



Università degli Studi di Cagliari

UNICA  
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI CAGLIARI

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

**Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2022/23**

# Structural Stability and Limit Analysis of Structures

(Instabilità delle strutture e calcolo a rottura)

> **Lezione 4**

Linear analysis of stability of dynamic systems  
(Analisi lineare di stabilità)

***Victor Eremeev***

victor.eremeev@unica.it

# I sistemi dinamici

L'evoluzione temporale del sistema dinamico è governata da equazioni differenziali del tipo:

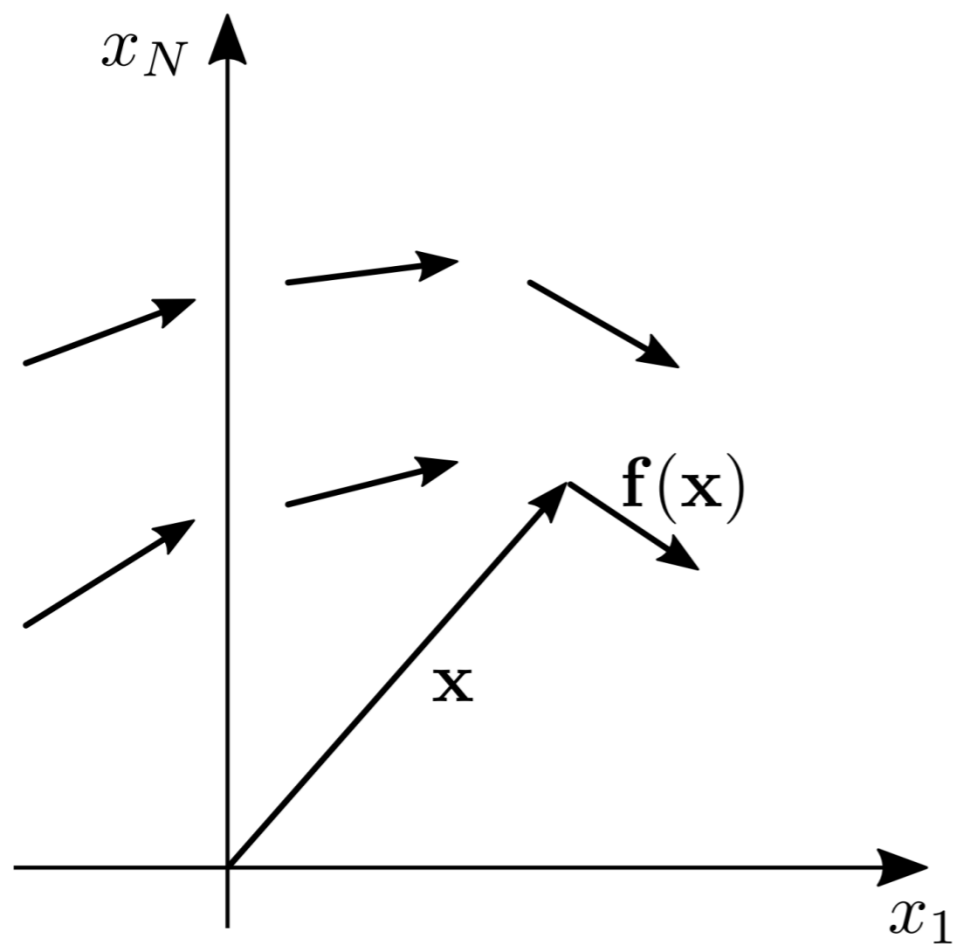
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

in cui il punto denota la derivata rispetto al tempo  $t$ , oppure:

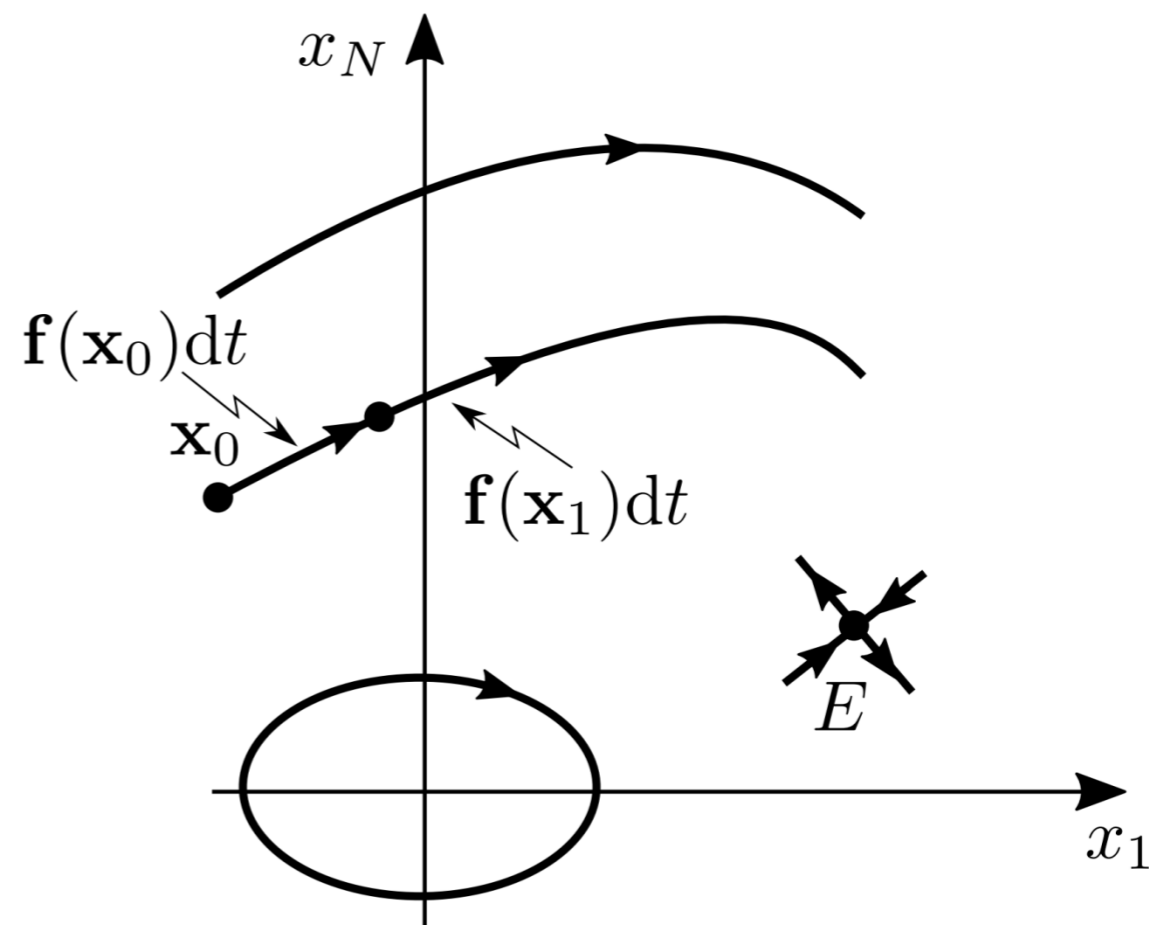
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

corredate delle condizioni iniziali:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$



(a)



(b)

Diagramma di fase: (a) campo vettoriale, (b) traiettorie e punti di equilibrio.

## I punti di equilibrio

Un punto  $\mathbf{x}_E$  nel quale si annulla il campo vettoriale,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_E) = \mathbf{0}$ , è un *punto di equilibrio*, o punto singolare (Fig. ). Se il sistema è posto in  $\mathbf{x}_E$ , poiché la velocità è ivi zero, lo stato non evolve, e dunque la traiettoria degenera nel punto stesso.

In un punto di equilibrio, non è definita la tangente alla traiettoria (perché il vettore velocità zero è diretto in modo arbitrario), e dunque da esso possono originare più traiettorie, oppure nessuna traiettoria. La natura delle traiettorie nell'intorno del punto di equilibrio determina la stabilità dell'equilibrio.

### La linearizzazione del campo vettoriale

Poiché, ai fini della stabilità, ha interesse studiare *piccoli moti* nell'intorno dell'equilibrio, si può linearizzare il campo vettoriale. Troncando al primo ordine lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale  $\mathbf{x}_E$ , si ha:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_E) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_E} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) + \dots$$

Tenuto conto che  $f(\mathbf{x}_E) = \mathbf{0}$ , e denotata con  $\delta\mathbf{x} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_E$  la deviazione di  $\mathbf{x}$  da  $\mathbf{x}_E$ , l'equazione del moto linearizzata si scrive:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\delta\mathbf{x}$$

in cui:

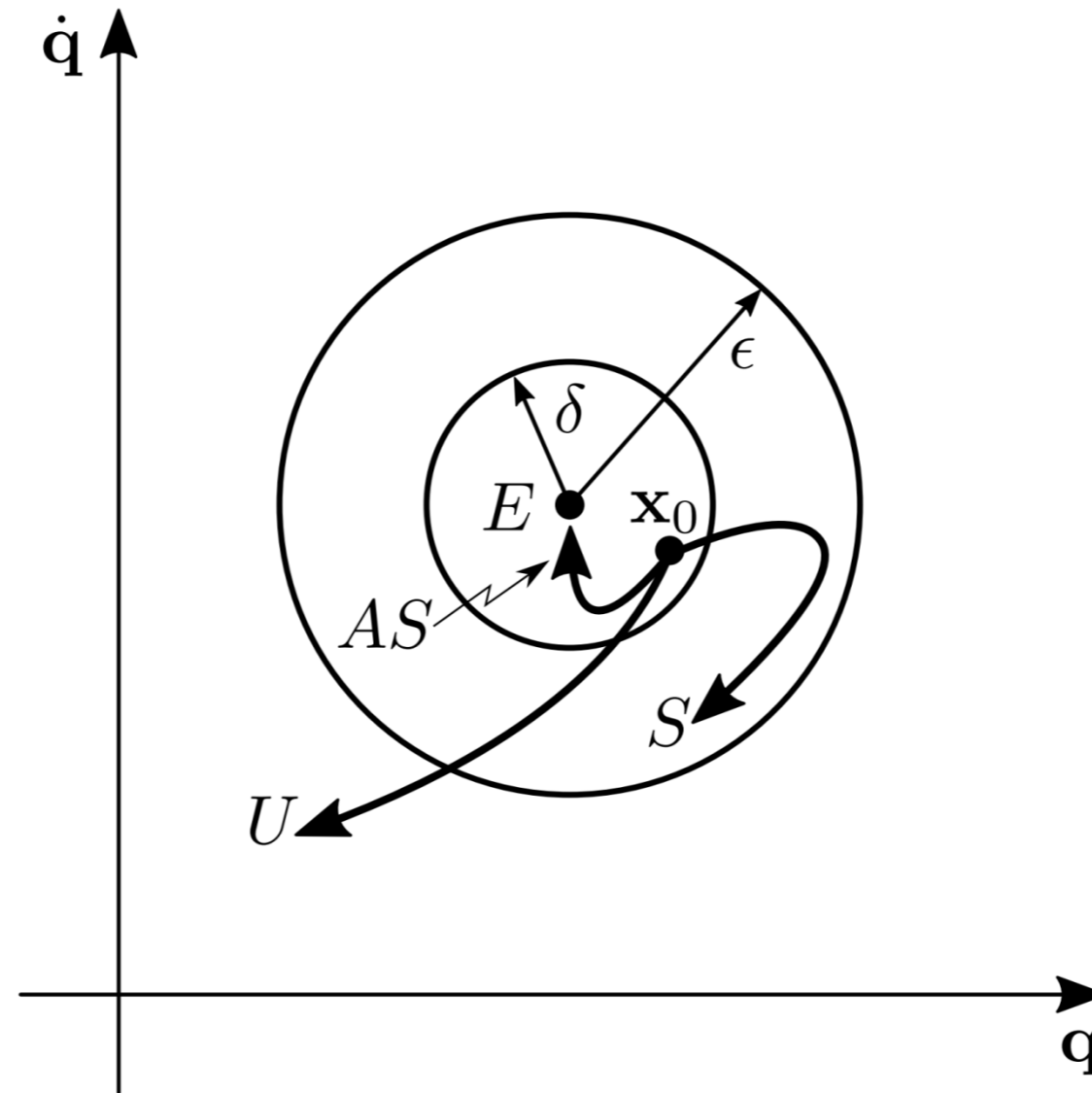
$$\mathbf{J} := \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_E}, \quad \text{ovvero} \quad [J_{ij}] := \left[ \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_E} \right]$$

è la *matrice Jacobiana* in  $\mathbf{x}_E$  del campo vettoriale. Le proprietà di  $\mathbf{J}$ , in particolare i suoi autovalori, decidono circa la stabilità di  $\mathbf{x}_E$ , in quanto determinano l'evoluzione dello stato nell'intorno dell'equilibrio.

Qui si rinuncia ad analizzare un sistema dinamico generico, sebbene la relativa discussione non sia difficile, ma si restringe subito l'attenzione al caso dei sistemi meccanici.

## La stabilità dell'equilibrio

La nozione di stabilità dell'equilibrio, dovuta a Lyapunov, è qui introdotta in modo informale (Fig. ). Nello spazio di stato, si fissi un intorno del punto di equilibrio  $E$  di raggio *arbitrariamente piccolo*  $\epsilon$ . Se esiste un intorno di raggio  $\delta(\epsilon) < \epsilon$ , tale che le traiettorie che originano dall'intorno più piccolo rimangono confinate nell'intorno di raggio più grande, allora l'equilibrio è stabile ( $S$ ). L'idea della stabilità è dunque che, per condizioni iniziali  $x_0$  'abbastanza vicine' al punto di equilibrio, le traiettorie che originano rimangono 'sufficientemente vicine' a detto punto. Se non è possibile trovare un intorno di raggio  $\delta$ , in quanto una o più traiettorie che originano da  $x_0$  si portano fuori del dominio di raggio  $\epsilon$ , allora l'equilibrio è *instabile* ( $U$ ). Se la traiettoria, oltre a rimanere confinata, tende pure a ritornare (in un tempo infinito) al punto di equilibrio, l'equilibrio si dice *asintoticamente stabile* ( $AS$ ). L'asintoticità è una caratteristica che rafforza la stabilità.



**Figura :** Stabilità del punto di equilibrio  $E$ :  $S$  stabile,  $U$  instabile,  $AS$  asintoticamente stabile.

## Le equazioni nonlineari del moto

Le equazioni lagrangiane del moto si scrivono :

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$$

dove:

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  è il vettore dei parametri lagrangiani, presi come spostamenti e rotazioni di particolari punti materiali, misurati a partire da una *configurazione di riferimento*  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ;
- $M \equiv M^T$  è la *matrice di massa*, o d'inerzia, simmetrica e definita positiva, perché l'energia cinetica  $T := \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}}$  è positiva per ogni  $\dot{\mathbf{q}}$ ;
- $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \mathbf{f}^{el}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}^v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  sono forze interne al sistema, pari alla somma di forze elastiche, dipendenti dalla sola posizione, e forze viscosse, che dipendono principalmente dalla velocità, ma che, a causa della cinematica finita, variano anche con la posizione dei corpi;
- $\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$  sono forze esterne, generalmente non conservative, che dipendono dalla posizione (ad esempio una forza follower), dalla velocità (ad esempio una forza aerodinamica), ed esplicitamente dal tempo.

## Il moto intorno all'origine

Si assume che, nello spazio di stato  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , il punto  $O := (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  sia un punto di equilibrio, sia cioè  $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{0}, \mathbf{0}; t) = \mathbf{0} \forall t$ . Si osservi che quest'ultima ipotesi non è in contraddizione con la presenza di forze esterne, le quali, tuttavia, non danno contributo alle equazioni lagrangiane del moto. Un esempio è offerto dalla trave di Eulero (o di Bolotin), la cui forza assiale, nella configurazione di riferimento rettilinea, *non* contribuisce alla flessione della trave, diversamente da quanto accade in una configurazione non banale.

Se si vuole analizzare il moto nell'intorno (piccolo ma finito) di  $O$ , risulta conveniente sviluppare le forze, interne ed esterne, in serie di MacLaurin, come segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^{int}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\mathbf{K}_e \mathbf{q} - \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}^{int}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t) &= -\mathbf{K}_g(t) \mathbf{q} - \mathbf{C}_g(t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}^{ext}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)\end{aligned}$$

in queste:

- $\mathbf{K}_e := - \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \mathbf{q}} \right|_O$  è la *matrice di rigidezza elastica*, valutata in  $O$ , simmetrica e definita positiva, perché l'energia elastica  $U := \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}$  è positiva per ogni  $\mathbf{q}$  (legame iperelastico monotonamente crescente);
- $\mathbf{C}_s := - \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_O$  è la *matrice di smorzamento strutturale*, simmetrica e definita positiva, perché l'energia dissipata  $\mathcal{D} := \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{q}}$  è positiva per ogni  $\dot{\mathbf{q}}$ ;
- $\mathbf{K}_g := - \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial \mathbf{q}} \right|_O$ , è la *matrice di rigidezza geometrica*, che descrive la parte lineare delle forze esterne posizionali (il cui effetto, appunto, si manifesta attraverso un cambio di geometria); poiché discende da forze generiche,  $\mathbf{K}_g$  è in generale non simmetrica ed indefinita; fanno eccezione le forze di gravità (ad esempio la forza di compressione che agisce sulla trave di Eulero), che, ammettendo un potenziale, conducono ad una matrice simmetrica e definita positiva; se  $\mathbf{f}^{ext}$  dipende esplicitamente dal tempo, allora anche  $\mathbf{K}_g$  dipende dal tempo.

- $\mathbf{C}_g := - \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_O$ , è la *matrice di smorzamento geometrica*<sup>11</sup>, che descrive la parte lineare delle forze esterne dipendenti dalla velocità (che si manifesta, attraverso l'acquisizione di un atto di moto  $\dot{\mathbf{q}}$  del sistema);  $\mathbf{C}_g$  è in generale non simmetrica ed indefinita; fanno eccezione le forze puramente dissipative (ad esempio la resistenza del mezzo), che conducono ad una matrice simmetrica e definita positiva; se  $\mathbf{f}^{ext}$  dipende esplicitamente dal tempo, allora anche  $\mathbf{C}_g$  dipende dal tempo.
- $\mathbf{n}^\alpha(\cdot)$  sono *vettori di nonlinearità*, somma di forme quadratiche, cubiche, ..., ciascuna omogenea nei suoi argomenti<sup>12</sup>.

# le equazioni del moto

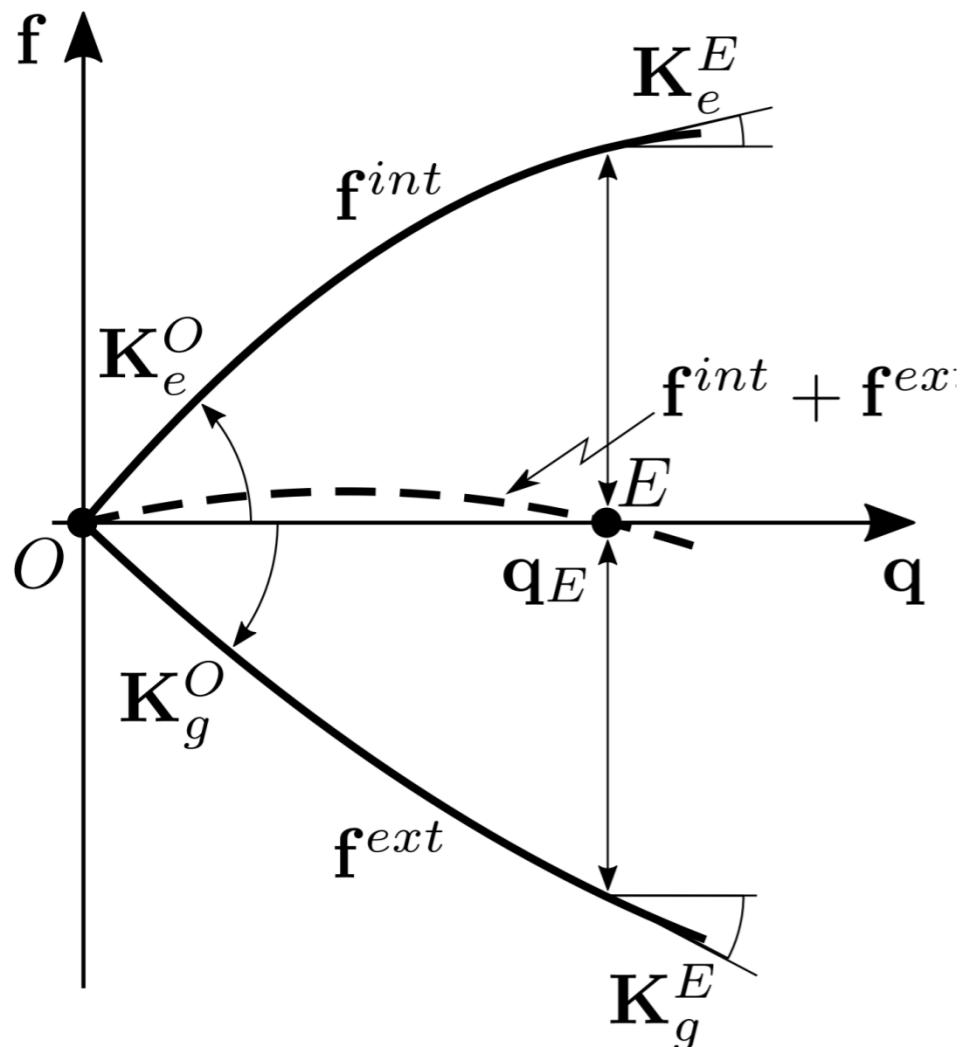
$$M\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_g) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g) \mathbf{q} = \mathbf{n}^{int}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{n}^{ext}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$$

Ci si riferirà alle matrici *somma degli effetti strutturali e geometrici*:

$$\mathbf{K} := \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g, \quad \mathbf{C} := \mathbf{C}_s + \mathbf{C}_g$$

quali matrici di rigidezza e smorzamento *totali*.

## Il moto intorno ad un punto di equilibrio generico



$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{q}_E, \mathbf{0}) + \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{q}_E, \mathbf{0}; t) = \mathbf{0} \quad \forall t$$

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{q}_E, \mathbf{0}) - \mathbf{K}_e^E (\mathbf{q} - \mathbf{q}_E) - \mathbf{C}_s^E \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}^{int}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_E, \dot{\mathbf{q}})$$

$$\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t) = \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{q}_E, \mathbf{0}; t) - \mathbf{K}_g^E(t) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_E) - \mathbf{C}_g^E(t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}^{ext}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_E, \dot{\mathbf{q}}; t)$$

dove:

$$\mathbf{K}_e^E := - \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \mathbf{q}} \right|_E, \quad \mathbf{C}_s^E := - \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_E,$$

$$\mathbf{K}_g^E := - \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial \mathbf{q}} \right|_E, \quad \mathbf{C}_g^E := - \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_E$$

sono le *matrici di rigidità e di smorzamento in E*, aventi il medesimo significato e proprietà delle omologhe  $\mathbf{K}_e, \mathbf{C}_s, \mathbf{K}_g, \mathbf{C}_g$  (in cui si è omesso il punto ‘privilegiato’  $O$ ).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_s^E + \mathbf{C}_g^E) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_e^E + \mathbf{K}_g^E) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_E) = \mathbf{n}^{int} ((\mathbf{q} - \mathbf{q}_E), \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{n}^{ext} ((\mathbf{q} - \mathbf{q}_E), \dot{\mathbf{q}}; t)$$

Le matrici *somma degli effetti strutturali e geometrici*:

$$\mathbf{K}^E := \mathbf{K}_e^E + \mathbf{K}_g^E, \quad \mathbf{C}^E := \mathbf{C}_s^E + \mathbf{C}_g^E$$

costituiscono le matrici di rigidezza e smorzamento in  $E$ .

# L'analisi di stabilità lineare

è sufficiente analizzare la sola parte lineare delle equazioni.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Per esempio

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x}$$

dove,  $\mathbf{x}$  è il vettore di stato e  $\mathbf{J}$  la matrice Jacobiana, definiti come:

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Nel prosieguo si farà prevalentemente uso della forma del secondo ordine

## Le condizioni di stabilità

Le equazioni del moto ammettono la soluzione particolare:

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} \exp(\lambda t)$$

con  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Poiché l'equazione è reale, se  $(\lambda, \mathbf{u})$  è una soluzione, allora anche la sua complessa coniugata  $(\lambda, \bar{\mathbf{u}})$  è soluzione  
 si perviene al seguente *problema agli autovalori* nella forma non-standard

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Il vettore  $\mathbf{u}$  è un autovettore del sistema lineare, e  $\lambda$  l'autovalore associato. Distinguendo gli autovalori complessi  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n_c$ ) da quelli reali  $\lambda_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n_r$ ), con  $2n_c + n_r = 2n$ , e nella ipotesi che tutti gli autovalori siano distinti, la soluzione generale delle equazioni del moto si scrive:

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^{n_c} [A_k \mathbf{u}_k \exp(\lambda_k t) + \bar{A}_k \bar{\mathbf{u}}_k \exp(-\lambda_k t)] + \sum_{h=1}^{n_r} a_h \mathbf{u}_h \exp(\lambda_h t)$$

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^{n_c} \left[ A_k \mathbf{u}_k \exp(\lambda_k t) + \bar{A}_k \bar{\mathbf{u}}_k \exp(-\lambda_k t) \right] + \sum_{h=1}^{n_r} a_h \mathbf{u}_h \exp(\lambda_h t)$$

dove le  $A_k \in \mathbb{C}$  ed  $a_h \in \mathbb{R}$  sono costanti arbitrarie, determinabili con le condizioni iniziali. Posto  $A_k := \frac{1}{2} a_k \exp(i\varphi_k)$ ,  $\lambda_k := \delta_k + i\omega_k$ ,  $\mathbf{u}_k := \mathbf{v}_k + i\mathbf{w}_k$ , con  $\delta_k, \omega_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k$  reali ed  $i$  l'unità immaginaria, la precedente può scriversi in forma reale, come:

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^{n_c} a_k \exp(\delta_k t) \left[ \mathbf{v}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) - \mathbf{w}_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \right] + \sum_{h=1}^{n_r} a_h \mathbf{v}_h \exp(\delta_h t)$$

Ciascuno degli  $n$  addendi è detto essere un *modo* di oscillazione. I modi complessi sono caratterizzati da oscillazioni armoniche di ampiezza decadente, se  $\delta_k < 0$ , o divergente, se  $\delta_k > 0$ . I modi reali sono caratterizzati da moti monotonamente decadenti ( $\delta_h < 0$ ) o divergenti ( $\delta_h > 0$ ). I modi armonici (in cui  $\lambda_k$  è puramente immaginario) sono caratterizzati da oscillazioni armoniche.

Dalla legge del moto si evince quanto segue.

1. Se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa, allora il moto ha ampiezza che decresce esponenzialmente nel tempo, cioè  $\|\mathbf{q}\| \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ . In tal caso, il punto di equilibrio è *asintoticamente stabile*.
2. Se anche solo uno degli autovalori, ad esempio il  $j$ -esimo, ha parte reale positiva, e tutti gli altri hanno parte reale negativa, allora il modo  $j$ -esimo diverge, mentre gli altri decadono, cosicché  $\|\mathbf{q}\| \rightarrow \infty$  per  $t \rightarrow \infty$ . In tal caso, il punto di equilibrio è *instabile*.
3. Se uno (o più) degli autovalori, ad esempio il  $j$ -esimo, ha parte reale nulla, mentre i rimanenti hanno parte reale negativa, allora si verifica il *caso critico dell'equilibrio*, per il quale l'analisi lineare di stabilità non è sufficiente a determinare la qualità dell'equilibrio.

# I sistemi conservativi

I sistemi conservativi non sono smorzati, né strutturalmente, né geometricamente. Il relativo problema agli autovalori diventa:

$$(\mathbf{K} - \Lambda \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

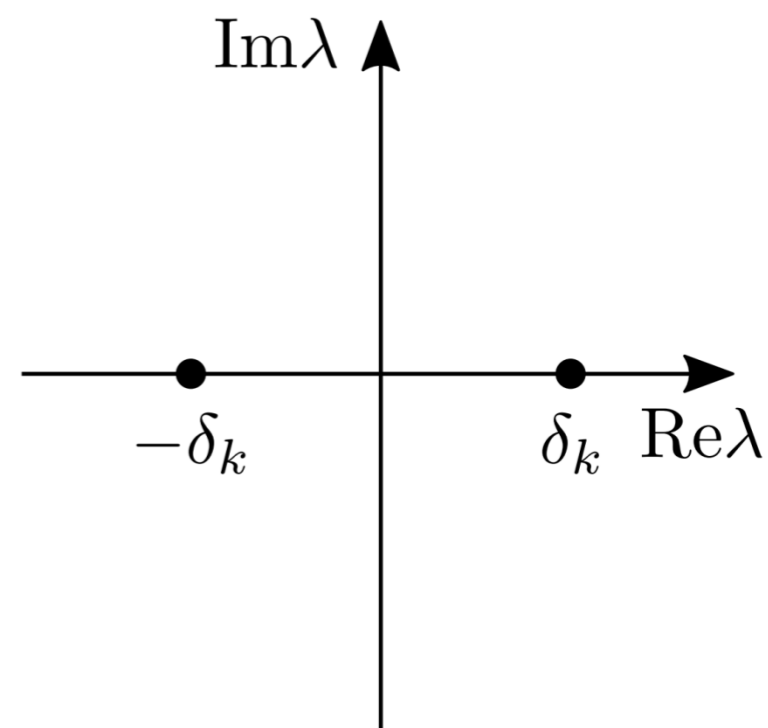
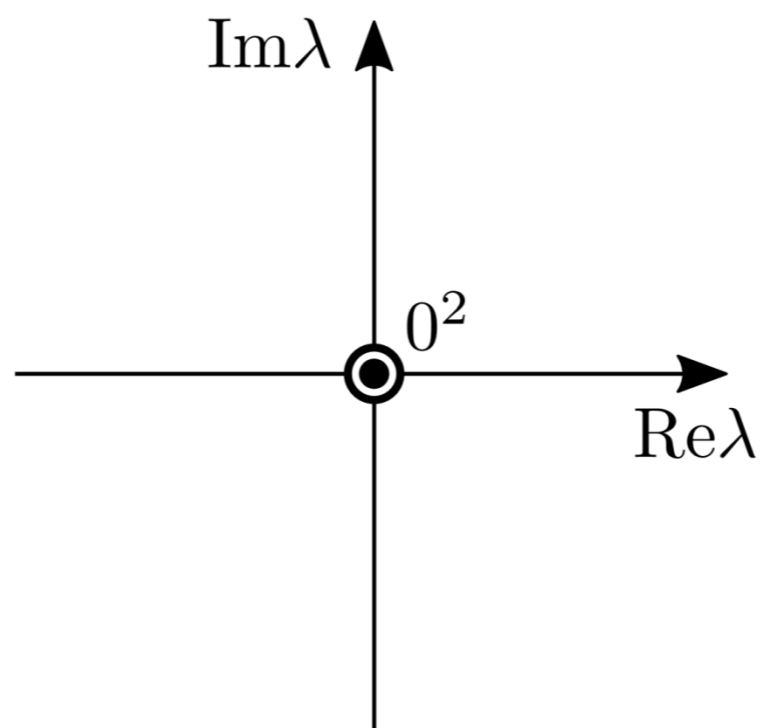
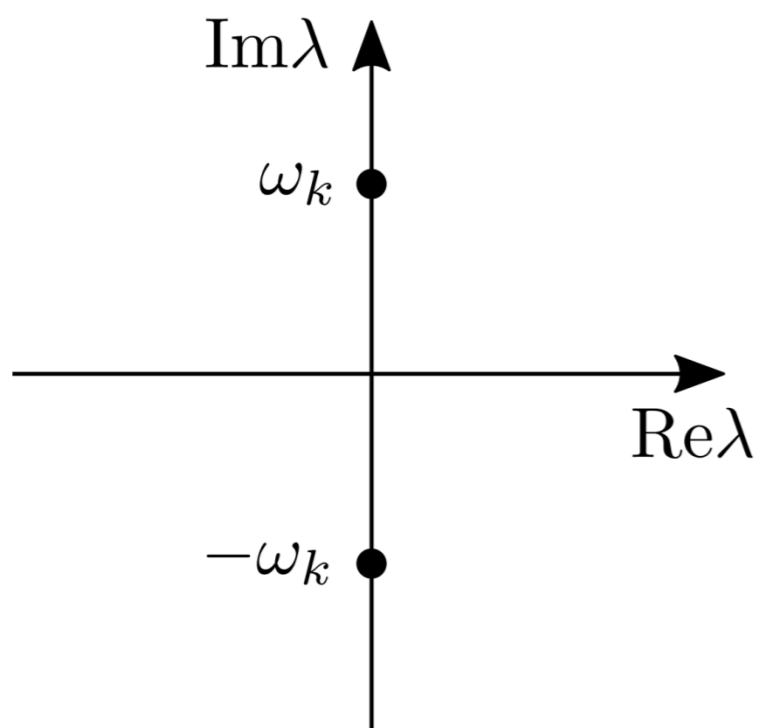
in cui, come si è detto,  $\mathbf{K} := \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g$  e dove si è introdotto:

$$\Lambda := -\lambda^2$$

Per mettere in relazione stabilità e proprietà delle matrici, si effettua la seguente discussione. Se  $(\Lambda_k, \mathbf{u}_k)$  è un'autosoluzione dell'equazione  $(\mathbf{K} - \Lambda \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , allora vale l'identità :

$$\Lambda_k = \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{K} \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k}$$

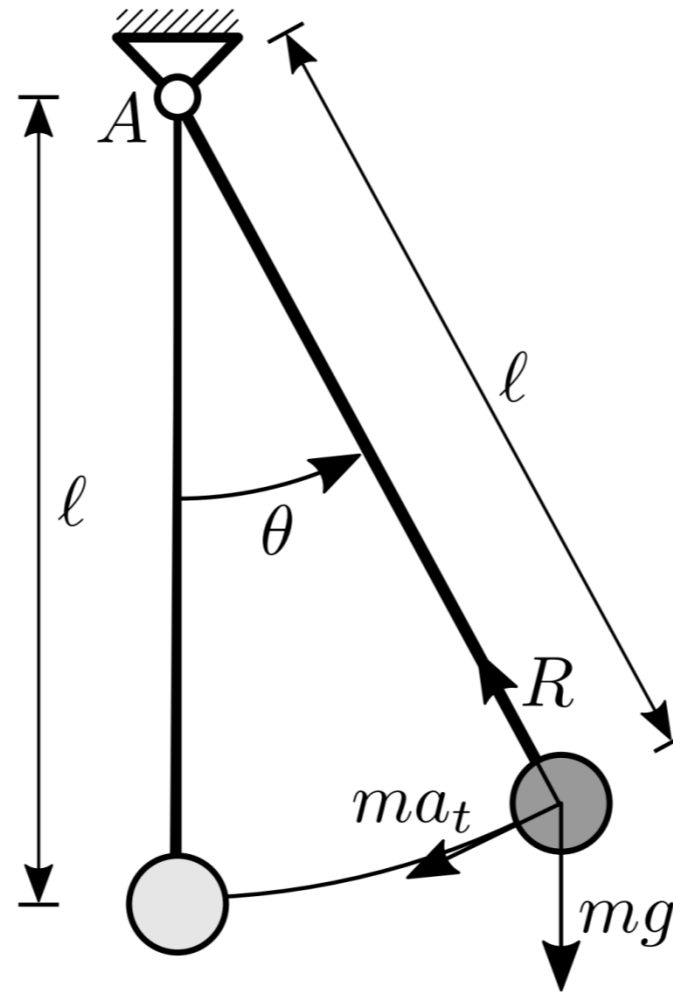
in cui tutte le quantità sono reali, nota come *Rapporto di Rayleigh*. Poiché la matrice di massa è definita positiva, il segno di  $\Lambda_k$  dipende esclusivamente dal numeratore di questo rapporto. Possono verificarsi tre casi:





1.  $\mathbf{K}$  è pure definita positiva, come accade in assenza di rigidità geometrica, ovvero quando questa è piccola rispetto a quella elastica. Allora  $\Lambda_k > 0 \forall k$ , ovvero  $\lambda_k = \pm i\omega_k$ . I modi nella  $\mathbf{u}_k$  sono tutti armonici (come nella dinamica delle strutture elastiche, che generalmente ignora gli effetti geometrici), cosicché è possibile confinare il moto rendendo le condizioni iniziali sufficientemente piccole. L'equilibrio è detto marginalmente stabile, ad indicare che gli autovalori sono tutti sul margine di stabilità (cioè sull'asse immaginario). Tuttavia questa situazione è robusta, nel senso che, se non si altera la conservatività del sistema, la stabilità marginale persiste.
2.  $\mathbf{K}$  è semi-definita positiva, esiste cioè un autovettore  $\mathbf{u}_k$  per il quale la forma quadratica, altrimenti positiva, si annulla. Poiché  $\Lambda_k = 0$ , esistono *due* autovalori nulli coincidenti. L'analisi lineare è insufficiente a determinare la stabilità
3.  $\mathbf{K}$  è indefinita, nel senso che la forma quadratica a numeratore assume valori negativi per almeno un autovettore  $\mathbf{u}_k$ . Allora  $\Lambda_k < 0$ , ovvero  $\lambda_k = \pm \delta_k$  è reale. Esistono dunque due modi reali nella  $\mathbf{u}_k$ , uno dei quali decade esponenzialmente, mentre l'altro diverge esponenzialmente. L'equilibrio è dunque instabile.

# il pendolo matematico



Si esemplificano i concetti precedentemente esposti con riferimento ad un sistema nonlineare ad un grado di libertà: il pendolo matematico piano. Questo è caratterizzato dalla lunghezza  $\ell$  del filo e dalla massa puntiforme  $m$  ad esso appesa. La generica configurazione del pendolo è descritta dall'angolo di deviazione dalla verticale  $\theta$ , che costituisce l'unico parametro lagrangiano

## Le equazioni del moto ed il ritratto di fase

Il moto del pendolo è governato dalla prima equazione cardinale della dinamica,  $F = ma$ , ovvero da  $F - ma = 0$ , coerentemente con il principio di d'Alembert. Qui  $F$  è la forza esterna risultante, comprensiva della forza peso  $mg$  diretta verso il basso, e della reazione del filo  $R$ , diretta secondo il filo stesso; inoltre  $a$  è l'accelerazione della massa. Proiettando l'equazione secondo la tangente alla traiettoria (normale al filo), tenuto conto che il modulo dell'accelerazione tangente  $a_t$  è la derivata temporale del modulo della velocità tangente  $v_t = \dot{\theta}l$ , è cioè  $a_t = m\ddot{\theta}l$ , dividendo per  $ml$ , si ottiene:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

equazioni differenziali del primo ordine:

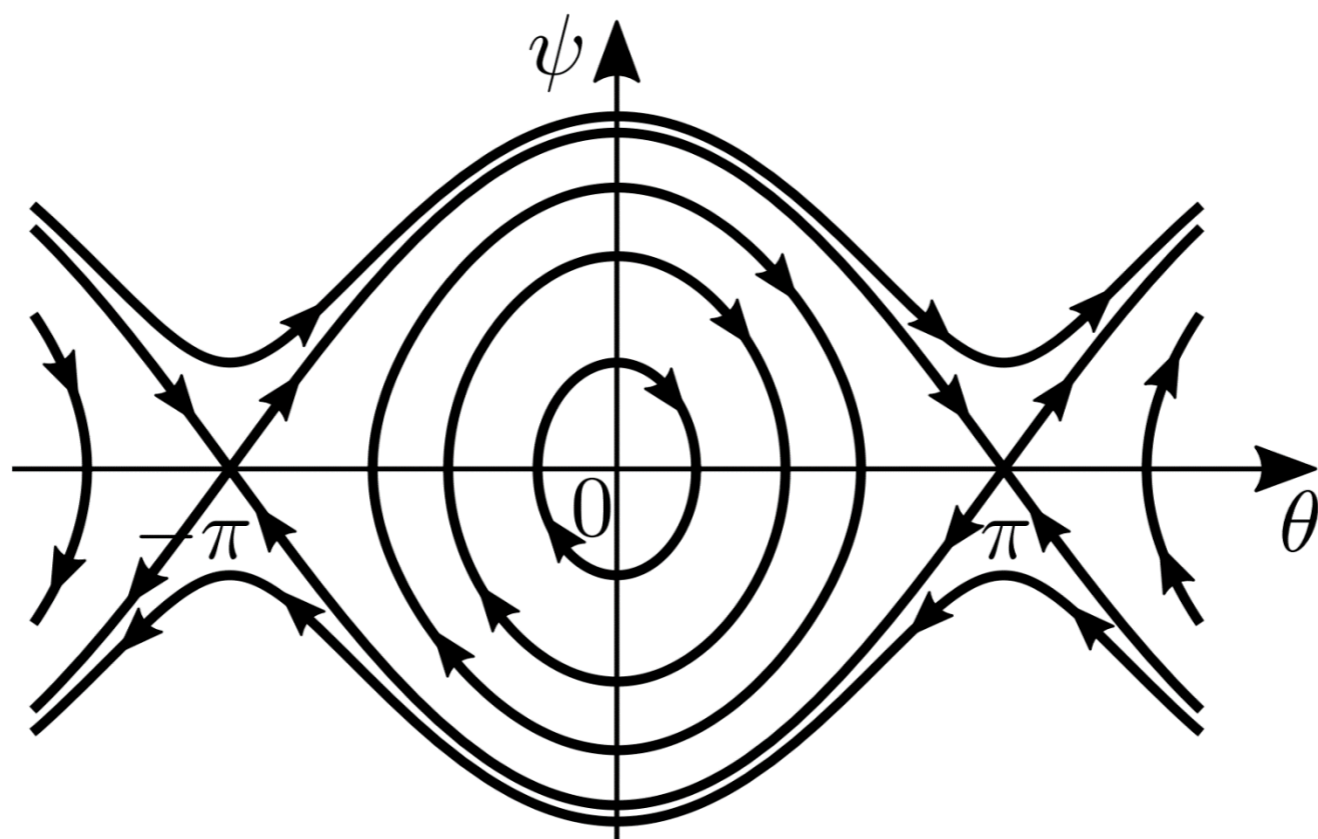
$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{pmatrix}$$

## I punti di equilibrio

L'equilibrio si verifica nei punti in cui si annulla il campo vettoriale, ovvero quando  $\psi = 0$  e  $\theta = \pm k\pi$  con  $k = 0, 1, 2, \dots$ , cioè quando il pendolo occupa la posizione verticale inferiore o superiore, con velocità nulla. I valori di  $k > 1$  corrispondono alle medesime posizioni fisiche, essendo  $\theta$  una variabile ciclica.

## Il ritratto di fase

- Il punto di equilibrio  $\theta = 0$  (posizione inferiore), è un *centro*, ed è circondato da *traiettorie chiuse*, su cui il moto è periodico. Nessuna traiettoria passa per il centro. Se l'equilibrio è perturbato con una piccola deviazione iniziale e/o piccola velocità iniziale, il moto si sviluppa su una traiettoria chiusa, rimanendo confinato. L'equilibrio è dunque stabile (ma non asintoticamente).
- I punti di equilibrio  $\theta = \pm\pi$  (posizione superiore), detti *sella*, sono attraversati da due traiettorie, dette *separatrici*, che collegano più punti sella. Una di queste è entrante nel punto, l'altra è uscente. Le separatrici dividono la regione delle traiettorie chiuse da quella delle *traiettorie aperte*, che occupano la restante parte del piano. Se l'equilibrio viene perturbato portando il sistema nella regione interna alle separatrici, il pendolo esegue moti oscillatori intorno alla posizione inferiore; se invece è portato nella regione esterna alle separatrici, esegue *moti rotatori*. Poiché il moto non può essere confinato, l'equilibrio è instabile.



Ritratto di fase del pendolo matematico piano.

## Il punto centro (posizione di equilibrio inferiore)

Sviluppando la nonlinearietà intorno a  $\theta = 0$ , si ha  $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots$ ; ritenendo solo i termini lineari, l'equazione del moto si scrive:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

in cui  $\omega^2 := \frac{g}{\ell}$  è detta pulsazione o *frequenza circolare*. Per risolvere l'equazione differenziale del secondo ordine, si pone  $\theta = \Theta e^{\lambda t}$ , in cui  $\Theta$  è una costante, da cui segue il problema agli autovalori:

$$(\lambda^2 + \omega^2)\Theta = 0$$

Questa ammette gli autovalori  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  e l'autovettore  $\Theta = 1$

## Il punto sella (posizione di equilibrio superiore)

Occorre sviluppare in serie di Taylor intorno a  $\theta = \pi$ . Posto  $\theta = \pi + \delta\theta$ , in cui  $\delta\theta$  è un angolo piccolo che indica la deviazione dalla posizione di equilibrio, si ha  $\sin \theta = \sin \pi + (\theta - \pi) \cos \pi + \dots = -\delta\theta$ . L'equazione del moto si scrive dunque:

$$\delta\ddot{\theta} - \omega^2 \delta\theta = 0$$

Espressa la soluzione come  $\delta\theta = \Theta e^{\lambda t}$ , segue il problema agli autovalori:

$$(\lambda^2 - \omega^2)\Theta = 0$$

che ammette gli autovalori  $\lambda_{1,2} = \pm\omega$  e l'autovettore  $\Theta = 1$

## Il criterio energetico di stabilità

$$\Pi = mgl(1 - \cos \theta)$$

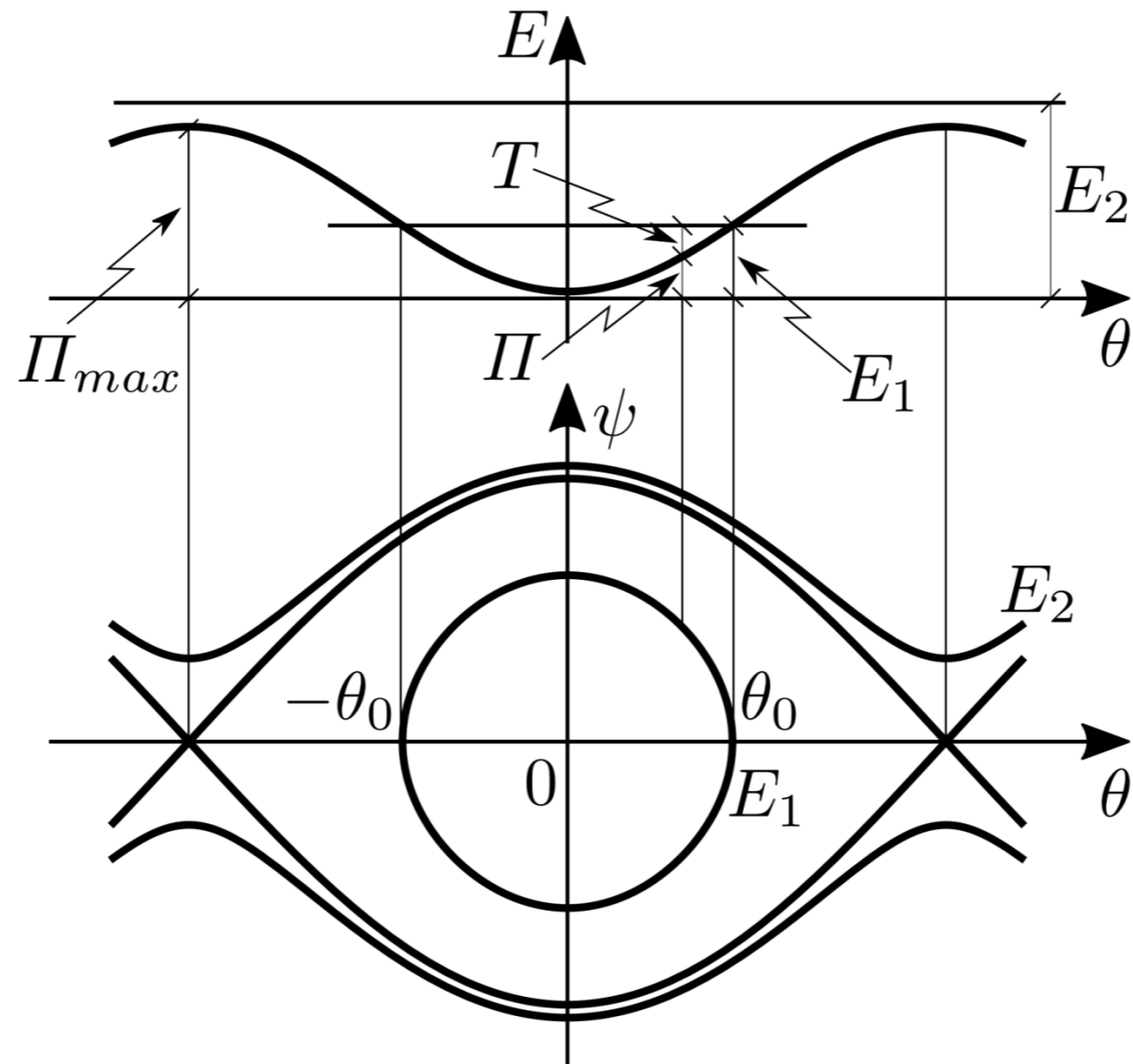
Le posizioni di equilibrio si determinano dalla condizione

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = mgl \sin \theta = 0$$

che è soddisfatta in  $\theta = 0, \pm\pi$ . La stabilità è determinata dal segno della derivata seconda dell'energia,  $\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = mgl \cos \theta$ , valutata in corrispondenza dei punti di equilibrio. Si ha:

- in  $\theta = 0$  è  $\left. \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \right|_0 = mgl > 0$ ; il punto è di minimo locale, per cui l'equilibrio è stabile;
- in  $\theta = \pm\pi$  è  $\left. \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \right|_{\pi} = -mgl < 0$ ; il punto è di massimo locale, per cui l'equilibrio è instabile.

Si riottengono così i risultati forniti dal criterio dinamico.



Ritratto di fase del pendolo, desunto dall'energia potenziale totale.

# L'effetto dello smorzamento

## L'equazione del moto

Rispetto al caso conservativo, sul pendolo agisce l'ulteriore forza  $f^v = c\dot{\theta}l$ , che rappresenta la resistenza del mezzo. Questa ha modulo proporzionale alla velocità della massa, attraverso l'impedenza  $c > 0$ , e verso opposto alla velocità

L'equazioni del moto del pendolo smorzato,

$$ml\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mg \sin \theta = 0$$

ovvero:

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega\dot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

avendo diviso per  $ml$  e posto  $2\xi\omega := \frac{c}{m}$  e  $\omega^2 := \frac{g}{l}$ .

- *Moto linearizzato intorno a  $\theta = 0$ . L'equazione che lo governa è:*

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

dalla cui equazione caratteristica,  $\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = 0$ , si ricavano gli autovalori:

$$\lambda_{1,2} = \left( -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \omega$$

Se  $0 < \xi < 1$  (smorzamento sottocritico), gli autovalori sono complessi coniugati, con parte reale negativa; se  $\xi \geq 1$  (smorzamento critico o sovracritico), gli autovalori sono entrambi reali con parte reale negativa. La posizione di equilibrio è, in ogni caso, asintoticamente stabile.



- *Moto linearizzato intorno a  $\theta = \pi$ . L'equazione che lo governa è:*

$$\delta\ddot{\theta} + 2\xi\omega\delta\dot{\theta} - \omega^2\delta\theta = 0$$

la cui equazione caratteristica  $\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda - \omega^2 = 0$  fornisce le radici:

$$\lambda_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 + 1}\right) \omega$$

Qualunque sia  $\xi > 0$  (sotto- o sopracritico), le radici sono entrambe reali, una negativa, l'altra positiva . La posizione di equilibrio è perciò instabile.

In accordo alla teoria generale, si conclude quindi che, essendo il pendolo matematico un sistema conservativo: (a) lo smorzamento modifica la stabilità marginale in stabilità asintotica; (b) lo smorzamento non può rendere stabile una posizione di equilibrio instabile.