Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura
Magistrale Ingegneria Civile 2 anno **a.a. 2022/23**

Structural Stability and Limit Analysis of Structures

(Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

> Lezione 5

Euler's beam. Linear theory

(La trave di Eulero. Teoria linearizatta)

Victor Eremeev

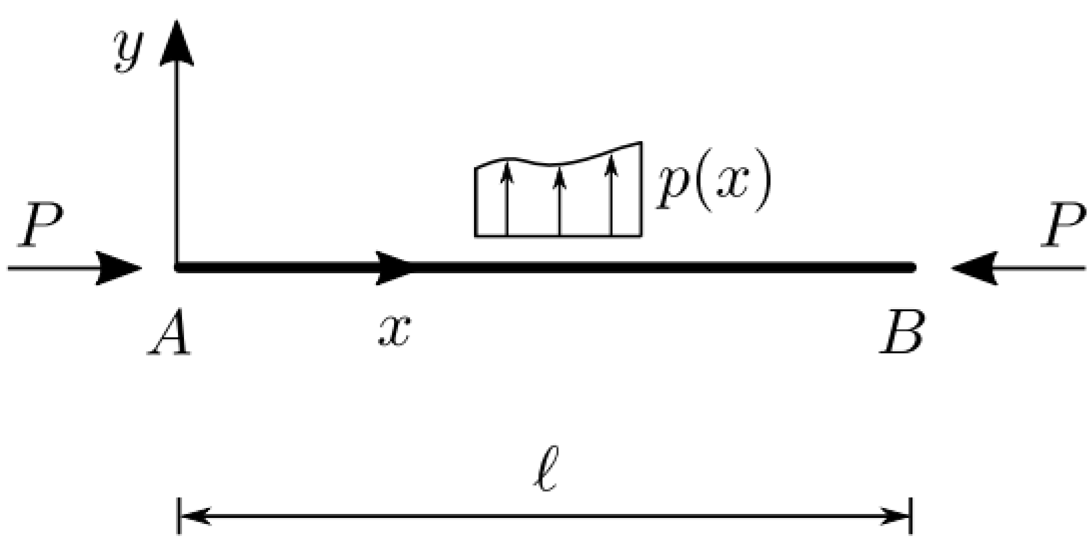
victor.eremeev@unica.it

Il modello di trave estensibile

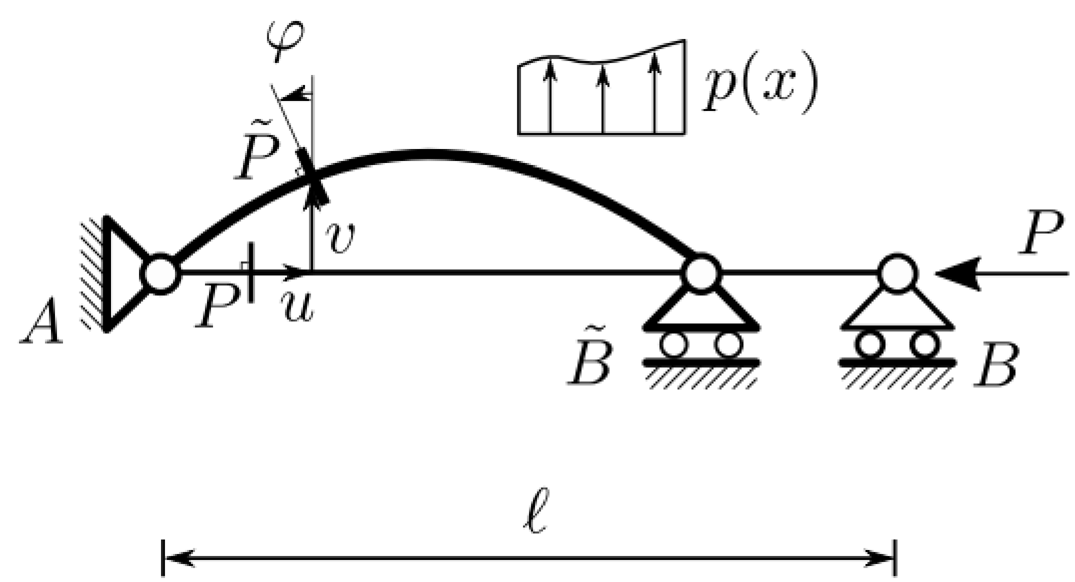
Si sviluppa il modello linearizzato piano di trave *estensibile* ed *indeformabile a taglio*, facendo riferimento alla teoria dei corpi elastici presollecitati

Tale modello è anche detto *trave di Eulero estensibile*.

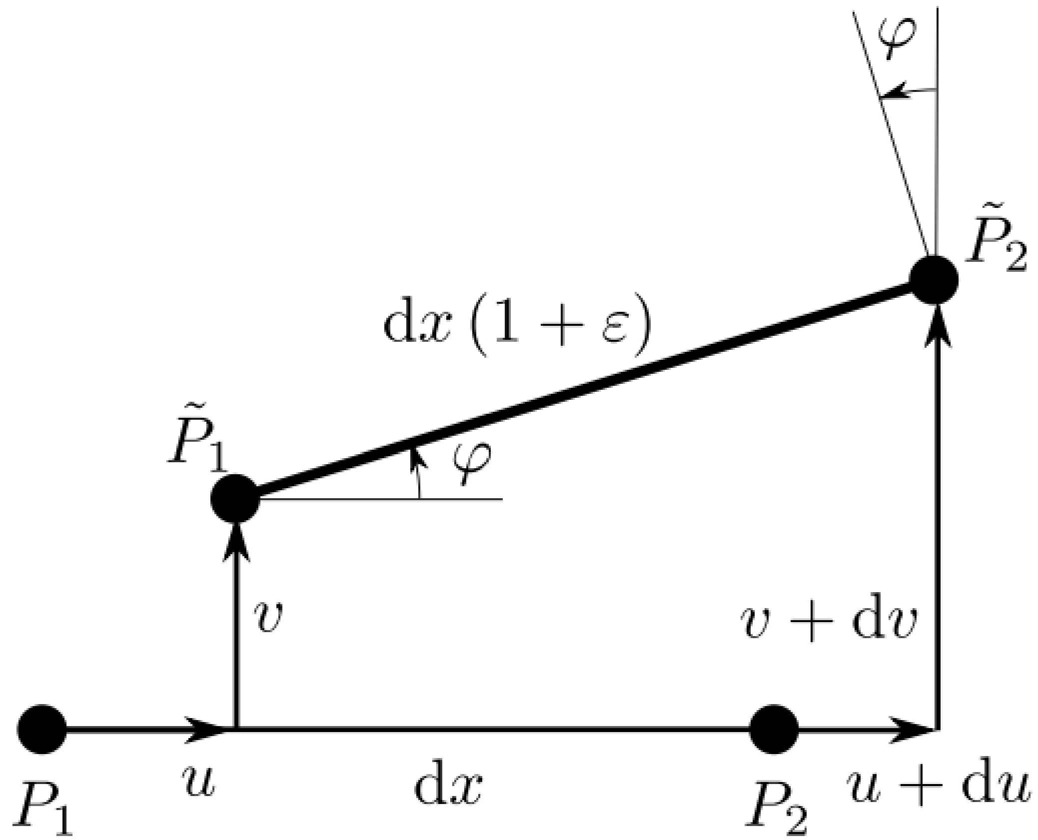
Si consideri una trave prismatica rettilinea, di estremi A, B, indeformabile a taglio ed immersa nello spazio 2D, uniformemente compressa da una forza assiale di intensità P, e sollecitata da carichi distribuiti di intensità $p(x)$, normali alla linea d'asse . Tale oggetto è modellato come *continuo monodimensionale polare*. Si assume che nella configurazione presollecitata, confusa con quella naturale, la trave giaccia sul segmento $x \in (0, \ell)$, dove ℓ è la lunghezza della trave



(a) configurazione di riferimento



(b) configurazione variata



(c) estensione di un elemento infinitesimo di trave

In accordo al modello monodimensionale polare, ogni punto materiale P è dotato di orientazione. Lo spostamento del punto descrive la traslazione della linea d'asse della trave, e la rotazione del punto quella della sezione trasversale del modello 2D. Il generico cambiamento di configurazione è descritto dal campo di spostamento $\mathbf{u} := (u(x)\,,\ v(x)\,,\ \varphi(x))^T$, in cui u, v sono rispettivamente la componente longitudinale e trasversale della traslazione e φ la rotazione (Figura). Le tre componenti di spostamento, tuttavia, non sono indipendenti, per il vincolo interno di indeformabilità a taglio (che assicura la conservazione dell'ortogonalità tra sezioni normali e linea d'asse); questo implica l'uguaglianza fra la rotazione della linea d'asse e la rotazione della sezione.

Per esplicitare il vincolo interno, si osserva che

$$\mathrm{d}v = (\mathrm{d}x + \mathrm{d}u)\tan\varphi$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{v'}{1+u'}\right)$$

in cui l'apice indica derivazione rispetto ad x. Questa permette di ridurre i gradi di libertà di ogni punto a due, e precisamente ad u, v (variabili 'master', più comunemente usate).

Le grandezze di deformazione della trave estensibile sono l'*estensione unitaria* $\varepsilon := \frac{\mathrm{d}\tilde{x}-\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$ e la *curvatura flessionale* $\kappa := \varphi'$. Riguardo la prima, poiché risulta

$$\mathrm{d}\tilde{x}^2 = \mathrm{d}x^2\left(1+\varepsilon\right)^2 = \left(\mathrm{d}x + \mathrm{d}u\right)^2 + \mathrm{d}v^2$$

$$\varepsilon = \sqrt{\left(1+u'\right)^2 + v'^2} - 1$$

$$\kappa = \frac{\left(1+u'\right)v'' - u''v'}{\left(1+u'\right)^2 + v'^2}$$

Tuttavia, poiché in questa sede si è interessati ad un'analisi linearizzata, è sufficiente assumere deformazioni sviluppate in serie, al secondo ordine per l'estensione ed al primo ordine per la curvatura , ovvero:

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}v'^2 + \cdots$$
$$\kappa = v'' + \cdots$$

Si hanno dunque le deformazioni lineari $\varepsilon_1 := u'$ e $\kappa_1 := v''$ e la deformazione quadratica $\varepsilon_2 := \frac{1}{2}v'^2$.

Il legame costitutivo

Le sollecitazioni (attive) della trave estensibile sono lo sforzo normale $N(x)$ ed il momento flettente $M(x)$ (mentre il taglio $T(x)$ è reattivo). Assunto un legame elastico lineare disaccoppiato, si ha:

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{pmatrix}$$

dove $N_0 = -P$ è lo sforzo normale di presollecitazione ed EA, EI sono rispettivamente le rigidezze assiale e flessionale della trave.

L'energia potenziale totale

$$\Pi = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} EA\, \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} EI\, \kappa_1^2 + N_0 \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right) \right] \mathrm{d}x + P\, u(\ell) - \int_0^\ell p\, v\, \mathrm{d}x$$

Poiché lo stato presollecitato è equilibrato, per il Teorema dei Lavori Virtuali è:

$$\int_0^\ell N_0\,\varepsilon_1 \mathrm{d}x = -P\,u\,(\ell)$$

cosicché l'energia Π assume la forma

$$\Pi = \int_0^\ell \left(\frac{1}{2}EA\,\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}EI\,\kappa_1^2 + N_0\,\varepsilon_2\right)\mathrm{d}x - \int_0^\ell p\,v\,\mathrm{d}x$$

$$\varepsilon_1 := u' \qquad \kappa_1 := v'' \qquad \varepsilon_2 := \tfrac{1}{2}v'^2$$

Le equazioni di equilibrio e le condizioni al contorno

La variazione prima dell'EPT si scrive:

$$\delta\Pi = \int_0^\ell \left(EAu'\delta u' + EIv''\delta v'' + N_0 v'\delta v' - p\delta v\right) \mathrm{d}x$$

Dopo integrazione per parti, uguagliando a zero $\forall\,(\delta u, \delta v)$, si ha:

$$\delta\Pi = \int_0^\ell \left[-EAu''\delta u + \left(EIv'''' - N_0 v'' - p\right)\delta v\right] \mathrm{d}x + \left[EAu'\delta u\right]_0^\ell + \left[EIv''\delta v'\right]_0^\ell + \left[\left(-EIv''' + N_0 v'\right)\delta v\right]_0^\ell = 0, \quad \forall\,(\delta u, \delta v)$$

$$\boxed{N_0 = -P}$$

$$E A\, u'' = 0$$

$$\left[E A\, u'\, \delta u\right]_0^\ell = 0$$

$$E I\, v'''' + P\, v'' = p$$

$$\left[\left(-E I\, v''' - P\, v'\right)\delta v\right]_0^\ell = 0$$

$$\left[E I\, v''\, \delta v'\right]_0^\ell = 0$$

Poiché il problema in u è disaccoppiato da quello in v, ed inoltre è omogeneo e non singolare, esso ammette la sola soluzione banale $u = 0,\ \forall x$. Il modo critico di buckling è dunque *inestensionale*.

Il carico critico di travi semplici

L'integrale generale si scrive

$$v = c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x) + c_3\, x + c_4$$

dove $c_i \ \ (i = 1, \ldots 4)$ sono costanti arbitrarie ed inoltre:

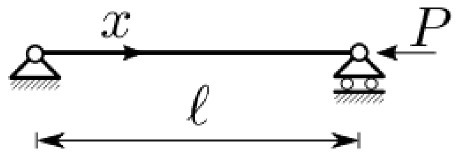
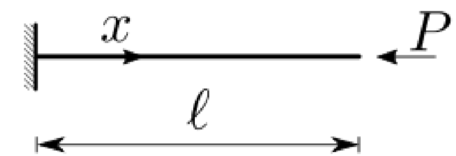
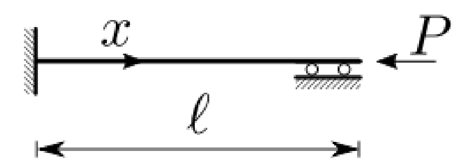
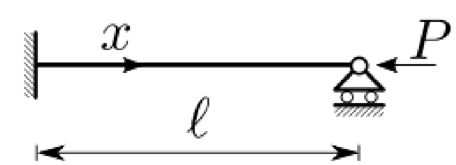
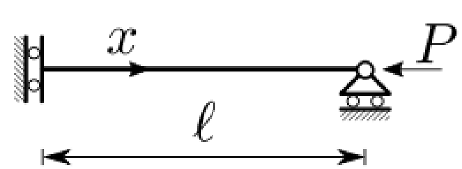
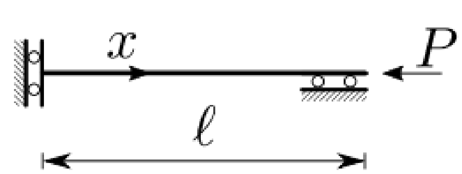
$$\beta := \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

è il *numero d'onda*, che costituisce l'autovalore del problema differenziale ai limiti.

Le condizioni al contorno sono di due tipi:

- *geometriche*: (a) spostamento $v = 0$ in cerniera e carrello, (b) rotazione $v' = 0$ all'incastro o glifo (scorrevole longitudinalmente, per consentire l'applicazione della presollecitazione, o trasversalmente);
- *meccaniche*: (a) momento flettente $M(x) = EI\, v''(x) = 0$ in cerniera e carrello, (b) taglio $T(x) = -EI\, v'''(x) = 0$ nel glifo trasversale, (c) componente trasversale della forza interna, $V(x) = T(x) - P\, v'(x) = 0$, nell'estremo libero.

Carichi critici di travi semplici e lunghezze di libera inflessione.

	Vincolo	Cond. al cont.	P_c	ℓ_0
(a)		$v(0) = M(0) = 0$ $v(\ell) = M(\ell) = 0$	$\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$	ℓ
(b)		$v(0) = v'(0) = 0$ $M(\ell) = V(\ell) = 0$	$\frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$	$2\,\ell$
(c)		$v(0) = v'(0) = 0$ $v(\ell) = v'(\ell) = 0$	$\frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$	$\ell/2$
(d)		$v(0) = v'(0) = 0$ $v(\ell) = M(\ell) = 0$	$2.05\,\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$	$0.7\,\ell$
(e)		$v'(0) = -T(0) = 0$ $v(\ell) = M(\ell) = 0$	$\frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$	$2\,\ell$
(f)		$v'(0) = -T(0) = 0$ $v(\ell) = v'(\ell) = 0$	$\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$	ℓ

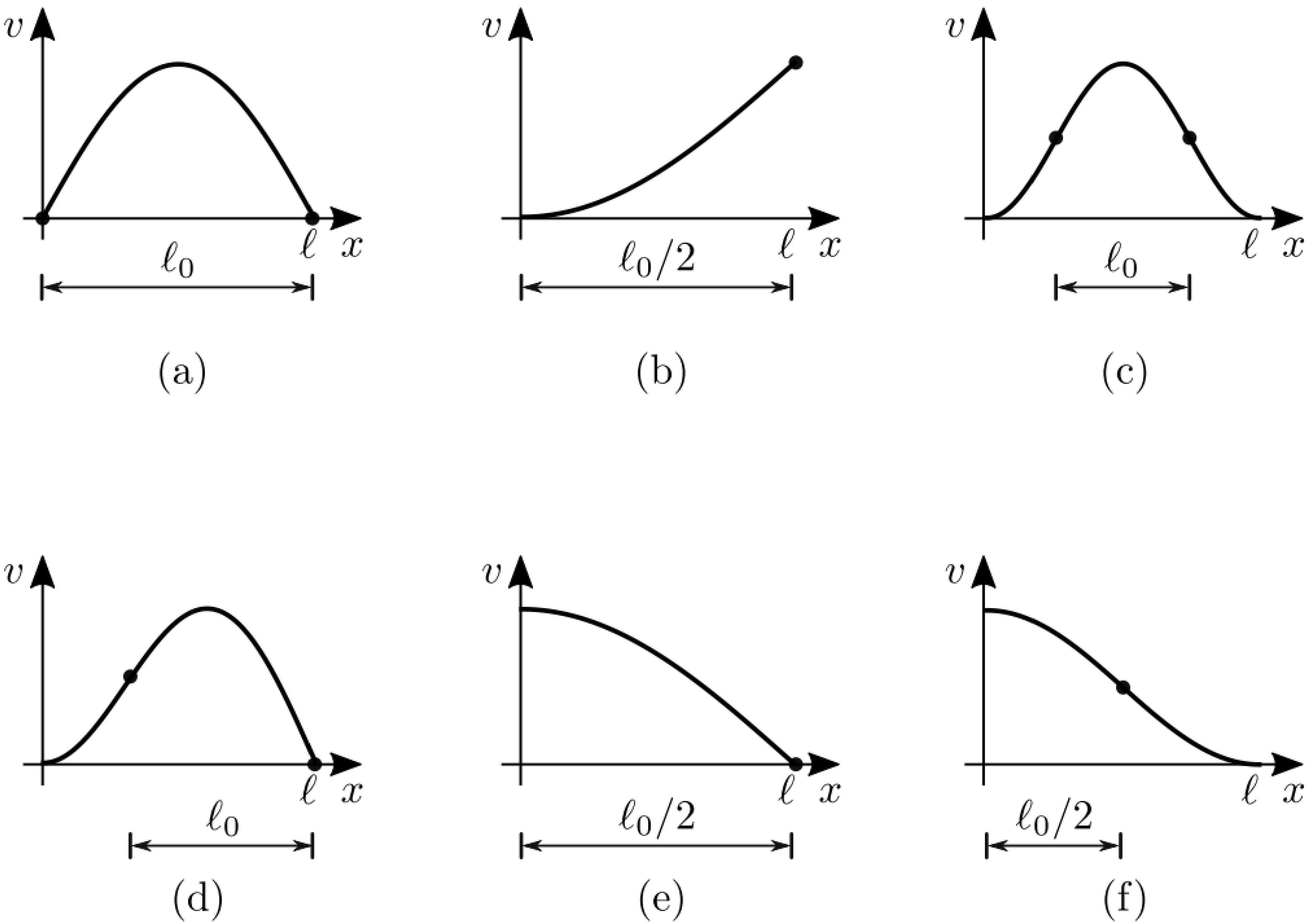
La lunghezza di libera inflessione

Dai risultati in **Tabella** si osserva che carichi critici di travi semplici possono tutti essere riscritti nella forma:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}$$

in cui si è introdotta un'opportuna lunghezza ℓ_0, detta *lunghezza di libera inflessione*. Il suo significato geometrico emerge dalla forma dei modi in **Figura**, e precisamente: ℓ_0 *è la distanza tra due punti di flesso della deformata critica*. Questo risultato si giustifica con il fatto che una trave semplice di luce ℓ, che sbanda con una deformata che esibisce punti di flesso a distanza ℓ_0, possiede lo stesso carico critico della trave appoggiata di luce ℓ_0 (la cui deformata critica ha, infatti, punti di flesso alle estremità).

Modi critici delle travi semplici



La tensione critica

È utile valutare la *tensione normale critica* $\sigma_c := \frac{P_c}{A}$, con A l'area della sezione, che si verifica nella trave all'atto (più precisamente, immediatamente prima) della biforcazione . Tenuto conto si ha:

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E \, \rho^2}{\ell_0^2}$$

dove $\rho := \sqrt{\frac{I}{A}}$ è il raggio giratore d'inerzia della sezione. La precedente si scrive anche:

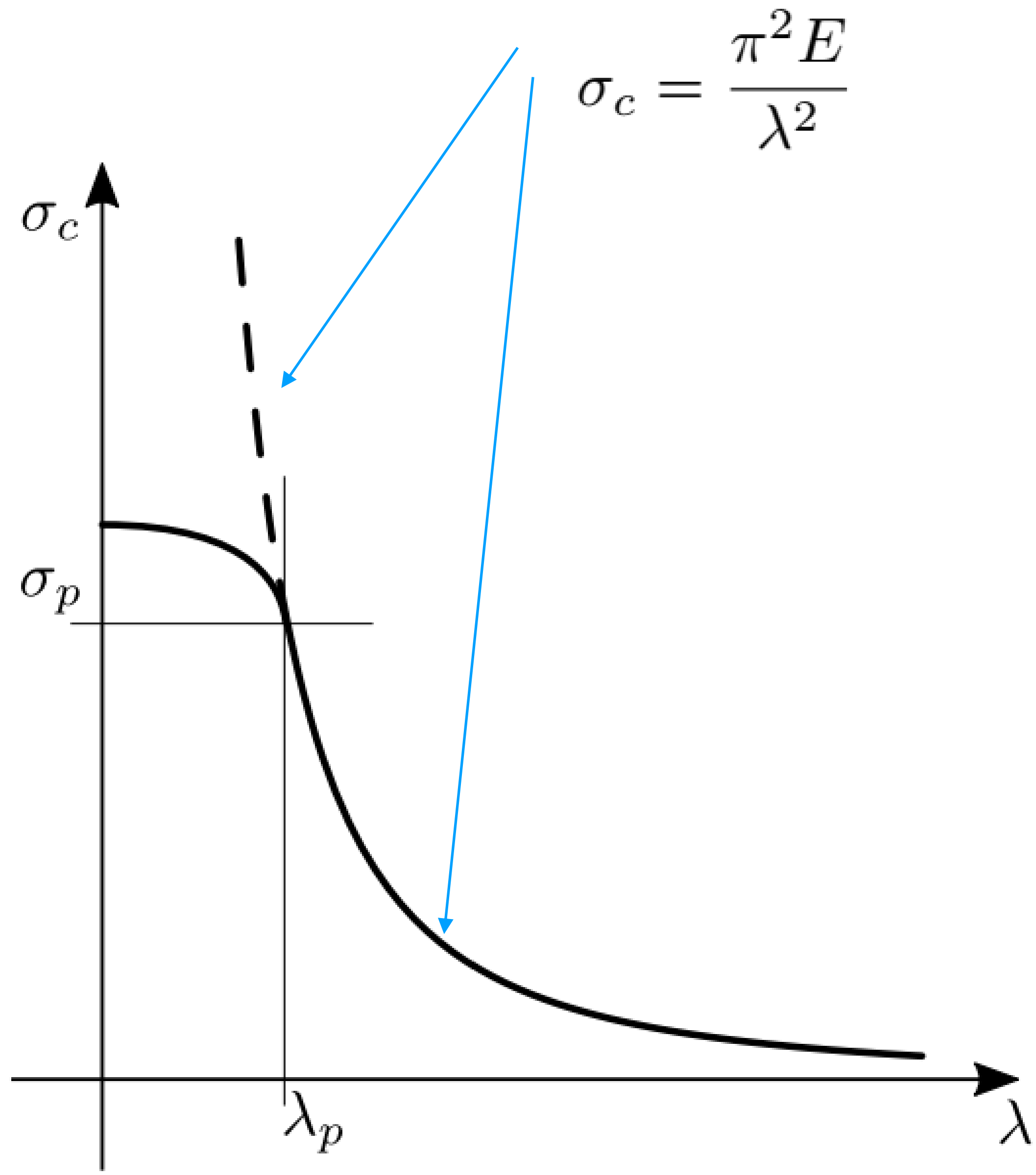
$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

dove si è introdotto il rapporto adimensionale:

$$\lambda := \frac{\ell_0}{\rho}$$

detto *snellezza* della trave. Esso riassume le caratteristiche geometriche della struttura: proprietà della sezione A, I, lunghezza della trave ℓ e condizioni di vincolo.

curva di Eulero



Tensione critica euleriana in funzione della snellezza; σ_p tensione limite di proporzionalità.