

# INTRODUZIONE ALL'ANALISI NON LINEARE – A.A. 2022/2023

## READING COURSE

ANTONIO IANNIZZOTTO

Versione del 21 ottobre 2022

### 1. OBIETTIVI

Gli obiettivi formativi del corso sono i seguenti:

- 1. Conoscenza e capacità di comprensione.** Lo studente verrà introdotto all'analisi funzionale non lineare, articolata in teoria dei punti critici e teoria del grado.
- 2. Capacità applicative.** Lo studente applicherà i metodi variazionali e topologici alle equazioni alle derivate parziali ellittiche non lineari con condizioni di Dirichlet.
- 3. Autonomia di giudizio.** Lo studente imparerà a distinguere le classi principali di equazioni ellittiche e a selezionare per ciascuna classe la migliore strategia risolutiva.
- 4. Abilità nella comunicazione.** Frequentando il corso, confrontandosi con i testi consigliati (in italiano e in inglese), e preparando la prova di verifica, lo studente acquisterà familiarità con il linguaggio formale dell'analisi avanzata e imparerà ad esporre i risultati in modo rigoroso e sintetico.
- 5. Capacità di apprendere.** Lo studente sarà avviato, a causa della modalità del corso, verso uno studio autonomo e creativo: sulla base di alcuni esempi significativi e con opportune indicazioni bibliografiche, potrà estendere in modo indipendente la propria conoscenza dell'analisi non lineare a casi più generali o complessi.

### 2. PREREQUISITI

Saranno date per acquisite le seguenti nozioni: spazi di Hilbert, spettro di un operatore lineare, spazi di Sobolev, teoria delle equazioni alle derivate parziali ellittiche lineari.

### 3. CONTENUTI

Il programma del corso si articola in due moduli:

#### • Modulo I

- 1. Teoria dei punti critici.** Calcolo differenziale in spazi di Hilbert; metodi diretti del calcolo delle variazioni; principio variazionale di Ekeland; metodi di min-max; lemma di deformazione; condizione di Palais-Smale; teorema del passo di montagna; teorema dei tre punti critici; teorema del punto di sella; teoria di Morse; gruppi critici; indice di Morse; relazioni fondamentali.
- 2. Teoria del grado.** Grado di Brouwer; teorema del punto fisso di Brouwer; lemma di Amann; grado topologico per operatori monotoni; invarianza per omotopie; grado di un operatore gradiente; teorema di Rabinowitz.

#### • Modulo II

- 3. Il problema di Dirichlet non lineare.** Soluzioni deboli; stime a priori; regolarità; principi del massimo e del confronto; autovalori e autofunzioni; formule di Courant-Fischer.

4. **Metodi variazionali.** Funzionale dell'energia; esistenza per problemi sublineari; esistenza per problemi asintoticamente lineari mediante confronto con gli autovalori o calcolo dei gruppi critici; condizione di Ambrosetti-Rabinowitz; esistenza per problemi superlineari; molteplicità mediante identità di Morse.
5. **Metodi topologici.** Operatore del problema di Dirichlet; studio della monotonia e della compattezza; esistenza mediante grado topologico; confronto con i metodi variazionali; molteplicità; reazioni concavo-convesse, logistiche.

#### 4. METODI DIDATTICI

Il reading course (3+3 CFU) prevede 6 ore di lezioni frontali introduttive, seguite da attività di studio individuale o di gruppo. Allo studente sarà fornito il materiale di studio, e il docente fisserà diversi appuntamenti per chiarimenti e approfondimenti.

#### 5. VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

La verifica consiste in una dissertazione scritta (tesina) o orale (seminario) su un argomento a scelta dello studente, integrata da un colloquio con domande teoriche ed esercizi. Ogni prova sarà valutata con un voto in trentesimi, e il voto finale sarà calcolato come media aritmetica fra i voti delle singole prove. L'esame si riterrà superato se il voto finale è compreso fra 18/30 e 30/30, mentre la lode verrà attribuita in caso di prove eccellenti.

#### 6. TESTI

1. D. Motreanu, V.V. Motreanu, N.S. Papageorgiou, Topological and variational methods with applications to nonlinear boundary value problems, Springer (2014)
2. P.H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, AMS (1986)
3. A. Iannizzotto, Introduzione all'analisi non lineare (dispense)

#### 7. ALTRE INFORMAZIONI

Sul sito del docente verranno gradualmente rese disponibili le note del corso e altro materiale didattico. Il nostro Ateneo fornisce supporto agli studenti affetti da disturbi specifici dell'apprendimento (DSA). *Tutta l'attività didattica e di verifica si svolgerà in presenza.*