



Università degli Studi di Cagliari

UNICA
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI CAGLIARI

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2022/23

Structural Stability and Limit Analysis of Structures

(Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

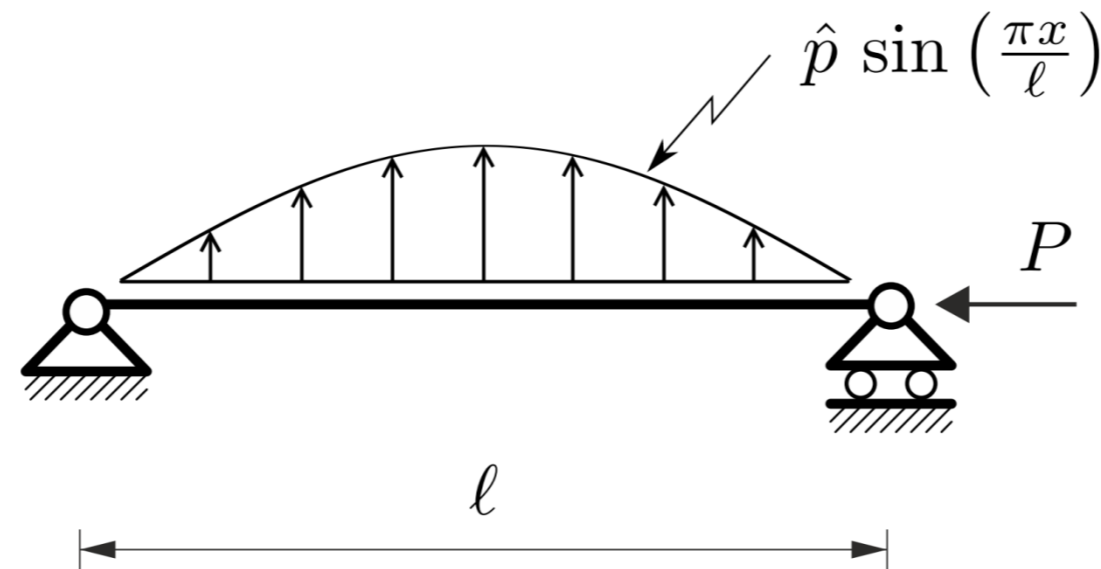
> **Lezione 6**

Elastick buckling of plane beams
(Buckling elastico dei sistemi piani di travi)

Victor Eremeev

victor.eremeev@unica.it

Trave appoggiata sovrapposta a carico trasversale sinusoidale



$$EI v'''' + P v'' = \hat{p} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad x \in (0, l)$$

Se le condizioni al contorno sono di semplice appoggio, deve essere:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & EI v''(0) &= 0, \\ v(l) &= 0, & EI v''(l) &= 0 \end{aligned}$$

In questo caso, la soluzione può essere trovata 'per ispezione' come:

$$v = \hat{v} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$



Le condizioni al contorno, infatti, sono da questa soddisfatte, e l'equazione di campo si riduce ad algebrica nell'ampiezza incognita \hat{v} :

$$\left(\frac{EI \pi^4}{\ell^4} - \frac{P \pi^2}{\ell^2} \right) \hat{v} = \hat{p}$$

La soluzione è dunque:

$$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{\frac{EI \pi^4}{\ell^4} - \frac{P \pi^2}{\ell^2}} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_c}} \frac{\hat{p}}{\frac{\pi^4 EI}{\ell^4}} =: \alpha \hat{v}_I$$

dove $P_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ è il carico critico,

$$\hat{v}_I := \frac{\hat{p}}{\frac{\pi^4 EI}{\ell^4}}$$

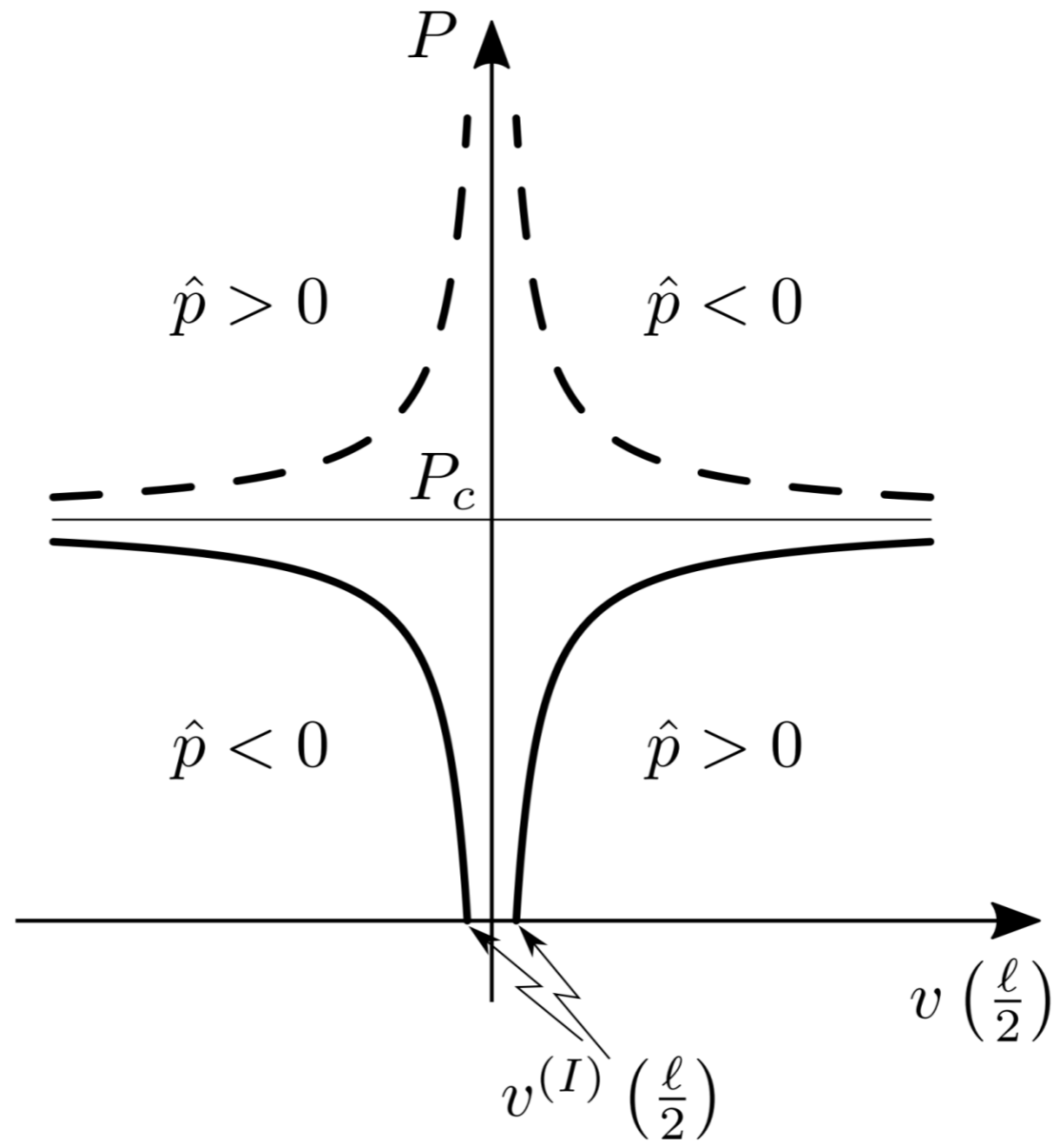
$$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{\frac{EI \pi^4}{\ell^4} - \frac{P \pi^2}{\ell^2}} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_c}} \frac{\hat{p}}{\frac{\pi^4 EI}{\ell^4}} =: \alpha \hat{v}_I$$

è l'ampiezza della risposta secondo la teoria lineare (o del primo ordine, in cui si trascurano gli effetti geometrici), ed inoltre:

$$\alpha := \frac{1}{1 - \frac{P}{P_c}}$$

è un *fattore di amplificazione*, maggiore di 1 se $P \leq P_c$. In definitiva, la soluzione si scrive:

$$v(x) = \alpha \hat{v}_I \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) =: \alpha v_I(x)$$



Trave appoggiata soggetta a carico trasversale generico

Si considera ancora una trave appoggiata, ma soggetta a carico trasversale generico $p(x)$. L'equazione di equilibrio si scrive:

$$EI v'''' + P v'' = p(x), \quad x \in (0, \ell)$$

$$v(0) = 0, \quad EI v''(0) = 0,$$

$$v(\ell) = 0, \quad EI v''(\ell) = 0$$

Si assume che il carico sia sviluppabile in serie di Fourier:

$$p(x) = \sum_{k=1}^n \hat{p}_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

dove \hat{p}_k sono i coefficienti della serie, espressi da:

$$\hat{p}_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} p(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx$$



In analogia a quanto fatto per il caso di una sola armonica, si cerca una soluzione del tipo:

$$v = \sum_{k=1}^n \hat{v}_k \sin \left(\frac{k\pi x}{\ell} \right)$$

da cui, sostituendo nell'equazione di equilibrio e uguagliando a zero i coefficienti delle stesse armoniche, si ottiene:

$$v(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \hat{v}_{Ik} \sin \left(\frac{k\pi x}{\ell} \right)$$

dove:

$$\alpha_k := \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}}$$
$$\hat{v}_{Ik} := \frac{\hat{p}_k}{\frac{k^4 \pi^4 EI}{\ell^4}}$$



e $P_k = \frac{k^2 \pi^2 EI}{\ell^2}$ è il k -esimo carico critico. È importante osservare che siccome $P_{k+1} > P_k$, $k = 1, \dots, n$, i fattori di amplificazione decrescono con k . Da questa osservazione segue che:

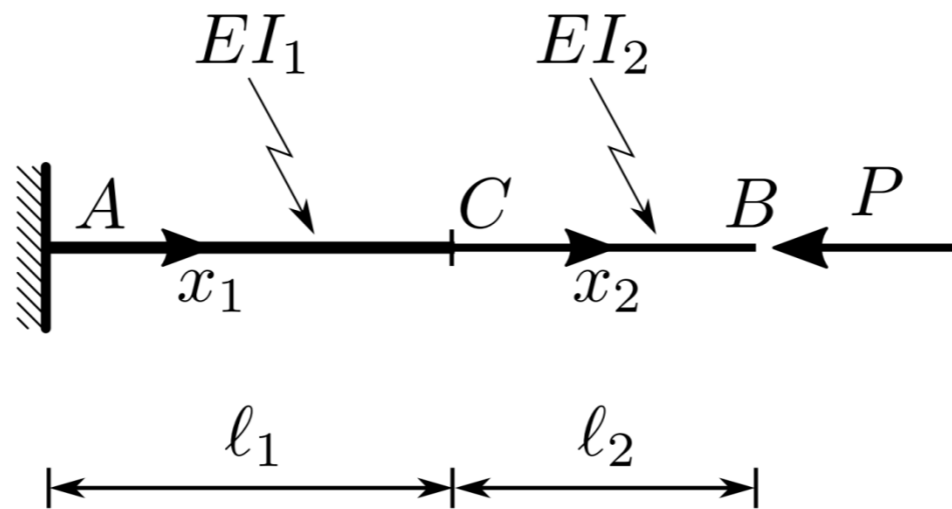
$$v(x) < \alpha_1 \sum_{k=1}^n \hat{v}_{Ik} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) = \alpha_1 v_I(x)$$

e quindi, in un'ottica cautelativa, si può effettuare la seguente *maggiorazione*:

$$v(x) \simeq \alpha_1 v_I(x)$$

Travi di rigidezza variabile a tratti

Molto spesso la rigidezza delle travi non è costante sulla lunghezza, ma è variabile a tratti; è cioè $EI(x) = EI_i = \text{cost}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), in sotto-intervalli \mathcal{I}_i del dominio $(0, \ell)$.



Le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$EI_1 v_1'''' + P v_1'' = 0, \quad x_1 \in (0, \ell_1)$$

$$EI_2 v_2'''' + P v_2'' = 0, \quad x_2 \in (0, \ell_2)$$

Le condizioni al contorno agli estremi A, B della trave sono quelle classiche di incastro e di estremo libero, rispettivamente; le condizioni nel punto singolare C esprimono la continuità degli spostamenti e l'equilibrio dell'elemento infinitesimo di trave a cavallo dei due intervalli. Esse si scrivono:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0, & v_1'(0) &= 0, \\ M_2(\ell_2) &= 0, & V_2(\ell_2) &= 0, \\ v_1(\ell_1) &= v_2(0), & v_1'(\ell_1) &= v_2'(0), \\ M_1(\ell_1) &= M_2(0), & V_1(\ell_1) &= V_2(0) \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} M_i(x_i) &= EI_i v_i''(x_i), \\ T_i(x_i) &= -EI_i v_i'''(x_i), & i &= 1, 2 \\ V_i(x_i) &= T_i(x_i) - P v_i'(x_i), \end{aligned}$$

L'integrale generale

$$v_1(x_1) = c_1 \cos(\beta_1 x_1) + c_2 \sin(\beta_1 x_1) + c_3 x_1 + c_4,$$

$$v_2(x_2) = c_5 \cos(\beta_2 x_2) + c_6 \sin(\beta_2 x_2) + c_7 x_2 + c_8$$

dove c_j , $j = 1, \dots, 8$, sono costanti arbitrarie e

$$\beta_i^2 = \frac{P}{EI_i}, \quad i = 1, 2$$

Imponendo le condizioni al contorno si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2^2 C_2 & -\beta_2^2 S_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2^2 & 0 & 0 \\ C_1 & S_1 & \ell_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\beta_1 S_1 & \beta_1 C_1 & 1 & 0 & 0 & -\beta_2 & -1 & 0 & 0 \\ -\beta_2^2 C_1 & -\beta_2^2 S_1 & 0 & 0 & \beta_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2^2 & 0 & 0 & 0 & \beta_2^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $C_i := \cos(\beta_i \ell_i)$, $S_i := \sin(\beta_i \ell_i)$, $i = 1, 2$, da cui si trae l'equazione caratteristica:

$$\tan(\beta_1 \ell_1) \tan(\beta_2 \ell_2) = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

$$\beta_i^2 = \frac{P}{EI_i},$$

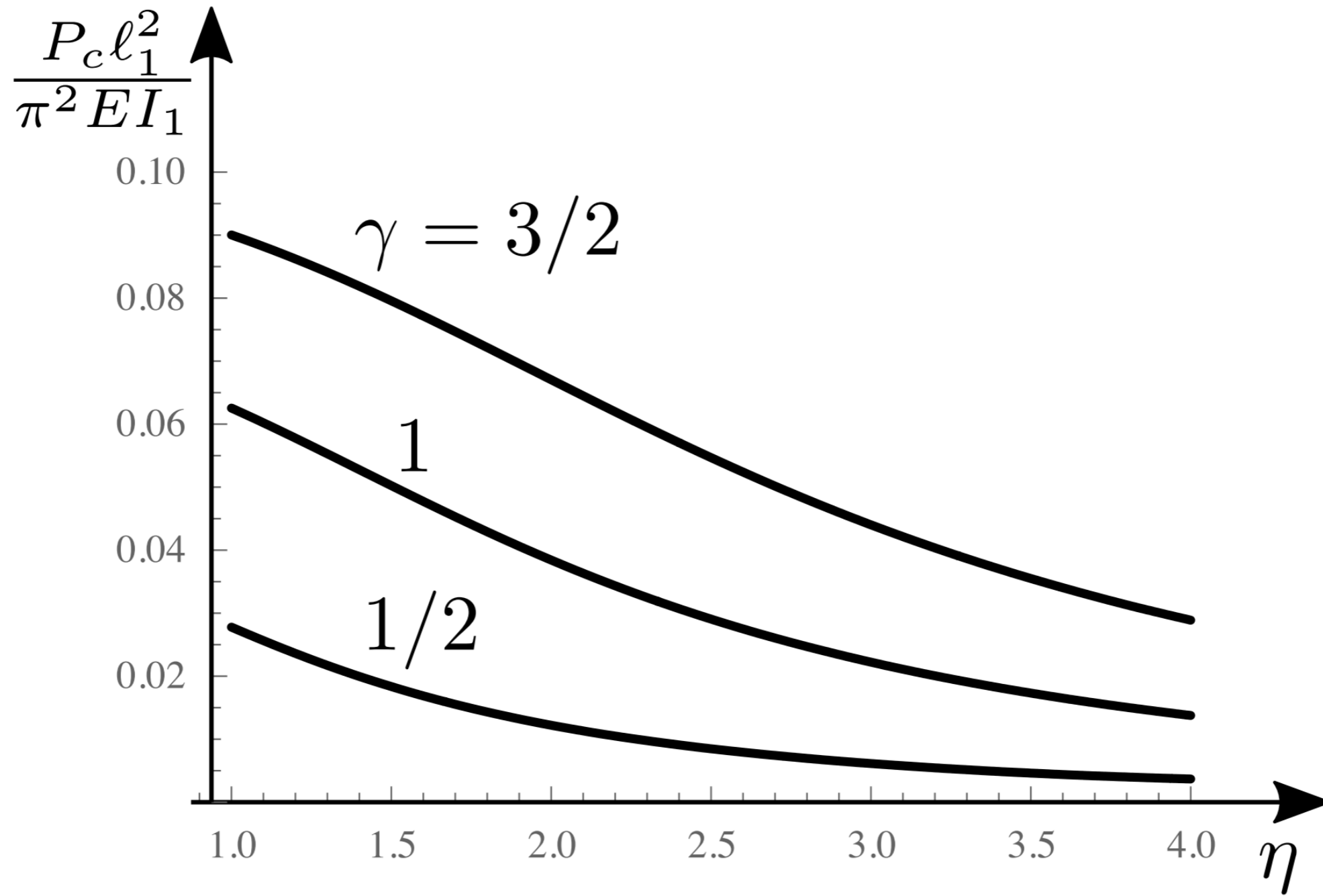
Questa può anche scriversi:

$$\tan(\beta_1 \ell_1) \tan\left(\frac{\eta}{\gamma} \beta_1 \ell_1\right) = \eta$$

dove si sono introdotti i parametri adimensionali:

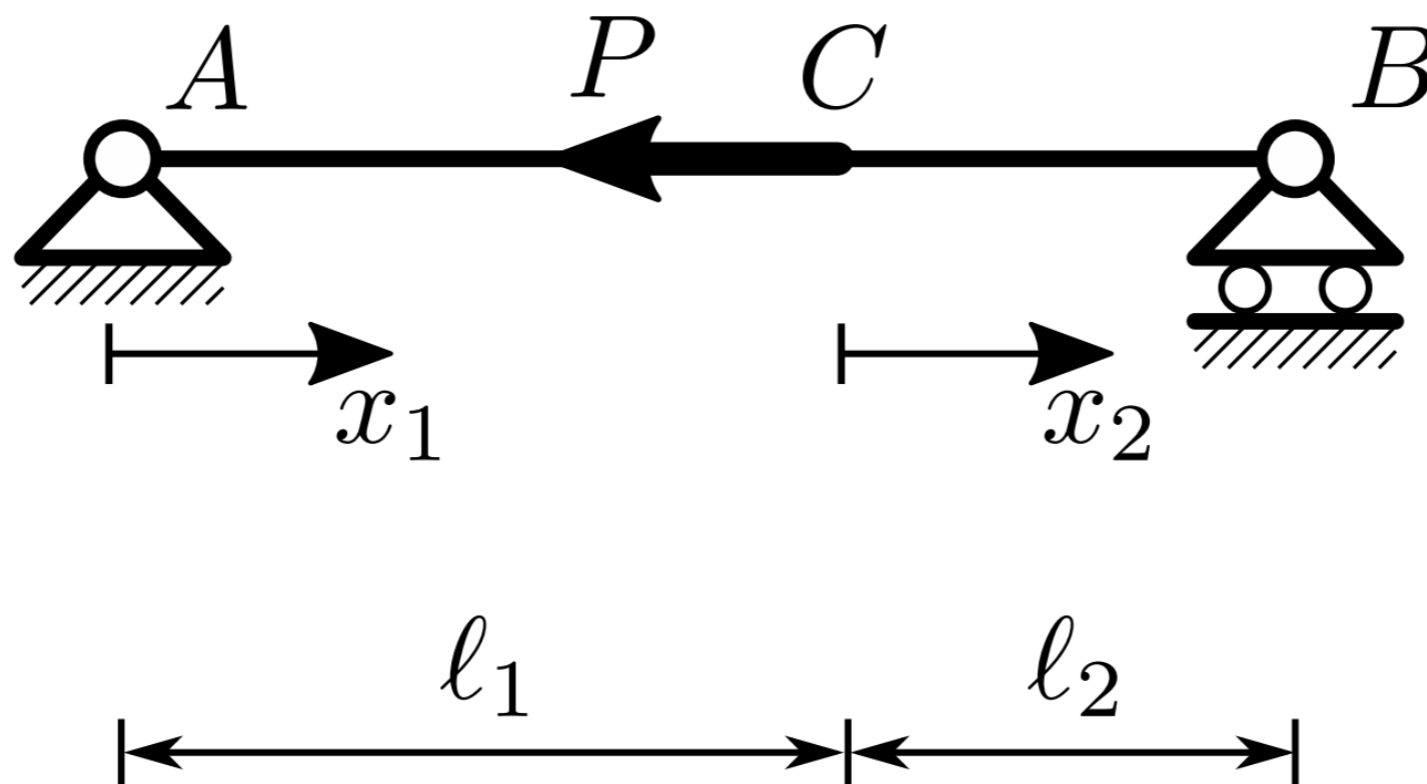
$$\eta := \sqrt{\frac{EI_1}{EI_2}}, \quad \gamma := \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

che definiscono il rapporto di rigidezza η e geometrico γ dei due segmenti di trave. Per una fissata coppia di questi parametri si determina la più piccola radice β_{1c} , e da questa il carico critico $P_c = \beta_{1c}^2 EI_1$.



Trave parzialmente compressa

Si considera una trave appoggiata AB soggetta a forza assiale P applicata in un punto generico C , che divide la trave in due segmenti di lunghezza l_1, l_2 , diretta verso l'appoggio fisso



$$N_0(x) = \begin{cases} -P, & \text{in } x_1 \in (0, \ell_1) \\ 0, & \text{in } x_2 \in (0, \ell_2) \end{cases}$$

$$EI v_1'''' + P v_1'' = 0, \quad x_1 \in (0, \ell_1)$$

$$EI v_2'''' = 0, \quad x_2 \in (0, \ell_2)$$

in cui $v_i(x_i)$ è il campo di spostamento nell' i -esimo sotto-intervallo. Le condizioni al contorno nei punti A, C, B , nell'ordine, si scrivono:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0, & M_1(0) &= 0, \\ v_1(\ell_1) &= v_2(0), & v_1'(\ell_1) &= v_2'(0), \\ M_1(\ell_1) &= M_2(0), & V_1(\ell_1) &= V_2(0), \\ v_2(\ell_2) &= 0, & M_2(\ell_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i(x_i) &= EI v_i''(x_i), \\ T_i(x_i) &= -EI v_i'''(x_i), & i &= 1, 2 \\ V_i(x_i) &= T_i(x_i) + N_{0i} v_i'(x_i), \end{aligned}$$

La soluzione generale del problema omogeneo, posto $\beta^2 := \frac{P}{EI}$, si scrive:

$$v_1(x_1) = c_1 \cos(\beta x_1) + c_2 \sin(\beta x_1) + c_3 x_1 + c_4,$$

$$v_2(x_2) = c_5 + c_6 x_2 + c_7 x_2^2 + c_8 x_2^3$$

è cioè armonica-polinomiale nel tratto compresso, e semplicemente polinomiale nel tratto non presollecitato. Imponendo le condizioni al contorno, si perviene al seguente sistema algebrico nelle otto costanti incognite c_i :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & S & l_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta S & \beta C & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\beta^2 C & -\beta^2 S & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_2 & l_2^2 & l_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $C := \cos(\beta l_1)$ ed $S := \sin(\beta l_1)$.

Il sistema ammette soluzione non banale

se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a zero

$$\left[(\beta l_2)^2 l_2 - 3 (l_1 + 2l_2) \right] \sin (\beta l_1) = 3\beta l_2^2 \cos (\beta l_1)$$

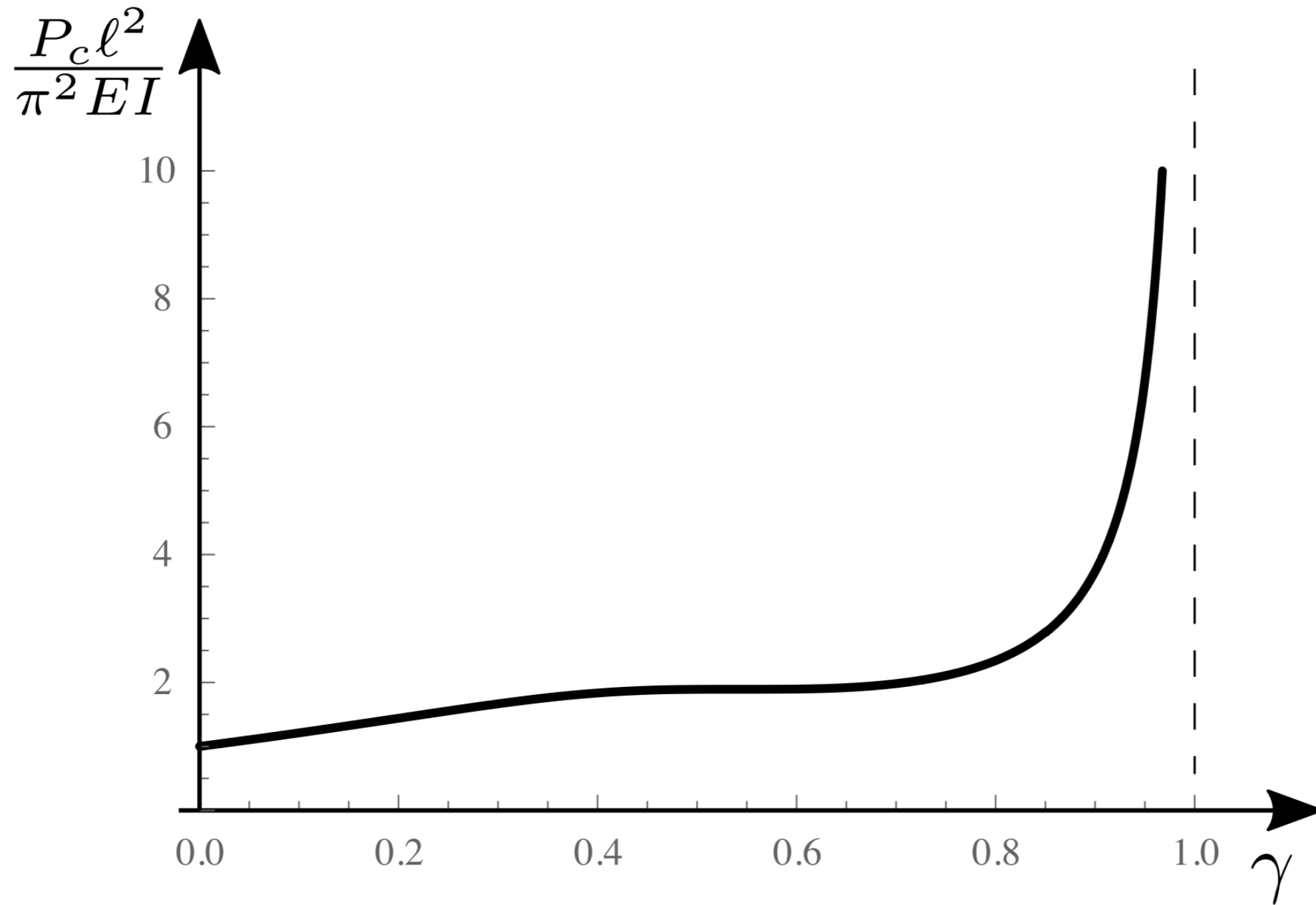
Posto:

$$l = l_1 + l_2, \quad \gamma = l_2/l,$$

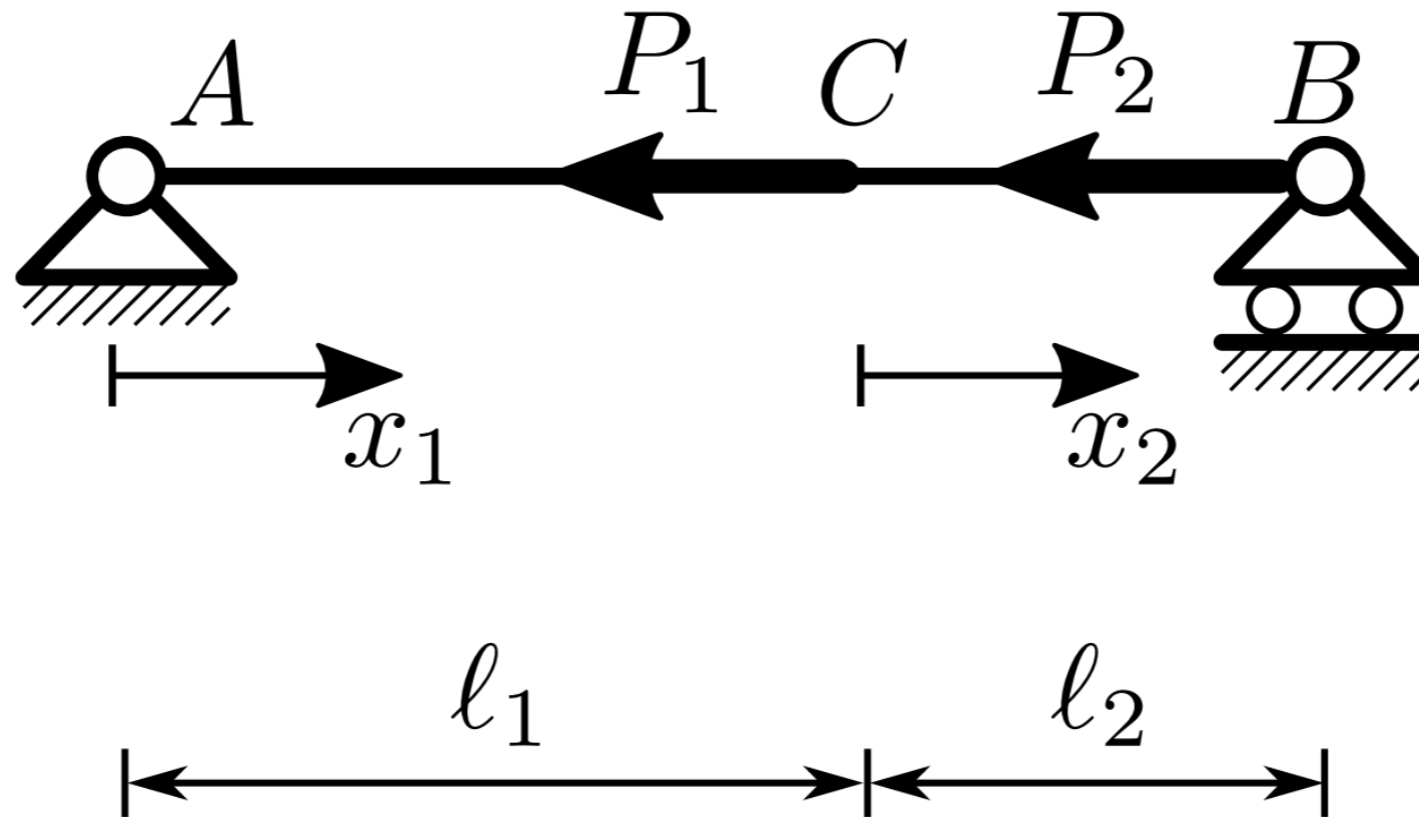
la precedente si scrive:

$$\left[(\beta l)^2 \gamma^3 - 3 (1 + \gamma) \right] \sin ((1 - \gamma) \beta l) = 3 (\beta l) \gamma^2 \cos ((1 - \gamma) \beta l)$$

che costituisce l'equazione caratteristica del problema.



Trave soggetta a forze di compressione indipendenti: il dominio di interazione



$$N_0(x) = \begin{cases} -(P_1 + P_2), & \text{in } x_1 \in (0, l_1) \\ -P_2, & \text{in } x_2 \in (0, l_2) \end{cases}$$

le equazioni di equilibrio

$$EI v_1'''' + (P_1 + P_2) v_1'' = 0, \quad x_1 \in (0, \ell_1)$$

$$EI v_2'''' + P_2 v_2'' = 0, \quad x_2 \in (0, \ell_2)$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0, & M_1(0) &= 0, \\ v_1(\ell_1) &= v_2(0), & v_1'(\ell_1) &= v_2'(0), \\ M_1(\ell_1) &= M_2(0), & V_1(\ell_1) &= V_2(0), \\ v_2(\ell_2) &= 0, & M_2(\ell_2) &= 0 \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} M_i(x_i) &= EI v_i''(x_i), \\ T_i(x_i) &= -EI v_i'''(x_i), & i &= 1, 2 \\ V_i(x_i) &= T_i(x_i) + N_{0i} v_i'(x_i), \end{aligned}$$

Posto:

$$\beta_1^2 := \frac{P_1}{EI}, \quad \beta_2^2 := \frac{P_2}{EI}$$

la soluzione generale del problema omogeneo si scrive:

$$v_1(x_1) = c_1 \cos\left(\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} x_1\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} x_1\right) + c_3 x_1 + c_4,$$

$$v_2(x_2) = c_5 \cos(\beta_2 x_2) + c_6 \sin(\beta_2 x_2) + c_7 x_2 + c_8$$

$$l = l_1 + l_2,$$

$$\alpha_i := \beta_i l, \quad i = 1, 2$$

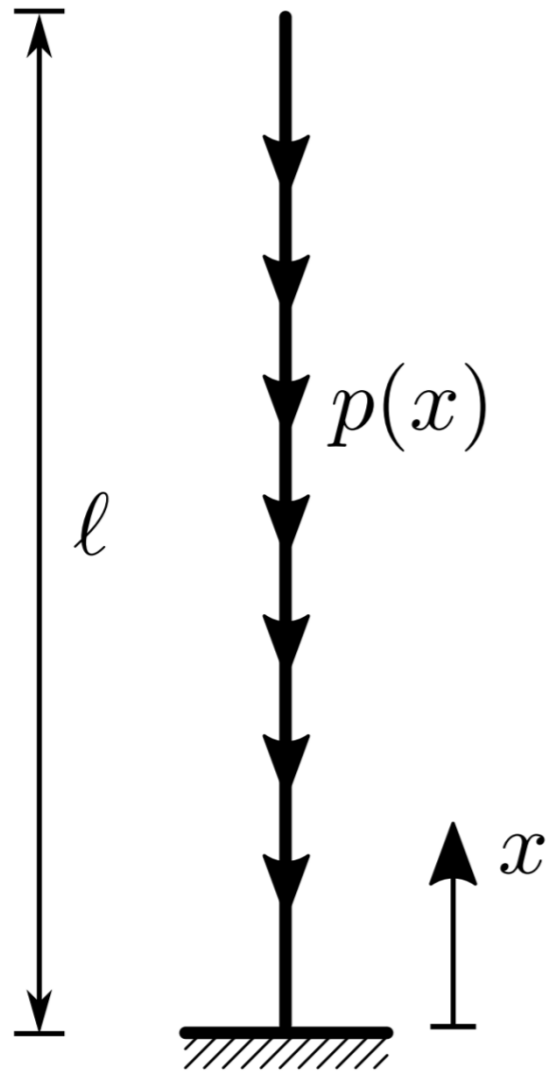
$$\gamma := \frac{l_2}{l}$$

La equazione caratteristica

si scrive:

$$\begin{aligned} & \alpha_2^2 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} (\alpha_1^2 \gamma + \alpha_2^2) \sin(\alpha_2 \gamma) \cos\left(\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} (1 - \gamma)\right) \\ & + \sin\left(\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} (1 - \gamma)\right) \alpha_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) (\alpha_1^2 \gamma + \alpha_2^2) \cos(\alpha_2 \gamma) \\ & - \sin\left(\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} (1 - \gamma)\right) \alpha_1^4 \sin(\alpha_2 \gamma) = 0 \end{aligned}$$

Travi soggette a forze assiali distribuite



uno sforzo normale

$$N_0(x) = - \int_x^l p(x) dx$$

L'energia potenziale totale, si scrive dunque:

$$\Pi = \int_0^\ell \left(\frac{1}{2} EI v''^2 + \frac{1}{2} N_0(x) v'^2 \right) dx$$

Imponendo la stazionarietà dell'EPT si ricava l'equazione di equilibrio:

$$EI v'''' - (N_0(x) v')' = 0 \quad x \in (0, \ell)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v'(0) &= 0, \\ EI v''(\ell) &= 0, & -EI v'''(\ell) &= 0 \end{aligned}$$

in cui si è tenuto conto che $N(\ell) = 0$.

Nel caso particolare in cui $p(x) = p = \text{cost}$, è $N_0(x) = p(x - \ell)$, cosicché l'equazione di equilibrio si scrive:

$$EI v'''' + p\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) v'' - p v' = 0$$

Soluzione in serie di potenze

Si cerca una soluzione nella forma di serie di potenze, del tipo:

$$v(x) = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

con m intero positivo ed a_k costanti, tutti incogniti. Sostituendo la precedente espressione nell'equazione di campo, raccogliendo i termini con la stessa potenza di x , ed annullandoli separatamente, si ottiene il seguente set di equazioni:

$$x^{-4} : m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m = 0,$$

$$x^{-3} : a_1 = 0,$$

$$x^{-2} : a_0\beta^2 + a_2(m^2 + 3m + 2) = 0,$$

...

in cui si è posto $\beta := p\ell/EI$. La prima di queste equazioni ammette quattro radici distinte:

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 2, \quad m_4 = 3$$

Le successive, risolte in sequenza, forniscono le costanti a_k (in funzione di m):

$$a_1 = 0,$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{m^2 + 3m + 2}\beta^2,$$

$$a_k = \frac{\frac{m+k-3}{\ell}a_{k-3} - (m+k-2)a_{k-2}}{(m+k)(m+k-1)(m+k-2)}\beta^2, \quad k \geq 3$$

in cui a_0 , essendo arbitraria, si può porre uguale ad 1.

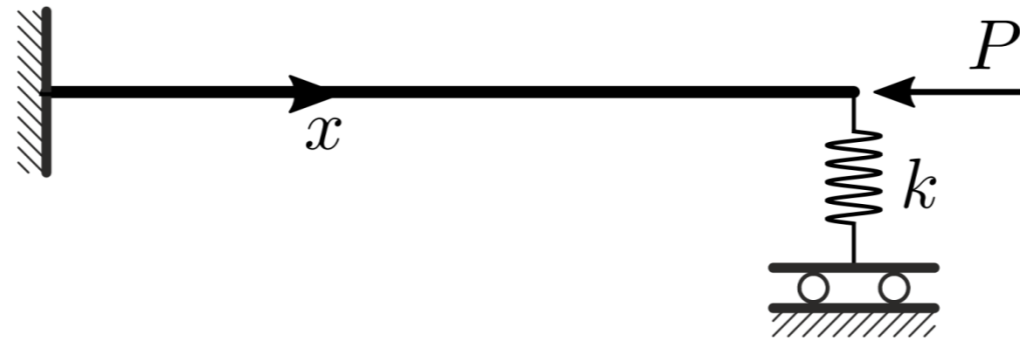
si costruiscono quattro soluzioni indipendenti, la cui combinazione lineare è:

$$v(x) = c_1 \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 x^2 + \dots \right) + c_2 x \left(1 - \frac{1}{6} \beta^2 x^2 + \dots \right) \\ + c_3 x^2 \left(1 - \frac{1}{12} \beta^2 x^2 + \dots \right) + c_4 x^3 \left(1 - \frac{1}{20} \beta^2 x^2 + \dots \right)$$

Imponendo le condizioni geometriche al contorno, si ricava $c_1 = c_2 = 0$; imponendo le condizioni meccaniche, si ottiene un sistema algebrico omogeneo di due equazioni nelle due incognite c_3, c_4 . Tale sistema ammette soluzione diversa da quella banale quando il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a zero. Imponendo questa condizione, si ottiene una equazione caratteristica nell'incognita β , che risolta numericamente fornisce $\beta \ell^2 \simeq 7.83$; quindi, il carico critico è:

$$(p \ell)_c = \frac{7.83 EI}{\ell^2}$$

Travi vincolate elasticamente

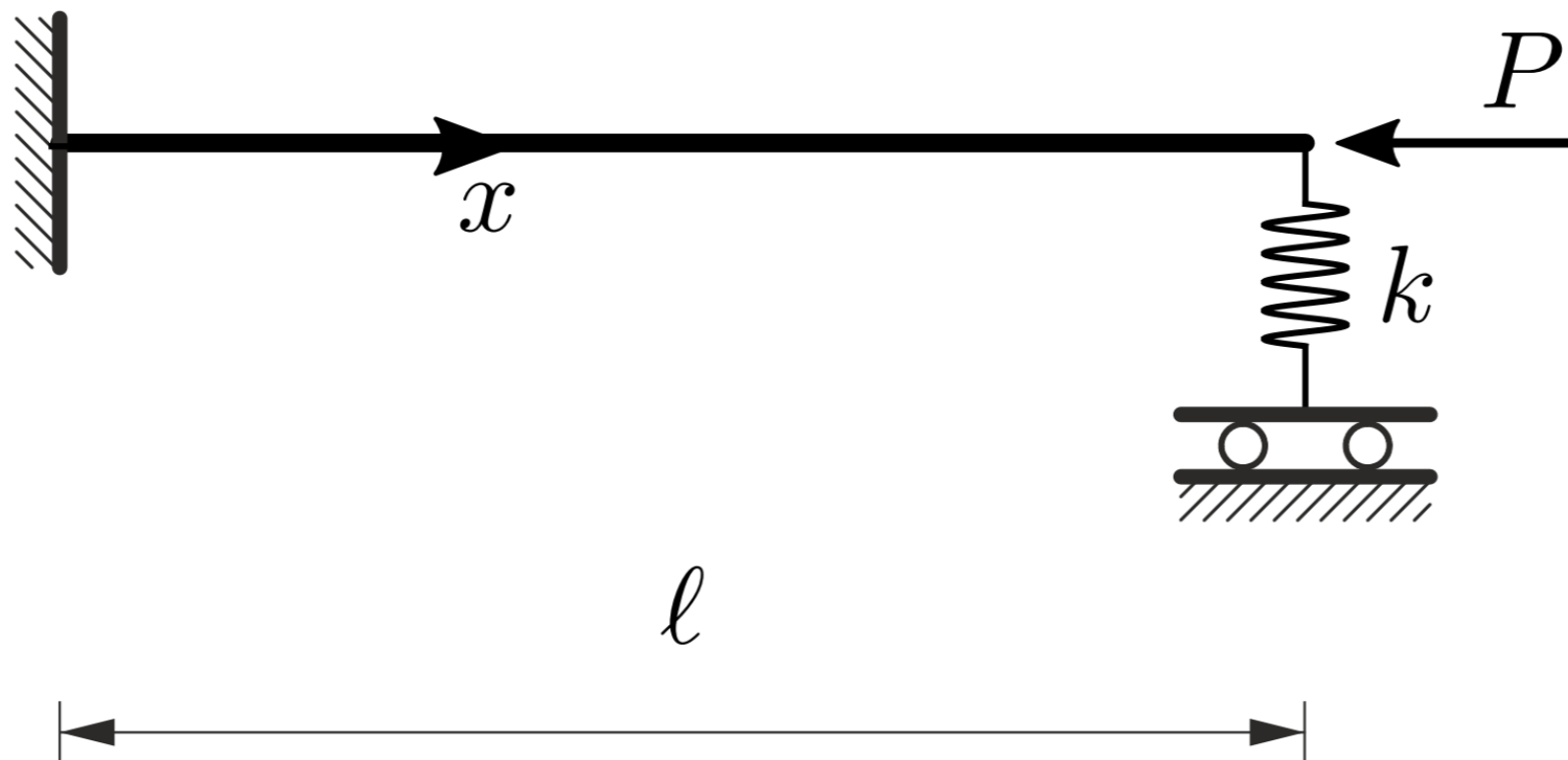


Le condizioni al contorno, peraltro, possono facilmente desumersi dall'equilibrio, senza dover ricorrere alla formulazione variazionale. In particolare:

- se $H = A, B$ è un punto di estremo, la condizione al contorno esprime l'*uguaglianza* della forza trasversale interna *affiorante*, V_H , alla forza (esterna per la trave) $-kv_H$; è cioè $-V_A = -kv_A$, oppure $V_B = -kv_B$;
- se $H = C$ è un punto interno alla trave, la condizione esprime l'*equilibrio* tra le forze trasversali interne V_C^\pm , agenti a destra e sinistra del punto, e la forza elastica esterna esercitata dalla molla, è cioè $V_C^+ - V_C^- - kv_C = 0$. Gli esempi che seguono illustrano la procedura.

Trave con appoggio elastico di estremità

Si consideri una mensola compressa da una forza P applicata all'estremo libero, controventata da un appoggio elastico di rigidezza k applicato nel medesimo punto



$$EI v'''' + P v'' = 0, \quad x \in (0, \ell)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v'(0) &= 0, \\ EI v''(\ell) &= 0, & -EI v'''(\ell) - P v'(\ell) + k v(\ell) &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione generale del problema omogeneo è:

$$v(x) = c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x) + c_3 x + c_4$$

dove $\beta := \sqrt{\frac{P}{EI}}$ è il numero d'onda, e c_i , $i = 1, \dots, 4$, sono costanti arbitrarie. Imponendo le condizioni al contorno, si ottiene il sistema:



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ -\beta^2 \cos(\beta l) & -\beta^2 \sin(\beta l) & l & 1 \\ \frac{k}{EI} \cos(\beta l) & \frac{k}{EI} \sin(\beta l) & \frac{k l}{EI} - \beta^2 & \frac{k}{EI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

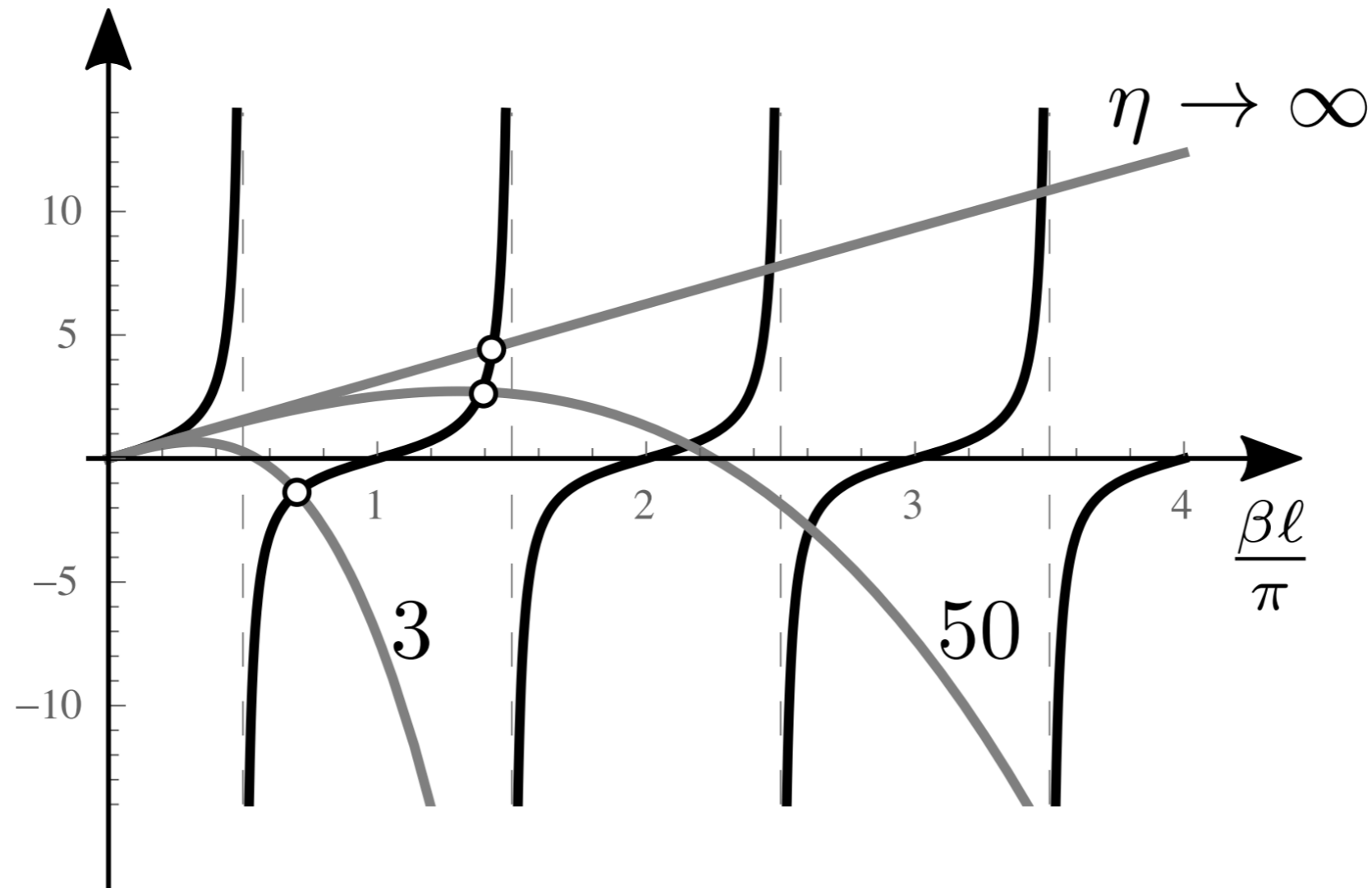
Sviluppando il determinante della matrice dei coefficienti e ponendolo uguale a zero, si ottiene un'equazione (caratteristica) trascendente in β :

$$\tan(\beta l) = \beta l \left[1 - \frac{(\beta l)^2}{\eta} \right]$$

In questa si è introdotto il parametro adimensionale:

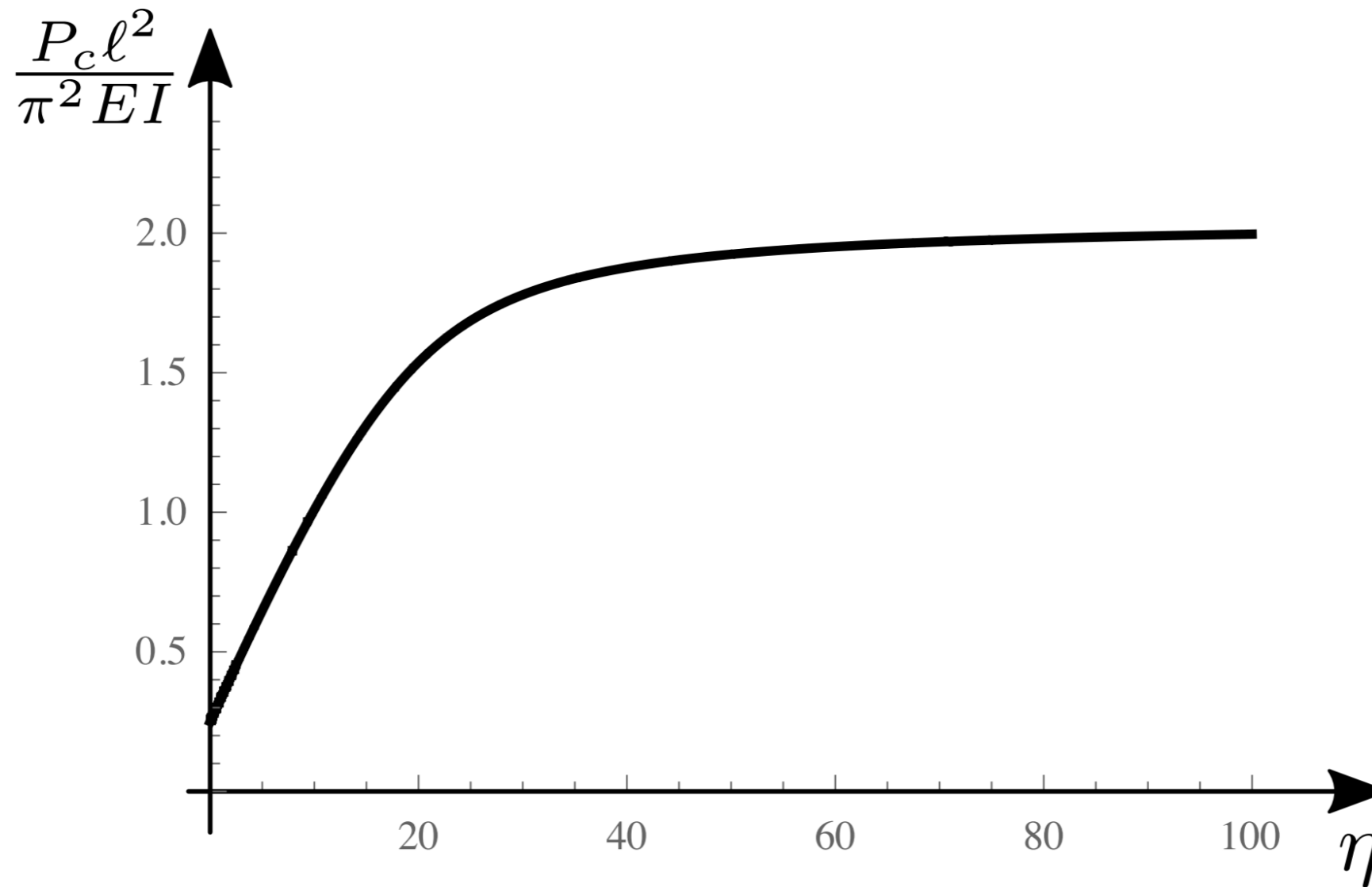
$$\eta := \frac{k l^3}{EI}$$

avente il significato di rapporto tra la rigidezza della molla e quella della trave. Risolta l'equazione trascendente nell'incognita βl , e presa, tra le infinite, la radice più piccola β_{cl} , si determina il carico critico della trave come $P_c = (\beta_{cl})^2 \frac{EI}{l^2}$.

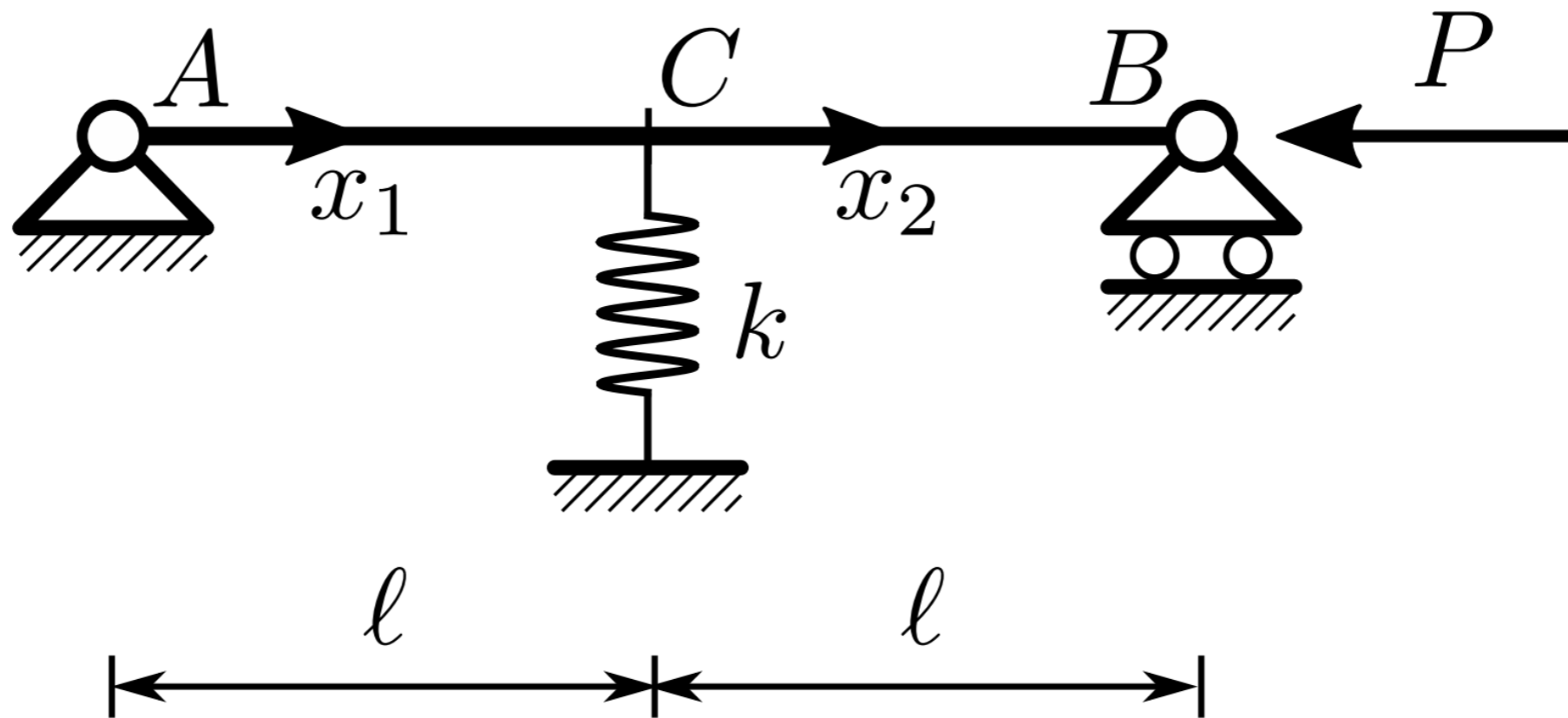


- Se $\eta \rightarrow 0$ (cioè se la molla è molto soffice), allora $\tan(\beta l) \rightarrow -\infty$, per la quale la più piccola radice è $\beta_c = \frac{\pi}{2l}$; si riottiene così il caso della mensola.
- Se $\eta \rightarrow \infty$ (cioè se la molla è molto rigida), allora $\tan(\beta l) = \beta l$, e si riottiene il caso della trave incastro-appoggio, per la quale la più piccola radice è $\beta_c = 1.43 \frac{\pi}{l}$.

La Figura illustra la dipendenza del carico critico dal parametro di rigidità.



Trave con appoggio elastico in campata



Le equazioni di equilibrio, relative ai due sotto intervalli, si scrivono:

$$EI v_1'''' + P v_1'' = 0, \quad x_1 \in (0, \ell)$$

$$EI v_2'''' + P v_2'' = 0, \quad x_2 \in (0, \ell)$$

in cui $v_i(x_i)$ $i = 1, 2$ è lo spostamento, rispettivamente a sinistra ed a destra della singolarità. Le condizioni al contorno nei punti di estremità della trave, A, B , sono le usuali di appoggio; quelle nel punto di mezzzeria C esprimono: (a) la continuità di spostamento e rotazione e, (b) l'equilibrio alla traslazione e alla rotazione dell'elemento infinitesimo di trave vincolato elasticamente. Si ha:

$$v_1(0) = 0, \quad M_1(0) = 0,$$

$$v_2(\ell) = 0, \quad M_2(\ell) = 0,$$

$$v_1(\ell) = v_2(0), \quad v_1'(\ell) = v_2'(0),$$

$$M_1(\ell) = M_2(0), \quad V_1(\ell) + k v_1(\ell) = V_2(0),$$

dove:

$$\begin{aligned}M_i(x_i) &= EI v_i''(x_i), \\T_i(x_i) &= -EI v_i'''(x_i), \quad i = 1, 2 \\V_i(x_i) &= T_i(x_i) - P v_i'(x_i)\end{aligned}$$

L'integrale generale delle si scrive:

$$\begin{aligned}v_1(x_1) &= c_1 \cos(\beta x_1) + c_2 \sin(\beta x_1) + c_3 x_1 + c_4, \\v_2(x_2) &= c_5 \cos(\beta x_2) + c_6 \sin(\beta x_2) + c_7 x_2 + c_8\end{aligned}$$

dove c_j , $j = 1, \dots, 8$, sono costanti arbitrarie e dove $\beta := \sqrt{\frac{P}{EI}}$. Imponendo le condizioni al contorno, si ottiene il seguente sistema algebrico lineare di dimensione 8×8 :



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & S & \ell & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta^2 C & -\beta^2 S & 0 & 0 \\ C & S & \ell & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -\beta S & \beta C & 1 & 0 & 0 & -\beta & -1 & 0 \\ -\beta^2 C & -\beta^2 S & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{EI} C & \frac{k}{EI} S & \frac{k\ell}{EI} - \beta^2 & \frac{k}{EI} & 0 & 0 & \beta^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $C := \cos(\beta\ell)$ ed $S := \sin(\beta\ell)$. Sviluppando il determinante della matrice dei coefficienti, e ponendolo uguale a zero, si ottiene un'equazione trascendente in β :

$$\sin(\beta\ell) \left\{ \sin(\beta\ell) - (\beta\ell) \left[1 - \frac{(\beta\ell)^2}{\eta} \right] \cos(\beta\ell) \right\} = 0$$

in cui si è definito il parametro adimensionale di rigidità:

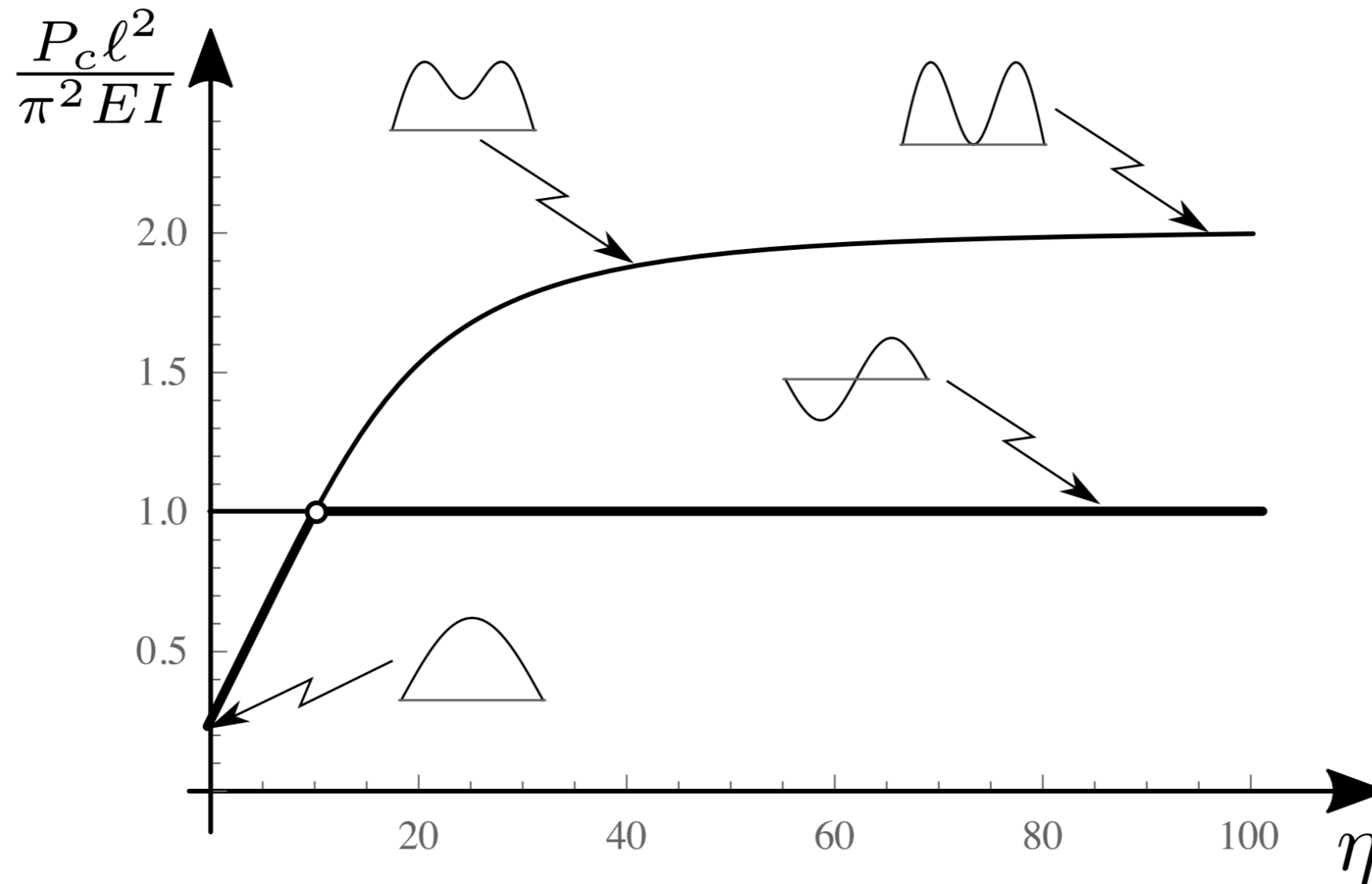
$$\eta := \frac{k\ell^3}{2EI}$$



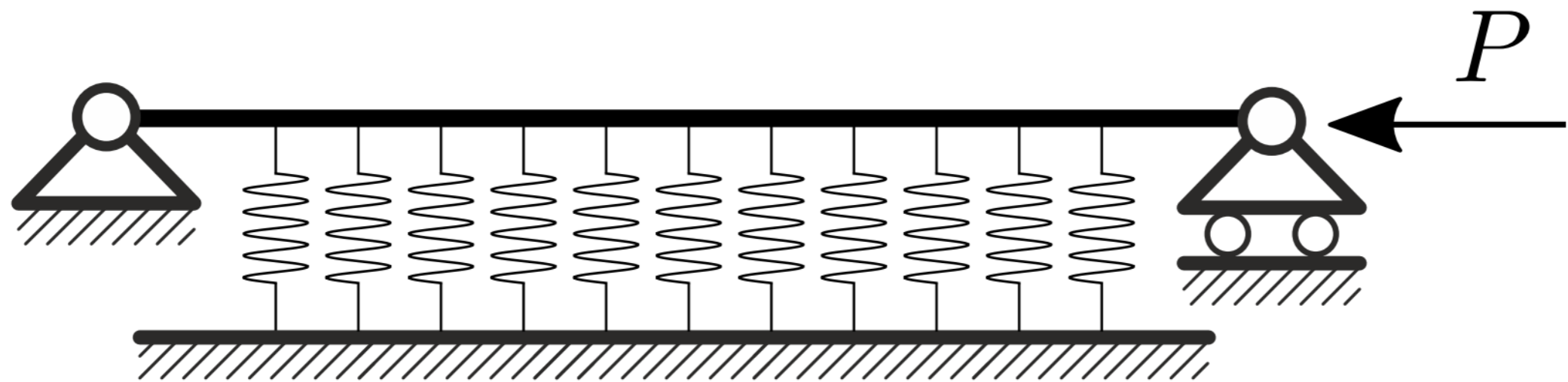
di differenti radici:

$$\sin(\beta l) = 0,$$

$$\tan(\beta l) = (\beta l) \left[1 - \frac{(\beta l)^2}{\eta} \right]$$



Trave su suolo elastico alla Winkler



$$\Pi = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} EA u'^2 - \frac{1}{2} P v'^2 + \frac{1}{2} EI v''^2 + \frac{1}{2} k_f v^2 \right] dx - \int_0^\ell p v dx$$

Imponendo la stazionarietà del funzionale, si ottengono le seguenti equazioni di equilibrio in termini di spostamento:

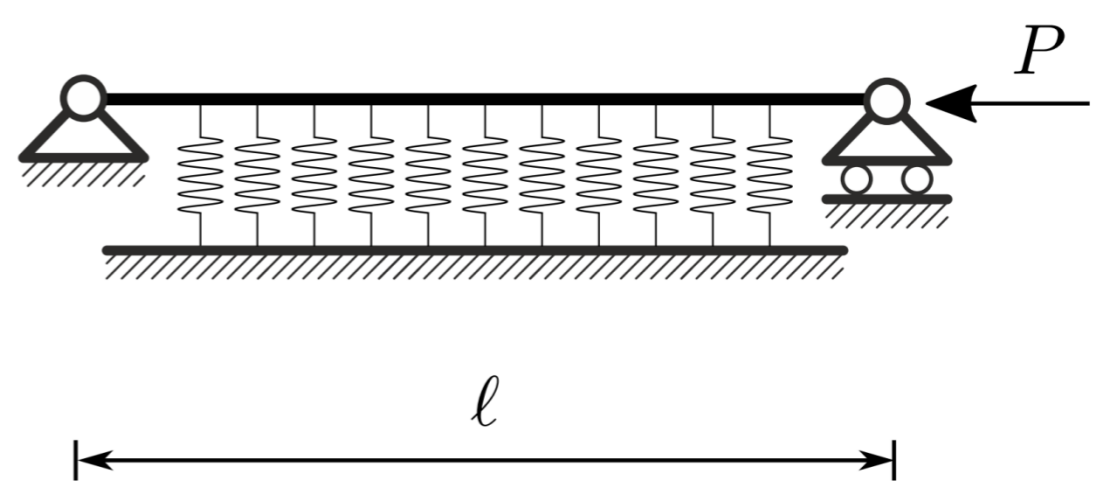
$$\begin{aligned} EA u'' &= 0, & x \in (0, \ell) \\ EI v'''' + P v'' + k_f v &= p, & x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} [EA u' \delta u]_0^\ell &= 0 \\ [(-EI v''' - P v') \delta v]_0^\ell &= 0 \\ [EI v'' \delta v']_0^\ell &= 0 \end{aligned}$$

Trave su suolo elastico semplicemente appoggiata

$$EI v'''' + P v'' + k_f v = 0$$



$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0,$$

$$EI v''(0) = 0, \quad EI v''(l) = 0$$

Si ricerca la soluzione nella forma ‘di tentativo’:

$$v(x) = \hat{v} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$EI \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 - P \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 + k_f = 0$$

$$P_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 EI + \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2 k_f$$

Tra tutti i P_n ha interesse determinare il più piccolo, $P_c := \min\{P_n\}$.

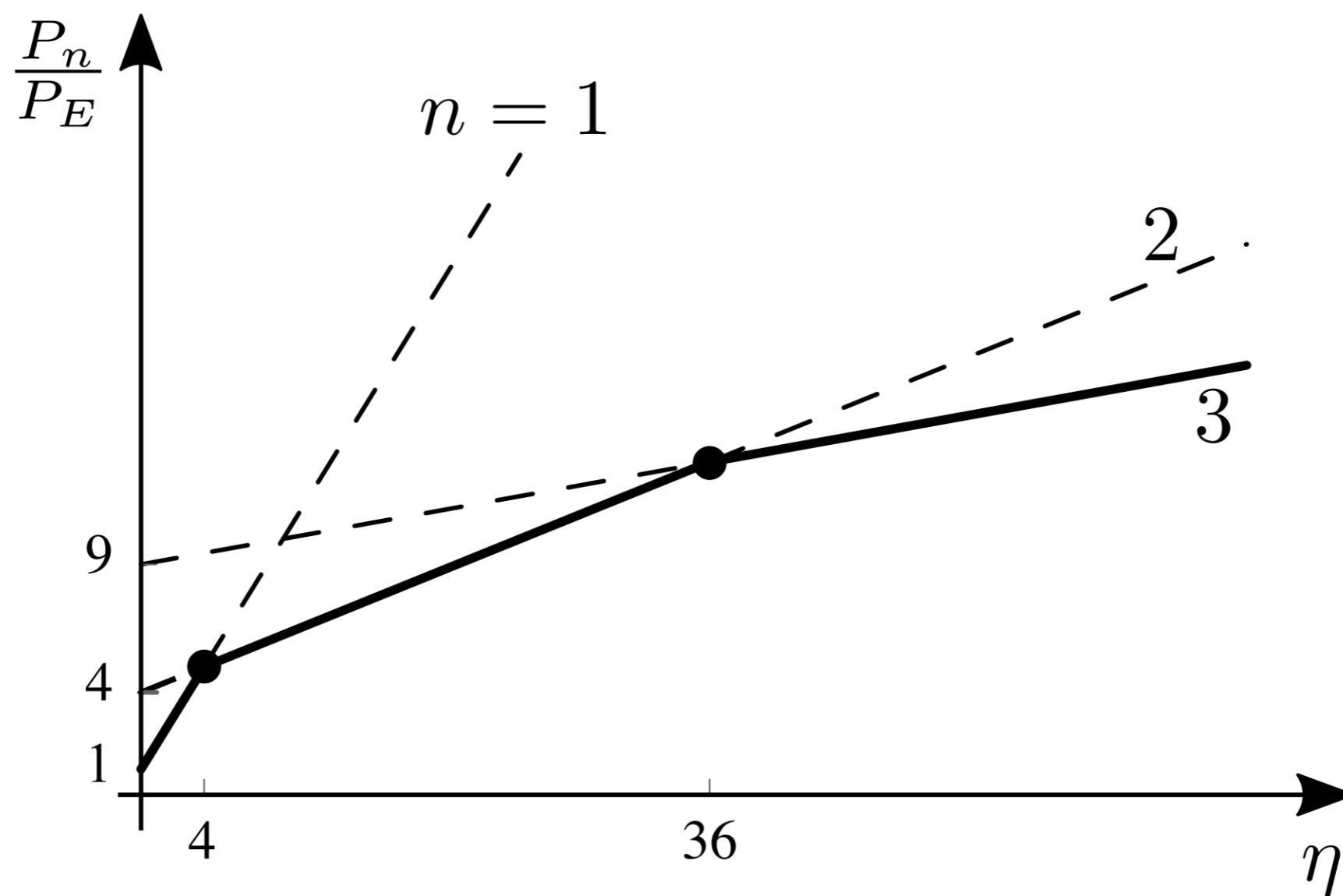
$$\frac{P_n}{P_E} = n^2 + \frac{\eta}{n^2} \quad P_E := \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = P_1.$$

dove:

$$\eta := \frac{k_f}{EI} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^4$$



è un parametro elasto-geometrico adimensionale che misura il *rapporto tra la rigidezza del suolo e quella della trave*. Valori di η piccoli denotano un *suolo soffice*, valori grandi un *suolo rigido*. È possibile allora tracciare il grafico di $\frac{P_n}{P_E}$ in funzione di η , per assegnati valori di $n = 1, 2, 3, \dots$. Si ottiene così il grafico





- per $0 \leq \eta \leq 4$, il modo critico consta di $n = 1$ semi-onde, a cui è associato il carico critico $\frac{P_1}{P_E} = 1 + \eta$;
- per $4 \leq \eta \leq 36$, il modo critico consta di $n = 2$ semi-onde, a cui è associato il carico critico $\frac{P_2}{P_E} = 4 + \frac{\eta}{4}$, ecc....

I valori η_n in corrispondenza dei quali si verificano autovalori doppi (cioè *modi critici simultanei*, ad n ed $n + 1$ semi-onde), sono:

$$\eta_n = [n(n + 1)]^2$$