

Determinanti

1.5.3 Permutazioni

Premettiamo alcune nozioni su un argomento - le permutazioni - che sarà affrontato in dettaglio nei corsi di Algebra. Anche per tale motivo ci limiteremo alle informazioni che sono strettamente necessarie per i nostri scopi.

Definizione 1.5.33. Una permutazione su n elementi è una applicazione biunivoca

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

dall'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ in se stesso.

Indichiamo con σ_n l'insieme di tutte le permutazioni su n elementi. Tale insieme può essere munito di un "prodotto": dati $\sigma, \tau \in \sigma_n$, cioè due applicazioni biunivoche $\sigma, \tau : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, il loro prodotto è, per definizione, la composizione $\sigma \cdot \tau := \sigma \circ \tau \in \sigma_n$.

Si può dimostrare che σ_n è un insieme finito e la sua cardinalità, cioè il numero di elementi di cui è formato, è $|\sigma_n| = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!$.

Nel linguaggio delle permutazioni, viene utilizzata comunemente la seguente notazione. Una permutazione $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ verrà indicata con

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

In particolare la permutazione identità di σ_n sarà:

$$\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Per ottenere la permutazione inversa di una data permutazione basterà dunque capovolgere la tabella e riordinare le colonne in modo tale da ottenere nella prima riga $1, 2, \dots, n$. Ad esempio, consideriamo la permutazione su 4 elementi

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

σ è dunque l'applicazione biettiva $\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ tale che $\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 3$. La sua inversa è l'applicazione $\sigma^{-1} : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ tale che $\sigma^{-1}(1) = 2, \sigma^{-1}(2) = 3, \sigma^{-1}(3) = 4, \sigma^{-1}(4) = 1$. Essa si può ottenere, più agevolmente, "capovolgendo" la tabella di partenza, giungendo dunque a

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

e riordinando le colonne in modo da avere

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

In questa notazione, quindi, date due permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix},$$

il prodotto $\sigma\tau$ sarà

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}.$$

Esempio 1.5.34. *Consideriamo le permutazioni*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il prodotto $\sigma\tau$, serve l'immagine di 1 e quindi occorre calcolare $\tau(1)$ che è 3 e poi calcolare $\sigma(3)$ che è 4 e quindi il prodotto $\sigma\tau$ manda 1 in 4. Procedendo in questo modo si ottiene:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definizione 1.5.35. *Una trasposizione è una permutazione t per la quale esistono due elementi distinti $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tali che:*

- $t(i) = j, \quad t(j) = i;$
- $t(k) = k$ per qualunque $k \neq i, k \neq j$.

In pratica, una trasposizione scambia tra loro gli elementi i e j , mentre lascia invariati tutti gli altri. Indicheremo tale trasposizione usando la notazione $t = (i, j)$.

Esempio 1.5.36. La permutazione $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ è la trasposizione $(1, 4)$. Essa scambia il numero 1 col numero 4, lasciando 2 e 3 inalterati.

Osservazione 1.5.37. Sia t una trasposizione. Allora la permutazione di t inversa è t stessa, cioè $t^{-1} = t$. Infatti, se $t = (i, j)$ è la trasposizione che scambia i con j , allora $t \cdot t(i) = t(t(i)) = t(j) = i$, $t \cdot t(j) = t(t(j)) = t(i) = j$ e, per ogni $k \neq \{i, j\}$, $t \cdot t(k) = t(t(k)) = t(k) = k$.

Possiamo ora enunciare un teorema fondamentale sulle permutazioni, la cui dimostrazione sarà esaminata in dettaglio nei corsi di Algebra.

Teorema 1.5.38. Sia σ una permutazione di n elementi. Allora esistono t_1, t_2, \dots, t_k trasposizioni tali che

$$\sigma = t_1 \cdot t_2 \cdots t_k.$$

Inoltre, se $t'_1, t'_2, \dots, t'_{k'}$ sono altre trasposizioni tali che

$$\sigma = t'_1 \cdot t'_2 \cdots t'_{k'},$$

allora k e k' hanno la stessa parità, cioè sono o entrambi numeri pari o entrambi numeri dispari.

Il teorema precedente stabilisce dunque che ogni permutazione può essere scritta come prodotto di trasposizioni. Tale decomposizione in generale non è unica, ma il numero di trasposizioni che compaiono in tale decomposizione è o sempre pari o sempre dispari.

Per esempio, la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

può essere scritta come (verificare!)

$$\sigma = (3, 5) \cdot (2, 5),$$

ma anche come

$$\sigma = (3, 5) \cdot (2, 5) \cdot (1, 4) \cdot (1, 4).$$

Abbiamo quindi fornito, in questo specifico esempio, due possibili decomposizioni di σ come prodotto di trasposizioni. Le due decomposizioni hanno in comune la proprietà di essere formate da un numero pari di trasposizioni (2 nella prima decomposizione, 4 nella seconda).

Quanto stabilito dal Teorema 1.5.38 giustifica la seguente definizione.

Definizione 1.5.39. *Sia σ una permutazione e sia*

$$\sigma = t_1 \cdot t_2 \cdots t_k \tag{1.6}$$

una sua qualsiasi decomposizione come prodotto di trasposizioni. Si definisce segno della permutazione σ il seguente numero intero

$$\epsilon(\sigma) := (-1)^k$$

dove k è il numero di trasposizioni in cui si decompone σ . La permutazione σ si dice pari se $\epsilon(\sigma) = 1$, dispari se $\epsilon(\sigma) = -1$.

Si noti che la definizione di $\epsilon(\sigma)$ è “ben posta”, cioè non dipende dalla particolare decomposizione di σ in prodotto di trasposizioni. Come detto, infatti, la decomposizione (1.6) non è unica; supponiamo dunque che σ ammetta due diverse decomposizioni nel prodotto di trasposizioni:

$$\sigma = t_1 \cdot t_2 \cdots t_k, \quad \sigma = t'_1 \cdot t'_2 \cdots t'_{k'}.$$

Poichè, per il Teorema 1.5.38, k e k' hanno la stessa parità, si ha che $(-1)^k = (-1)^{k'}$.

Esempio 1.5.40. *Sia σ la permutazione su 3 elementi*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si noti (verificare!) che $\sigma = (1,2)(2,3)$. Quindi $\epsilon(\sigma) = (-1)^2 = 1$ e concludiamo che σ è una permutazione pari.

Vediamo ora alcune utili proprietà del segno di una permutazione:

Proposizione 1.5.41. *Il segno di una permutazione gode delle seguenti proprietà:*

1. $\epsilon(\mathbb{1}_n) = 1$;
2. se t è una trasposizione allora $\epsilon(t) = -1$;

3. $\forall \sigma, \tau \in \sigma_n$ si ha $\epsilon(\sigma\tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)$;

4. $\forall \sigma \in \sigma_n$ si ha $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$;

5. se t è una trasposizione, $\forall \sigma \in \sigma_n$ si ha $\epsilon(\sigma t) = -\epsilon(\sigma)$.

Per le proprietà delle proposizione precedente, si ha che il prodotto di due permutazioni pari è pari e quello di due permutazioni dispari è pari. Inoltre l'inversa di una permutazione pari è pari. Indicheremo con \mathcal{P}_n l'insieme delle permutazioni pari su n elementi e con \mathcal{D}_n l'insieme delle permutazioni dispari.

Concludiamo il paragrafo mostrando come è possibile, concretamente, decomporre una permutazione come prodotto di trasposizioni. Consideriamo una permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Se moltiplichiamo σ per la trasposizione (i, j) otterremo

$$\sigma(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando successivamente per un certo numero trasposizioni, diciamo $t_1 \cdots t_k$, sarà possibile ottenere la permutazione identità. Si avrà cioè:

$$\sigma t_1 t_2 \cdots t_k = \mathbb{1}_n.$$

Moltiplicando a destra il primo e il secondo membro per l'inversa di t_k (che è ancora t_k per quanto detto precedentemente) si otterrà

$$\sigma t_1 t_2 \cdots t_{k-1} = t_k.$$

Continuando in questo modo si avrà:

$$\sigma = t_k t_{k-1} \cdots t_1,$$

e quindi abbiamo scritto σ come prodotto di trasposizioni. Vediamo un esempio di quanto appena descritto.

Esempio 1.5.42. Consideriamo la permutazione

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo di moltiplicare σ per un certo numero di trasposizioni, fino ad ottenere la permutazione identica. Moltiplicando σ per la trasposizione (57) si ottiene:

$$\tau(57) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando $\tau(57)$ per (13) si ottiene

$$\tau(57)(13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando quanto ottenuto per (62) si ottiene

$$\tau(57)(13)(62) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Infine, moltiplicando per (34) avremo

$$\tau(57)(13)(62)(34) = \mathbf{1}$$

e quindi

$$\tau = (34)(62)(13)(57)$$

è una permutazione pari.

1.5.4 Determinante di una matrice quadrata

In questa sezione ad ogni matrice quadrata assoceremo un numero reale che chiameremo determinante

Definizione 1.5.43. Data una matrice quadrata $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ di ordine n , chiameremo determinante di A il numero reale così definito:

$$\det A := \sum_{\tau \in \sigma_n} \epsilon(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}.$$

Si osservi che nella definizione appare un addendo per ogni permutazione su n elementi, per un totale di $n! := 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ addendi. Inoltre ogni addendo è il prodotto di n entrate di A che si trovano tutte in righe diverse e colonne diverse.

Per indicare il determinante di una matrice si utilizza indifferentemente anche la notazione $|A|$ oppure $|a_{ij}|$.

Vediamo in dettaglio, utilizzando la definizione, come si calcola il determinante delle matrici di ordine 2. Ricordiamo innanzitutto che l'insieme delle

permutazioni su due elementi ha esattamente 2 elementi: la permutazione identità $\mathbf{1}$ che è pari e la trasposizione $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ che è dispari.

Avremo quindi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \epsilon(\mathbf{1})a_{1\mathbf{1}(1)}a_{2\mathbf{1}(2)} + \epsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esempio 1.5.44. *Calcoliamo i determinati delle seguenti matrici:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & -\cos a \end{pmatrix}, \quad I_2.$$

Avremo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = a \cdot b - 0 \cdot 0 = ab,$$

$$\begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix} = \cos a \cdot \cos a - (-\sin a \cdot \sin a) = \cos^2 a + \sin^2 a = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2,$$

$$\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & -\cos a \end{vmatrix} = -\cos a \cdot \cos a - (\sin a \cdot \sin a) = -\cos^2 a - \sin^2 a = -1.$$

Allo stesso modo si ottiene $\det I_2 = 1$.

Per le matrici di ordine 3, ricordando che vi sono 6 permutazioni di 3 elementi e calcolando di ognuna il segno si otterrà:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Dalla definizione dovrebbe essere chiaro che il calcolo del determinante diventa tanto più lungo quanto più è grande l'ordine di una matrice. Quindi è importante trovare delle proprietà che ci permettano di semplificare questo calcolo. Vediamone alcune.

Proposizione 1.5.45. $\det(A^t) = \det(A)$

Dimostrazione. Per definizione abbiamo

$$\det A := \sum_{\tau \in \sigma_n} \epsilon(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

$$\det A^t := \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Si osservi innanzitutto che il determinante di A può essere scritto anche come segue:

$$\sum_{\tau^{-1} \in \sigma_n} \epsilon(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)},$$

descrivendo gli addendi tramite τ^{-1} . Ogni addendo del $\det A^t$ può essere scritto come

$$\epsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)},$$

per via dell'invertibilità di σ e per la proprietà commutativa dei numeri reali. Dato che $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$, avremo

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Ponendo $\tau = \sigma^{-1}$ si ottiene

$$\det A^t = \sum_{\tau^{-1} \in \sigma_n} \epsilon(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} = \det A.$$

□

Osservazione 1.5.46. *Il fatto che il determinante di una matrice coincida col determinante della sua trasposta ha una conseguenza importante: ci assicura che qualunque proprietà del determinante che coinvolge le righe vale anche relativamente alle colonne, e viceversa.*

Proposizione 1.5.47. *Se una riga (o una colonna) della matrice A è nulla, allora $\det(A) = 0$.*

Dimostrazione. Poiché ogni addendo è della forma $\epsilon(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$ per qualche permutazione τ , in esso appare un elemento di ogni riga e uno di ogni colonna. Quindi se una riga o una colonna ha elementi tutti nulli, ogni addendo del determinante è nullo e dunque il determinante è nullo. □

Lemma 1.5.48. *Siano \mathcal{P}_n e \mathcal{D}_n , rispettivamente, gli insiemi delle permutazioni pari e delle permutazioni dispari su n elementi. Sia (h, k) una trasposizione. Allora l'applicazione $\varphi : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{D}_n$, $\sigma \in \mathcal{P}_n \mapsto \sigma \cdot (h, k) \in \mathcal{D}_n$ è biettiva.*

Dimostrazione. Intanto osserviamo che la definizione di φ è ben posta, nel senso che effettivamente $\varphi(\sigma) := \sigma \cdot (h, k) \in \mathcal{D}_n$. Infatti, $\epsilon(\sigma \cdot (h, k)) = \epsilon(\sigma) \cdot \epsilon(h, k) = 1 \cdot (-1) = -1$. Dimostriamo l'iniettività di φ . Siano $\sigma, \tau \in \mathcal{P}_n$ tali che $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)$. Allora si ha $\sigma \cdot (h, k) = \tau \cdot (h, k)$. Componendo a sinistra per la trasposizione (h, k) si ottiene $\sigma \cdot (h, k) \cdot (h, k) = \tau \cdot (h, k) \cdot (h, k)$. Dato che $(h, k) \cdot (h, k)$ è la permutazione identica, si deduce subito che $\sigma = \tau$. Resta da provare la suriettività. Sia $\tau \in \mathcal{D}_n$ una permutazione dispari. Dobbiamo dimostrare che esiste una permutazione pari σ tale che $\tau = \varphi(\sigma)$. Ebbene, basta prendere $\sigma := \tau \cdot (h, k)$. \square

Proposizione 1.5.49. *Se A ha due righe (o due colonne) uguali allora $\det A = 0$.*

Dimostrazione. Per quanto detto in precedenza, se dimostriamo il teorema nel caso in cui due righe siano uguali, esso sarà automaticamente vero anche relativamente al caso in cui due colonne siano uguali. Sia dunque

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_h \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

una matrice nella quale la h -esima riga A_h coincide con la k -esima riga A_k . Supponiamo, per fissare le idee, che $h < k$. Questo significa che

$$a_{hj} = a_{kj} \tag{1.7}$$

per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$. Consideriamo la trasposizione (h, k) . Si noti che, per il Lemma 1.5.48, ogni permutazione dispari σ può essere espressa come

$\sigma = \tau \cdot (h, k)$, per qualche permutazione pari τ . Allora

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\tau \in \mathcal{P}_n} a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} - \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\tau \in \mathcal{P}_n} a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} - \sum_{\tau \in \mathcal{P}_n} a_{1\tau \cdot (h,k)(1)} a_{2\tau \cdot (h,k)(2)} \cdots a_{n\tau \cdot (h,k)(n)} \\
&= \sum_{\tau \in \mathcal{P}_n} (a_{1\tau(1)} \cdots a_{h\tau(h)} \cdots a_{k\tau(k)} \cdots a_{n\tau(n)} - a_{1\tau(1)} \cdots a_{h\tau(k)} \cdots a_{k\tau(h)} \cdots a_{n\tau \cdot (h,k)(n)}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

poichè, per la (1.7), $a_{h\tau(h)} = a_{k\tau(h)}$ e $a_{k\tau(k)} = a_{h\tau(k)}$. □

Proposizione 1.5.50. *Supponiamo che una riga A_i della matrice A si scriva come somma di due n -ple B_i e C_i , cioè $A_i = B_i + C_i$. Allora*

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ B_i + C_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ B_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ C_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Supponiamo che una colonna A^j di A si scriva come somma di due n -ple B^j e C^j , cioè $A^j = B^j + C^j$. Allora

$$\begin{aligned}
\det(A^1, \dots, A^{j-1}, B^j + C^j, A^{j+1}, \dots, A^n) &= \det(A^1, \dots, A^{j-1}, B^j, A^{j+1}, \dots, A^n) \\
&\quad + \det(A^1, \dots, A^{j-1}, C^j, A^{j+1}, \dots, A^n).
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Per fissare le idee, siano $B_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$ e $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$.

Allora

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B_i + C_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} &= \det(A) \\
 &= \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
 &= \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (b_{i\sigma(i)} + c_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\
 &= \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots c_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
 &= \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ C_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

L'analogia proprietà per le colonne è infine vera perchè $\det(A) = \det(A^t)$. \square

Proposizione 1.5.51. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ si ha

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ \lambda A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \lambda \det(A)$$

e

$$\det(A^1, \dots, A^{j-1}, \lambda A^j, A^{j+1}, \dots, A^n) = \lambda \det(A)$$

Dimostrazione. Applicando n volte la proprietà precedente si ottiene

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ \lambda A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} &= \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\sigma(i-1)} \cdot \lambda a_{i\sigma(i)} \cdot a_{i+1\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\sigma(i-1)} \cdot a_{i\sigma(i)} \cdot a_{i+1\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \lambda \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \lambda \det(A). \end{aligned}$$

L'analoga proprietà per le colonne segue dal fatto che $\det(A) = \det(A^t)$. \square

Una conseguenza della precedente proprietà è che, per ogni matrice quadrata di ordine n ,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Infatti, applicando la proposizione precedente a tutte le righe di A si ottiene

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda A_1 \\ \lambda A_2 \\ \vdots \\ \lambda A_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \lambda A_2 \\ \vdots \\ \lambda A_n \end{pmatrix} = \lambda^2 \det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \lambda A_n \end{pmatrix} = \cdots = \lambda^n \det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda^n \det(A). \end{aligned}$$

Proposizione 1.5.52. *Se si scambiano tra loro due righe (o due colonne) di una matrice, il determinante cambia di segno.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Utilizzando la proprietà per la quale il determinante di una matrice avente due righe uguali è nullo, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui si ha l'asserto. □

Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, k sue righe $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ e k scalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, per *combinazione lineare* di $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ con coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ si intende la n -pla

$$\lambda_1 A_{i_1} + \lambda_2 A_{i_2} + \dots + \lambda_k A_{i_k}$$

Proposizione 1.5.53. *Il determinante di una matrice non cambia se ad una sua riga (rispettivamente colonna) si somma una combinazione lineare delle rimanenti righe (rispettivamente colonne).*

Dimostrazione. Per semplificare la notazione dimostriamo il teorema applicato alla prima riga. In altre parole dimostriamo che

$$\det \begin{pmatrix} A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \dots + \lambda_n A_n \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det(A).$$

Ebbene,

$$\det \begin{pmatrix} A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \dots + \lambda_n A_n \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \dots + \lambda_n A_n \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \det(A) + \lambda_2 \det \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \lambda_3 A_3 + \cdots \lambda_n A_n \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \\
&= \det(A) + \lambda_2 \det \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \lambda_3 \det \begin{pmatrix} A_3 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \det \begin{pmatrix} A_n \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \\
&= \det(A),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che il determinante di una matrice aventi due righe uguali è nullo. \square

Un altro risultato importante riguardante il determinante è il seguente teorema, che ha un corollario particolarmente utile nel seguito:

Teorema 1.5.54 (Teorema di Binet⁴). *Date due matrici quadrate $A, B \in \mathcal{M}_n$ si ha:*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Dimostrazione. Per le matrici A e B utilizziamo la notazione per righe, cioè $A = (A_1, \dots, A_n)$ e $B = (B_1, \dots, B_n)$. Detta C la matrice prodotto AB , per definizione si ha $[C]_{ij} = \sum_{s=1}^n [A]_{is} [B]_{sj}$. Osserviamo che le righe di C possono essere espresse come $C_i = \sum_{s=1}^n [A]_{is} B_s$.

Calcoliamo il determinante di C utilizzando le proprietà del determinante e otteniamo:

$$\begin{aligned}
\det C &= \det \left(\sum_{s_1=1}^n [A]_{1s_1} B_{s_1}, \sum_{s_2=1}^n [A]_{2s_2} B_{s_2}, \dots, \sum_{s_n=1}^n [A]_{ns_n} B_{s_n} \right) \\
&= \sum_{s_1=1}^n [A]_{1s_1} \det(B_{s_1}, \sum_{s_2=1}^n [A]_{2s_2} B_{s_2}, \dots, \sum_{s_n=1}^n [A]_{ns_n} B_{s_n}) \\
&= \sum_{s_1=1}^n [A]_{1s_1} \sum_{s_2=1}^n [A]_{2s_2} \cdots \sum_{s_n=1}^n [A]_{ns_n} \det(B_{s_1}, B_{s_2}, \dots, B_{s_n}) \\
&= \sum_{s_1=1}^n \sum_{s_2=1}^n \cdots \sum_{s_n=1}^n [A]_{1s_1} [A]_{2s_2} \cdots [A]_{ns_n} \det(B_{s_1}, B_{s_2}, \dots, B_{s_n}).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

⁴Jacques Philippe Marie Binet: matematico e astronomo francese (Rennes, 1786 - Parigi, 1856).

Di tutte le sommatorie rimarrà solamente quella in cui $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ è una permutazione, poiché in caso contrario avremmo uno degli s_i uguale ad un certo s_j e dunque si annullerebbe il determinante

$$\det(B_{s_1}, \dots, B_{s_i}, \dots, B_{s_j}, \dots, B_{s_n}).$$

Posto $s_i = s(i)$, la sommatoria diventerà allora:

$$\begin{aligned} \det C &= \sum_{s \in \sigma_n} [A]_{1s(1)} [A]_{2s(2)} \cdots [A]_{ns(n)} \det(B_{s(1)}, B_{s(2)}, \dots, B_{s(n)}) \\ &= \sum_{s \in \sigma_n} [A]_{1s(1)} [A]_{2s(2)} \cdots [A]_{ns(n)} \epsilon(s) \det(B_1, B_2, \dots, B_n) \\ &= \sum_{s \in \sigma_n} \epsilon(s) [A]_{1s(1)} [A]_{2s(2)} \cdots [A]_{ns(n)} \det(B_1, B_2, \dots, B_n) \quad (1.9) \\ &= \sum_{s \in \sigma_n} \epsilon(s) [A]_{1s(1)} [A]_{2s(2)} \cdots [A]_{ns(n)} \det B \\ &= \det A \det B. \end{aligned}$$

□

Corollario 1.5.55. *Se una matrice quadrata A è invertibile allora il suo determinante è non nullo. Inoltre il determinante di A^{-1} è dato da*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Dimostrazione. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile, allora esiste $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ che verifica:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

Se si considera la prima uguaglianza e si calcola il determinante di ambo i membri si ottiene

$$\det(A^{-1}A) = 1.$$

Applicando il Teorema di Binet si ha

$$\det(A^{-1}) \det A = 1.$$

Ciò implica che $\det A \neq 0$ e

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

□

1.5.5 Sottomatrici e minori

Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ e dei numeri naturali $1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq m$ e $1 \leq j_1 < j_2 \cdots < j_l \leq n$, la *sottomatrice* di A individuata da $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ e $J = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ è la matrice B con k righe e l colonne definita come segue:

$$[B]_{sr} := a_{I_s J_r}.$$

Quando $k = l$, la matrice B è quadrata e si detta *minore* di A di ordine k .

Esempio 1.5.56. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

$I = \{2, 3\}$ e $J = \{2, 3, 4\}$. La sottomatrice individuata da I e J sarà allora:

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Definizione 1.5.57. Data una matrice quadrata A di ordine n ed una sua entrata a_{ij} , diremo *minore complementare* di a_{ij} il minore di ordine $n - 1$ ottenuto da A eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna. Detto M_{ij} tale minore, sarà detto *complemento algebrico* o *cofattore* di a_{ij} il numero reale definito come segue:

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$

Possiamo ora enunciare un importante teorema che ci permette di ridurre il calcolo del determinante di una matrice di ordine n a n determinanti di matrici di ordine $n - 1$. L'iterazione di questo procedimento ci permetterà, almeno in via teorica, il calcolo di qualunque determinante.

Teorema 1.5.58 (Primo teorema di Laplace). *Sia $A \in \mathcal{M}_n$, allora per ogni $h = 1, \dots, n$ si ha:*

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{hj} A_{hj} = \sum_{i=1}^n a_{ih} A_{ih}.$$

Dimostrazione. Poniamo $A = (A_1, \dots, A_n)$ e denotiamo con $R_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ la matrice riga che ha 1 nella j -esima colonna e zero altrove. Sia inoltre B_j la matrice che si ottiene da A sostituendo la riga A_h con la matrice R_j , ossia $B_j = (A_1, \dots, A_{h-1}, R_j, A_{h+1}, \dots, A_n)$.

Si ha $A_h = (a_{h1}, \dots, a_{hn}) = \sum_{j=1}^n a_{hj} R_j$ e quindi

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n a_{hj} \det(A_1, \dots, A_{h-1}, R_j, A_{h+1}, \dots, A_n) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{hj} \det B_j. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Resta quindi da dimostrare che $\det B_j = \det M_{hj}$, dove M_{hj} è il minore complementare di a_{hj} . Facendo $n-j$ trasposizioni si può portare la j -esima colonna nell'ultima, ottenendo quindi una matrice del tipo seguente:

$$B'_j = \left(\begin{array}{c|c} M_{hj} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array} \right).$$

Osserviamo innanzitutto che una permutazione σ su n elementi tale che $\sigma(n) = n$ può essere identificata con una permutazione p su $n-1$ elementi ponendo $p(i) = \sigma(i)$. Viceversa, data $p \in \sigma_{n-1}$ esiste un'unica $\sigma \in \sigma_n$ tale che $\sigma(n) = n$ e $\sigma(i) = i$ per $i \neq n$. Inoltre le permutazioni p e σ hanno lo stesso segno.

Poniamo $B'_j = (b_{sk})$ e osserviamo che se ne calcoliamo il determinante gli addendi per cui $\sigma(n) \neq n$ sono nulli poiché l'unica entrata non nulla della n -esima riga è quella nella n -esima colonna e inoltre si ha $b_{n\sigma(n)} = 1$. Calcolando il determinante si ha dunque:

$$\begin{aligned} \det B'_j &= \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n-1\sigma(n-1)} b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{p \in \sigma_{n-1}} \epsilon(p) b_{1p(1)} \cdots b_{n-1p(n-1)} \cdot 1 \\ &= \sum_{p \in \sigma_{n-1}} \epsilon(p) b_{1p(1)} \cdots b_{n-1p(n-1)} \\ &= \det M_{ij}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

□

Il calcolo del determinante utilizzando il primo teorema di Laplace è chiamato *sviluppo per riga* o *sviluppo per colonna*. Il seguente risultato generalizza il primo teorema di Laplace e ha importanti corollari:

Teorema 1.5.59 (Secondo teorema di Laplace). *Sia $A \in \mathcal{M}_n$, allora per ogni $h, k = 1, \dots, n$ si ha:*

$$\sum_{j=1}^n a_{hj} A_{kj} = \sum_{i=1}^n a_{ih} A_{ik} = (\det(A)) \cdot \delta_{hk}.$$

Dimostrazione. Per $h = k$ si ha il primo teorema di Laplace. Per $h \neq k$ consideriamo $A = (A_1, \dots, A_n)$ e sia $B = (A_1, \dots, A_{h-1}, A_k, A_{h+1}, \dots, A_k, \dots, A_n)$ la matrice ottenuta da A sostituendo la h -esima riga con A_k e lasciando le altre righe invariate. Allora si ha $\det B = 0$ poiché B ha due righe uguali. Sviluppando il determinante di B lungo la h -esima riga (che è uguale a A_k) si ottiene (ricordando che per $h \neq k$ si ha $\delta_{hk} = 0$)

$$(\det A) \cdot \delta_{hk} = 0 = \det B = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{hj}.$$

Passando alla trasposta si ottiene l'altra uguaglianza. □

Il secondo teorema di Laplace può essere espresso in termini matriciali costruendo, a partire da una matrice quadrata A , un'altra matrice quadrata, chiamata *aggiunta* di A , denotata con $Ad(A)$ e definita come segue:

$$Ad(A) := (A_{ij})^t,$$

cioè la trasposta della matrice che ha come entrate i complementi algebrici di A .

A questo punto il secondo teorema di Laplace può essere espresso come segue (la verifica è lasciata per esercizio):

$$A \cdot Ad(A) = Ad(A) \cdot A = (\det A) I_n.$$

Ecco un importante corollario del secondo teorema di Laplace:

Corollario 1.5.60. *Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo.*

Dimostrazione. Se A è invertibile, per il teorema di Binet $\det A$ è diverso da zero. Viceversa, se $\det A \neq 0$, per il secondo teorema di Laplace e per le proprietà del prodotto di uno scalare per una matrice si ha

$$A \cdot [(\det A)^{-1} Ad(A)] = [(\det A)^{-1} Ad(A)] \cdot A = I_n$$

e dunque l'inversa di A è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Ad(A). \tag{1.12}$$

□

Si osservi che il corollario permette di calcolare esplicitamente l'inversa di una matrice invertibile. Infatti, data la matrice A , sarà sufficiente calcolarne il determinante e il cofattore di ogni sua entrata per poter costruire l'aggiunta di A . Vediamo un esempio. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A è invertibile, dato che $\det(A) = -3 \neq 0$. Troviamo la sua inversa. Applicando la (1.12) si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^t.$$

Calcoliamo dunque i complementi algebrici. Si ha che

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3.$$

Di conseguenza,

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5.6 Sistemi di Cramer

Consideriamo un sistema lineare di n equazioni in n incognite con coefficienti numeri reali

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.13)$$

Come abbiamo visto, esso può essere espresso in forma matriciale

$$AX = B$$

dove $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ è la matrice dei coefficienti e B è la matrice colonna dei termini noti.

Diremo che il sistema (1.13) è un *sistema di Cramer* se $\det(A) \neq 0$.

Dimostriamo ora che i sistemi di Cramer ammettono un'unica soluzione.

Teorema 1.5.61. *Il sistema di Cramer*

$$AX = B$$

ammette un'unica soluzione $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ dove

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ x_2^0 &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ x_n^0 &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Dimostrazione. Siccome il sistema è di Cramer, la matrice A è invertibile. Dimostriamo che

$$X_0 := A^{-1}B$$

è una soluzione del sistema. Infatti si ha che

$$A \cdot X_0 = A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot (A^{-1})) \cdot B = I_n B = B.$$

Dimostriamo ora che X_0 è l'unica soluzione del sistema. Supponiamo per assurdo che esista un'altra soluzione, diciamo X'_0 . Allora

$$AX'_0 = B = AX_0$$

da cui si ottiene

$$A^{-1}(AX'_0) = A^{-1}(AX_0)$$

e quindi $X'_0 = I_n X'_0 = (A^{-1}A)X'_0 = A^{-1}(AX'_0) = A^{-1}(AX_0) = (A^{-1}A)X_0 = I_n X_0 = X_0$. Ora dimostriamo le (1.14), che per inciso sono dette *formule di Cramer*. Invero,

$$X_0 = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det(A)} Ad(A)B,$$

da cui possiamo concludere che la i -esima componente di X_0 è data da

$$\begin{aligned} x_i^0 &= [X_0]_{i1} \\ &= \left[\frac{1}{\det(A)} Ad(A)B \right]_{i1} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{s=1}^n [Ad(A)]_{is} [B]_{s1} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{s=1}^n b_s A_{si} \end{aligned}$$

per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Tenendo conto del fatto che, utilizzando il teorema di Laplace sviluppando secondo la i -esima colonna di A , si ha

$$\det(A) = \sum_{s=1}^n a_{si} A_{si},$$

l'espressione trovata per x_i^0 coincide con le (1.14). □

Si noti che il teorema precedente nulla dice riguardo l'esistenza di soluzioni nel caso in cui $\det(A) = 0$, cioè quando il sistema non è di Cramer.

Illustriamo l'utilizzo delle formule di Cramer mediante un esempio. Consideriamo il seguente sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti e quella dei termini noti sono date, rispettivamente, da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\det(A) = 2 \neq 0$, il sistema è di Cramer e quindi ammette un'unica soluzione $X_0 \in \mathbb{R}^3$. Troviamola. Utilizzando le formule di Cramer (1.14) si ha

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \\ x_2^0 &= \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \\ x_3^0 &= \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è la terna $X_0 = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{7}{2})$.

Esercizi conclusivi

1. Si diano degli esempi di matrici quadrate con determinante uguale a ± 1 , che non siano ortogonali.
2. Date due matrici quadrate A, B , si dimostri che se AB è invertibile, allora A e B hanno determinante non nullo.
3. Utilizzando il primo teorema di Lapalce e/o le proprietà dei determinanti, calcolare il determinante delle seguenti matrici ad entrate reali

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{2}{3} \\ 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Stabilire se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, trovare la matrice inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

5. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la seguente matrice è invertibile, e in corrispondenza di tali valori trovarne la matrice inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$