA (TEOREMA DEGLI ZERI) CHE ESISTE $x \in \mathbb{R}$ TALE CHE $e^x = y$: e^x È SURIETTIVA VERSO L'INTERVALLO $(0, +\infty)$. L'UNICITÀ SEGUE DALLA STRETTA MONOTONIA: SE $x_1 < x_2$ ALLORA $e^{x_1} < e^{x_2}$. RESTA DEFINITA UNA FUNZIONE $y \mapsto x$ SENZA BISOGNO DI UN'ESPRESSIONE ESPLICITA, E LA SI INDICA CON $x = \log y$.

ESERCIZIO: SE $f: S \to \mathbb{R}$ È STRETTAMENTE CRESCENTE, DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE INVERSA DI f È STRETTAMENTE CRESCENTE. NE SEGUE CHE LA FUNZIONE LOGARITMICA È STRETTAMENTE CRESCENTE.

ME 02 NOV 2022

LE PROPRIETÀ PRINCIPALI DEI LOGARITMI

N. 0: $e^{\log y} = y$ PER OGNI $y \in (0, +\infty)$,

E, PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, $\log e^x = x$.

N. 1: PRESI $y_1, y_2 \in (0, +\infty)$ E POSTO $x_1 = \log y_1$ E $x_2 = \log y_2$, SI HA

$e^{x_1} = y_1$ E $e^{x_2} = y_2$. MOLTIPLICANDO

MEMBRO A MEMBRO SI OTTIENE $y_1 y_2 =$

$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$ E PERCIÒ $\log y_1 y_2 =$

$= x_1 + x_2 = \log y_1 + \log y_2$. INOLTRE,

DIVIDENDO MEMBRO A MEMBRO SI TROVA

$$\log \frac{y_1}{y_2} = \log y_1 - \log y_2 .$$

N. 2: PRESO $y \in (0, +\infty)$ E $\alpha \in \mathbb{R}$, PONIAMO

$x = \log y$, QUINDI $e^x = y$. ELEVANDO

AMBO I MEMBRI AD ESPONENTE α SI TROVA

$y^\alpha = (e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$ LA QUALE MOSTRA CHE

$$\log y^\alpha = \alpha x = \alpha \log y .$$

SVOLGIAMO UNO DEGLI ESERCIZI ASSEGNATI IL 28 OTTOBRE: VERIFICHIAMO CHE LA FUNZIONE $f(x) = |x|$ AVENTE PER DOMINIO L'INTERVALLO $I = (-\infty, +\infty)$ È CONVESSA. PRENDIAMO $x_1 < x < x_2$ E VERIFICHIAMO CHE $f(x) = |x|$

$$\leq \frac{|x_2| - |x_1|}{x_2 - x_1}(x - x_1) + |x_1| =$$

$$= \frac{|x_2| - |x_1|}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \frac{x_2 - x + x - x_1}{x_2 - x_1}|x_1|$$

$$= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}|x_2| + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}|x_1|$$ E LA TESI

SEGUE DALLA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE, IN QUANTO $x = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1$.

NOTA: PONENDO $\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ E $\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = 1 - \lambda$

LA DISUGUAGLIANZA SI PUÒ SCRIVERE

$$|\lambda x_2 + (1-\lambda) x_1| \leq \lambda |x_2| + (1-\lambda) |x_1|$$

E, IN GENERALE, $f(\lambda x_2 + (1-\lambda) x_1) \leq$

$\leq \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1)$, $\lambda \in (0,1)$

COMBINAZIONE CONVESSA

CONCAVITÀ: UNA $f: I \to \mathbb{R}$ DOVE I È UN INTERVALLO, APERTO O CHIUSO, LIMITATO O ILLIMITATO, SI DICE CONCAVA SE COMUNQUE SI PRENDANO $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,

POSTO $y(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$,

RISULTA $f(x) \geq y(x)$ PER OGNI $x \in (x_1, x_2)$.

STRETTAMENTE CONCAVA SE $f(x) > y(x)$ PER OGNI $x \in (x_1, x_2)$, STRETTAMENTE CONVESSA SE $f(x) < y(x)$ PER OGNI $x \in (x_1, x_2)$.

ME 02 NOV 2022

LIMITATEZZA, MASSIMI E MINIMI

UNA $f: S \to \mathbb{R}$ SI DICE INFERIORMENTE LIMITATA SE ESISTE ALMENO UN $m \in \mathbb{R}$ DETTO MINORANTE TALE CHE $m \leq f(x)$ PER OGNI $x \in S$, SUPERIORMENTE LIMITATA SE ESISTE ALMENO UN $M \in \mathbb{R}$ DETTO MAGGIORANTE TALE CHE $f(x) \leq M$ PER OGNI $x \in S$. LE FUNZIONI LIMITATE SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE POSSONO ANCHE DIRSI LIMITATE.

ESEMPI: $f(x) = x^2 \geq 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, QUINDI È INFERIORMENTE LIMITATA. IDEM $e^x > 0$.

COMPLETEZZA: L'INSIEME DEI MINORANTI, SE NON È VUOTO, HA UN ELEMENTO PIÙ GRANDE DEGLI ALTRI, CHE SI CHIAMA ESTREMO INFERIORE DELLA FUNZIONE E SI INDICA CON $\inf f$. SE f È ILLIMITATA INFERIORMENTE, SI DEFINISCE $\inf f = -\infty$.

ESEMPI: $\inf x^2 = 0$ (I NUMERI POSITIVI NON SONO MINORANTI DI x^2).

$\inf e^x = 0$ (I NUMERI POSITIVI NON SONO MINORANTI DI e^x).

$\inf x^3 = -\infty$ (FUNZIONE ILLIMITATA)

$\inf \log x = -\infty$ (FUNZIONE ILLIMITATA).

DISCORSO SIMILE PER $\sup f$.

NESSO CON LA FORMULAZIONE 4 DELLA COMPLETEZZA (04/10):

L'ESTREMO SUPERIORE $\sup f$ DI UNA FUNZIONE $f: S \to \mathbb{R}$ SI PUÒ ANCHE DEFINIRE COME L'ESTREMO SUPERIORE DELL'INSIEME $f(S)$, DETTO IMMAGINE DI f, O ANCHE IMMAGINE DI S TRAMITE f.

DIMOSTRARE L'EQUIVALENZA FRA LE FORMULAZIONI 1, ..., 5 DELLA COMPLETEZZA È UNA ULTERIORE QUESTIONE. SI TRATTA DI DIMOSTRARE DOPPIE IMPLICAZIONI. AD ESEMPIO: SUPPONIAMO CHE LE SUCCESSIONI MONOTONE AMMETTANO LIMITE. PRENDO UN $S \subset \mathbb{R}$ LIMITATO SUPERIORMENTE: HO CHE $x \leq M_0$ PER OGNI $x \in S$. PRENDO UN $x_0 \in S$ E CONSIDERO LA MEDIA $\frac{x_0 + M_0}{2}$ E MI CHIEDO SE È UN MAGGIORANTE. SE LO È, PONGO $M_1 = \frac{x_0 + M_0}{2}$ E RICOMINCIO IL RAGIONAMENTO: $\frac{x_0 + M_1}{2}$ È UN MAGGIORANTE? ECCETERA. SE NON LO È, ESISTE $\frac{x_0 + M_0}{2} < x_1 \in S$, CONSIDERO $\frac{x_1 + M_0}{2}$ E RICOMINCIO. RESTA DEFINITA PER RICORRENZA UNA SUCCESSIONE MONOTONA IL CUI LIMITE SI DIMOSTRA ESSERE IL PIÙ PICCOLO MAGGIORANTE.

OSSERVAZIONE: SE ESISTE UN $m \leq f(x)$ PER OGNI x NEL DOMINIO, OGNI $m' \in (-\infty, m)$ SODDISFA $m' < m \leq f(x)$ QUINDI È UN MINORANTE.

ESEMPI: $m = -1$ È UN MINORANTE PER $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$.

ME 02 NOV 2022

DATA $f: S \to \mathbb{R}$ INFERIORMENTE LIMITATA, CIOÈ $\inf f > -\infty$, I CASI SONO DUE:

1) $\inf f$ È UN VALORE ASSUNTO DA f, CIOÈ $\inf f \in f(S)$, OVVERO ESISTE ALMENO UN $x_0 \in S$ TALE CHE $\inf f = f(x_0)$

ESEMPIO: $\inf x^2 = 0$ È UN VALORE ASSUNTO: $0 = f(0) = 0^2$. IN TAL CASO $\inf f$ SI CHIAMA VALORE MINIMO DI $f(x)$, O BREVEMENTE MINIMO, E SI DEFINISCE $\min f = \inf f = f(x_0)$.

IL PUNTO x_0 SI DICE PUNTO DI MINIMO DI $f(x)$, O BREVEMENTE MINIMO.

2) $\inf f$ NON È UN VALORE ASSUNTO DA f, CIOÈ $\inf f < f(x)$ PER OGNI x NEL DOMINIO: IN TAL CASO SI DICE CHE f NON AMMETTE MINIMO. ESEMPIO: $f(x) = e^x$ NON AMMETTE MINIMO.

ESERCIZIO: STABILIRE SE $f(x) = |x|$ AMMETTE MASSIMO O MINIMO. IDEM CON $f(x) = \sqrt{x}$.

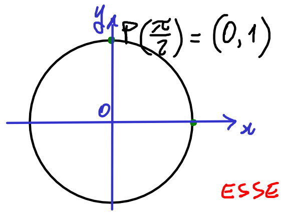
GI 03 NOV 2022

LE FUNZIONI CIRCOLARI

SI È SOLITI DEFINIRLE TRAMITE LA CIRCONFERENZA DI EQUAZIONE

$$x^2 + y^2 = 1$$

DETTA « CIRCONFERENZA TRIGONOMETRICA ». PRESO $\alpha \in \mathbb{R}$ PARTIAMO DAL PUNTO $R = (1,0)$ E PROCEDIAMO LUNGO LA CIRCONFERENZA IN VERSO ANTIORARIO SE $\alpha > 0$, ORARIO SE $\alpha < 0$, PERCORRENDO UN CAMMINO DI LUNGHEZZA $|\alpha|$. LE COORDINATE DEL PUNTO DI ARRIVO $P(\alpha) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ DEFINISCONO LE FUNZIONI $\cos\alpha$ E $\operatorname{sen}\alpha$. ESEMPIO: SE $\alpha = 2\pi$ SI TROVA $P(\alpha) = R = (1,0)$ QUINDI $\cos 2\pi = 1$ E $\operatorname{sen} 2\pi = 0$. SI TROVANO SIMILMENTE I VALORI NOTEVOLI $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$,



ECCETERA. SI PONE PER DEFINIZIONE $P(0) = 0$ QUINDI $\cos 0 = 1$, $\operatorname{sen} 0 = 0$.

ESSENDO $P(\alpha)$ PUNTO DELLA CIRCONFERENZA $x^2 + y^2 = 1$, SEGUE CHE $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$.

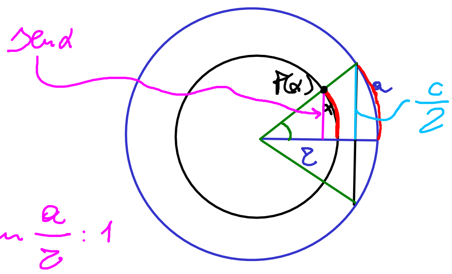
DALLA DEFINIZIONE SEGUE ANCHE CHE $P(\alpha + 2\pi) = P(\alpha)$ QUINDI $\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$ E $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$ PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$.

IN GENERALE SI DICE CHE $f: S \to \mathbb{R}$ È PERIODICA DI PERIODO $T \in (0, +\infty)$ SE $f(t) = f(t+T)$ PER OGNI $t \in S$. SI RICHIEDE CHE L'INSIEME S SIA PERIODICO DI PERIODO T, CIOÈ QUALUNQUE SIA $t \in S$ I PUNTI $t+T$ E $t-T$ APPARTENGONO AD S.

GI 03 NOV 2022

$\frac{a}{r} = \alpha$

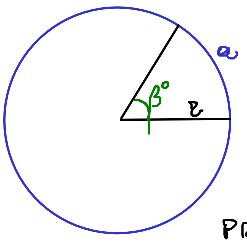
$a = r\alpha$



$\frac{c}{2} : r = \text{sen}\,\frac{a}{r} : 1$

$\frac{c}{2} = r\,\text{sen}\,\frac{a}{r}$

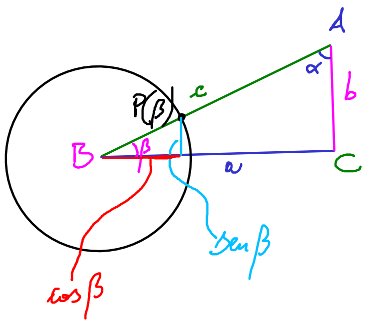
IL RADIANTE: QUANDO $a = r$, L'ANGOLO AL CENTRO DEFINISCE IL RADIANTE LA CUI MISURA IN GRADI SI TROVA DALLA PROPORZIONE



$\frac{360°}{\beta°} = \frac{2\pi r}{a} = 2\pi$ ($a = r$) DA CUI

$\beta° = \frac{360°}{2\pi} \sim 60°$ (UN PO' MENO)

LA RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI RETTANGOLI



PER SIMILITUDINE SI HA CHE

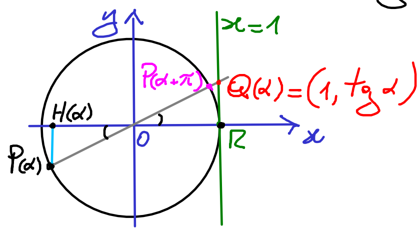
$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen}\,\beta}{1}$

QUINDI

$b = c\,\text{sen}\,\beta$

E ANALOGAMENTE $\frac{a}{c} = \frac{\cos\beta}{1}$, QUINDI $a = c\cos\beta$

LA TANGENTE TRIGONOMETRICA $\text{tg}\,\alpha$ SI DEFINISCE PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\alpha - \frac{\pi}{2} \neq k\pi$ PER OGNI $k \in \mathbb{Z}$, PERCHÉ IN TAL CASO LA RETTA $OP(\alpha)$ INTERSECA LA RETTA $x = 1$ NEL PUNTO $Q(\alpha) = (1, \text{tg}\,\alpha)$ LA CUI ORDINATA DEFINISCE $\text{tg}\,\alpha$.



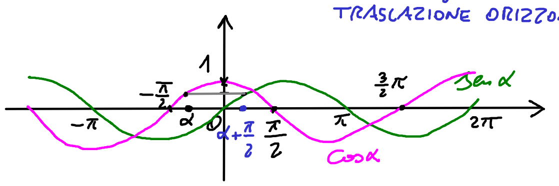
PER SIMILITUDINE FRA I TRIANGOLI $ORQ(\alpha)$ E $OH(\alpha)P(\alpha)$ SI DEDUCE CHE

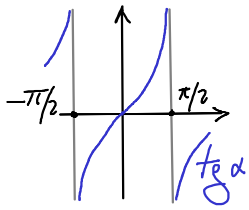
$\text{tg}\,\alpha : 1 = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

SI TROVA ANCHE CHE $\text{tg}(\alpha + \pi) = \text{tg}\,\alpha$ PER OGNI $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$

TRASLAZIONE ORIZZONTALE





PER DEFINIRE LE FUNZIONI INVERSE, SI EFFETTUANO RESTRIZIONI CONVENZIONALI:

$\text{sen}\,\alpha,\quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\cos\alpha,\quad \alpha \in [0, \pi]$

$\text{tg}\,\alpha,\quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

LE RISPETTIVE FUNZIONI INVERSE SI DENOTANO CON $\text{arcsen}\,t$ E $\text{arccos}\,t$, $t \in [-1, 1]$, E $\text{arctg}\,t$, $t \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO: TROVARE GLI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI DELLE FUNZIONI $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{arcsen}\,t$, $\text{arccos}\,t$, $\text{arctg}\,t$.

GI 03 NOV 2022

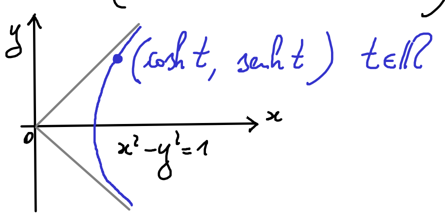
LE FUNZIONI IPERBOLICHE

OSSERVIAMO CHE $f(x)=e^x$ NON È NÉ PARI NÉ DISPARI PERCHÉ $f(1)=e \neq f(-1), -f(-1)$.

PERÒ QUALUNQUE $f: S \to \mathbb{R}$, CON S SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE SI PUÒ ESPRIMERE COME $f(x) = g(x) + h(x)$ DOVE $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ È PARI, E $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ È DISPARI.

SU $f(x)=e^x$ SI TROVA $g(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x$, $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$ E

SI HA CHE $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ PER OGNI x (SI VERIFICA FACILMENTE).



SI DEFINISCE $\tanh t = \dfrac{\operatorname{senh} t}{\cosh t} = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

L'INVERSA DI $y = \operatorname{senh} t$ È $t = \operatorname{sett\,senh} y$

(SI PUÒ ESPRIMERE MEDIANTE I LOGARITMI)

L'INVERSA DELLA RESTRIZIONE DI $x = \cosh t$ ALL'INTERVALLO $[0, +\infty)$ È $t = \operatorname{sett\,cosh} x$

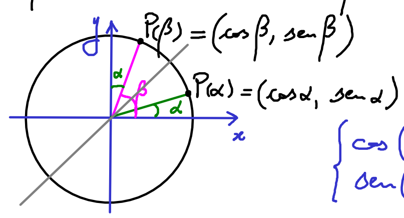
(SI PUÒ ESPRIMERE MEDIANTE I LOGARITMI)

VE 04 NOV 2022

PRINCIPALI FORMULE DI TRIGONOMETRIA

VALORI COMPLEMENTARI DELL'ARGOMENTO:

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ TALI CHE $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$

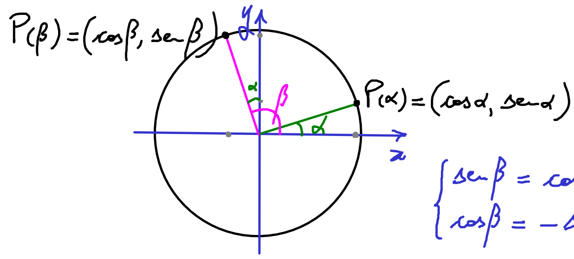


$$\begin{cases} \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha \end{cases}$$

ESERCIZIO: VALORI SUPPLEMENTARI. POSTO $\alpha+\beta=\pi$, ESPRIMERE $\operatorname{sen}\beta, \cos\beta$ MEDIANTE $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha$

VALORI DI α, β SFASATI DI $\dfrac{\pi}{2}$: $\beta = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$



$$\begin{cases} \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha \\ \cos\beta = -\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

ESERCIZIO: TROVARE $\operatorname{sen}(\alpha+\pi)$ E $\cos(\alpha+\pi)$ A PARTIRE DA $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha$.

NOTA: LE UNICHE APPLICAZIONI LINEARI $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SONO $Lx = mx$, CON $m \in \mathbb{R}$. LE FUNZIONI CIRCOLARI, ESPONENZIALI, LOGARITMICHE NON SONO LINEARI. IN PARTICOLARE, L'UGUAGLIANZA $\operatorname{sen} \lambda x = \lambda \operatorname{sen} x$ NON VALE, IN GENERALE, E NEMMENO $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$

ESERCIZIO: DIMOSTRARLO.

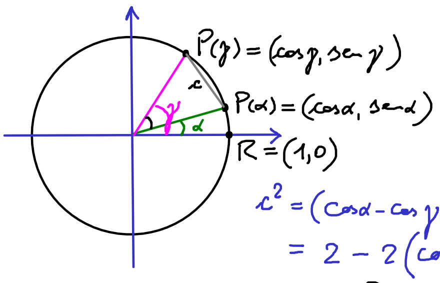
VALGONO LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\gamma) = \operatorname{sen} \cos\gamma - \cos\alpha \operatorname{sen}\gamma$$

(L'UNA SEGUE DALL'ALTRA PERCHÉ $\cos\alpha$ È PARI, E $\operatorname{sen}\alpha$ È DISPARI).

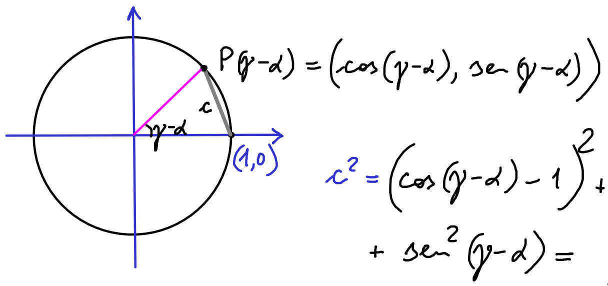
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha-\gamma) = \cos\alpha \cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma$$

DIMOSTRIAMO QUEST'ULTIMA SEGUENDO M. BRAMANTI, PRECALCULUS:



$$c^2 = (\cos\alpha - \cos\gamma)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\gamma)^2 =$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma)$$

DOPO UNA ROTAZIONE CHE PORTA $P(\alpha)$ IN R TROVIAMO:



$$c^2 = (\cos(\gamma-\alpha) - 1)^2 +$$
$$+ \operatorname{sen}^2(\gamma-\alpha) =$$
$$= 2 - 2\cos(\gamma-\alpha)$$

DUNQUE

$$\cos(\gamma-\alpha) = \cos\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

LE FORMULE PER IL SENO SI OTTENGONO, AD ESEMPIO, SCRIVENDO $\operatorname{sen}(\gamma-\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\gamma-\alpha)\right)$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)+\alpha\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\cos\alpha - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\operatorname{sen}\alpha =$$
$$= \operatorname{sen}\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\operatorname{sen}\alpha$$

VE 04 NOV 2022

CONSEGUENZA: POSTO $\alpha=\beta$ TROVIAMO $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ E $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, QUINDI

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

NOTIAMO L'IDENTITÀ $1+\operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

DA CUI OTTENIAMO

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

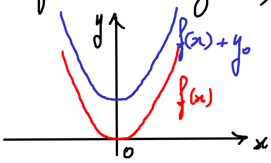
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right) =$$
$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

OPERAZIONI SUI GRAFICI

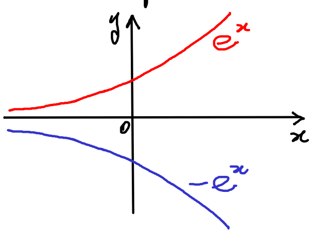
1) TRASLAZIONE NELLA DIREZIONE DELL'ASSE DELLE ASCISSE: TRASFORMA IL GRAFICO DI $f(x)$ NEL GRAFICO DI $f(x-x_0)$, CON $x_0 \in \mathbb{R}$ FISSATO

2) TRASLAZIONE NELLA DIREZIONE DELL'ASSE DELLE ORDINATE: TRASFORMA IL GRAFICO DI $f(x)$ IN QUELLO DI $f(x)+y_0$, CON $y_0 \in \mathbb{R}$ FISSATA. ESEMPIO: $f(x)=x^2$, $y_0=1$,

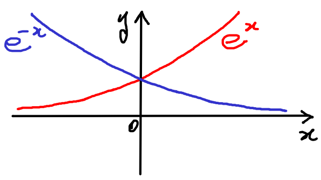
$f(x)+y_0 = x^2+1$



3) RIFLESSIONE RISPETTO ALL'ASSE x: CAMBIA IL GRAFICO DI $f(x)$ IN QUELLO DI $-f(x)$. ESEMPIO:



4) RIFLESSIONE RISPETTO ALL'ASSE y: CAMBIA IL GRAFICO DI $f(x)$ IN QUELLO DI $f(-x)$. ESEMPIO:



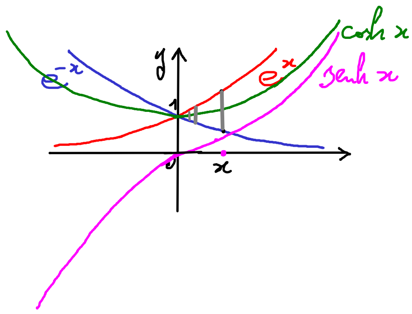
VE 04 NOV 2022

5) TRACCIAMO IL GRAFICO DELLE FUNZIONI

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

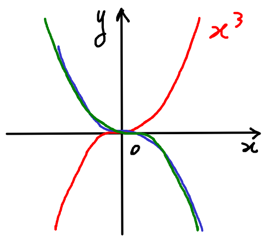
$$\text{E } \cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

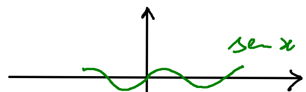
$\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$



OSSERVAZIONE: 1. DATA $f(x)$ PARI, LA RIFLESSA RISPETTO ALL'ASSE y È $f(-x)=f(x)$ CIOÈ È LA STESSA FUNZIONE; 2. DATA $f(x)$ DISPARI, LA RIFLESSA RISPETTO ALL'ASSE x È $-f(x) = f(-x)$

E CIOÈ È UGUALE ALLA RIFLESSA RISPETTO ALL'ASSE y.





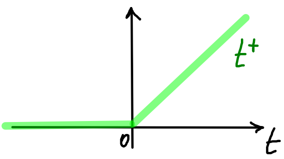
È DISPARI E INVADE TUTTI I QUADRANTI

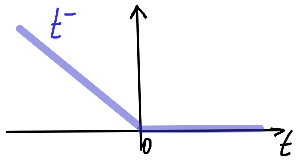
FUNZIONI DEFINITE A TRATTI

1) IL VALORE ASSOLUTO $|t| = \begin{cases} t, & \text{se } t \geq 0 \\ -t, & \text{se } t < 0 \end{cases}$

2) LA PARTE POSITIVA $t^+ = \dfrac{|t|+t}{2} = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

LA PARTE NEGATIVA $t^- = \dfrac{|t|-t}{2} = \begin{cases} 0, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases}$





SI VEDE CHE
$$t^+ + t^- = |t|$$
$$t^+ - t^- = t$$

3) LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI UN INSIEME $S \subset \mathbb{R}$:

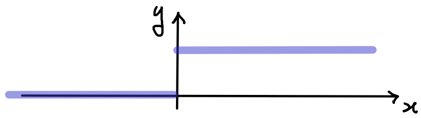
$$\chi_S(x) = \mathbb{1}_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus S \end{cases}$$

CHI

ESEMPIO: S UN INTERVALLO, TIPO $S = (0, +\infty)$:

$$\chi_{(0,+\infty)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

GRADINO DI HEAVISIDE



ESEMPIO: $S = \mathbb{Q}$, $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

FUNZIONE DI DIRICHLET

FORMULE DI WERNER (PER ESPRIMERE PRODOTTI DI SENI O COSENI). SAPPIAMO CHE

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

SOTTRAENDO LA SECONDA DALLA PRIMA SI OTTIENE

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

SOMMANDOLE, INVECE, SI TROVA

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

PARTENDO ORA DALLE FORMULE

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

E SOMMANDOLE, SI TROVA

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right)$$

FORMULE DI PROSTAFERESI PER ESPRIMERE SOMME E DIFFERENZE DI SENI O COSENI:

SI APPLICA LA TRASFORMAZIONE $\begin{cases} p = \alpha+\beta \\ q = \alpha-\beta \end{cases}$

DA $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ A $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ LA CUI INVERSA È $\begin{cases} \alpha = \dfrac{p+q}{2} \\ \beta = \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$ E SI OTTIENE

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \underset{E}{\operatorname{sen}} \frac{p+q}{2} \underset{O}{\cos} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \underset{O}{\cos} \frac{p+q}{2} \underset{E}{\operatorname{sen}} \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \underset{O}{\cos} \frac{p+q}{2} \underset{O}{\cos} \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \underset{E}{\operatorname{sen}} \frac{p+q}{2} \underset{E}{\operatorname{sen}} \frac{p-q}{2}$$