Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Serie numeriche

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2022/23

LU 17 OTT 2022

MOTIVAZIONI: LE SERIE NUMERICHE, COME LE SUCCESSIONI, SI POSSONO USARE PER OTTENERE APPROSSIMAZIONI DI QUANTITÀ NOTEVOLI

ESEMPIO: ARCHIVIARE UN'IMMAGINE RISPARMIANDO SPAZIO SUL DISCO. ESEMPI CLASSICI:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2$$

OSSERVAZIONE: PONENDO $x = i\theta$ NELLO SVILUPPO DI e^x, AVENDO INDICATO CON i L'UNITÀ IMMAGINARIA, SI OTTIENE

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} + i\frac{\theta^5}{120} - \dots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \dots \\ &\quad + i\theta - i\frac{\theta^3}{6} + i\frac{\theta^5}{120} - \dots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \dots \\ &\quad + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots\right) \\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

IN PARTICOLARE, CON $\theta = \pi$ SI OTTIENE

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$ FORMULA DI EULERO.

IN SINTESI, UNA SERIE NUMERICA È LA SOMMA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ DI INFINITI $a_k \in \mathbb{R}$. IL VALORE NUMERICO DELLA SOMMA SI DEFINISCE MEDIANTE UN LIMITE PROCEDENDO COME SEGUE:

SI DEFINISCE $S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, $S_2 = a_0 + a_1 + a_2$, ...

IN GENERALE, SI SCRIVE $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

(SOMMA PARZIALE, DETTA ANCHE SOMMA RIDOTTA).

ESEMPIO ISPIRATO A

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2:$$

QUI $a_k = \frac{1}{2^k}$ PER $k = 0, 1, 2, \dots$ E IL PRIMO MEMBRO SI PUÒ SCRIVERE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$. SI TROVA $S_0 = a_0 = 1$, $S_1 = a_0 + a_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $S_2 = \frac{7}{4}$, ...

IN GENERALE, SAPPIAMO DAL 10 OTTOBRE CHE $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$.

QUESTO È, IN EFFETTI, UNO DEI POCHI CASI IN CUI SI TROVA S_n ESPLICITAMENTE.

UNA VOLTA DEFINITA S_n, SE IL LIMITE $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ESISTE, FINITO O INFINITO, SI DEFINISCE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

SE IL LIMITE È FINITO, SI DICE CHE LA SERIE CONVERGE AD UNA SOMMA FINITA. NELL'ESEMPIO DI CUI SOPRA, SI TROVA $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

OSSERVAZIONE: QUALUNQUE SUCCESSIONE (a_n) SI PUÒ VEDERE, SE SI VUOLE, COME UNA SERIE, IN QUANTO (06/10) SI HA CHE

$$a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-2} - a_{n-3} + a_{n-3} - a_{n-4} + \ldots + a_0 = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a'_k,$$

DOVE $a'_k = a_{k+1} - a_k$ È LA DIFFERENZA PRIMA.

QUINDI IL LIMITE $\lim_{n\to+\infty} a_n$ SI PUÒ VEDERE COME $\lim_{n\to+\infty} a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} a'_k$

ATTENZIONE: NON TUTTE LE SERIE CONVERGONO!

ESEMPIO: $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$. QUI ABBIAMO $S_n =$

$$= \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} 1, & \text{SE } n \text{ È PARI} \\ 0, & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

IN PARTICOLARE $S_0 = (-1)^0 = 1$, $S_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 0$, $S_2 = S_1 + (-1)^2 = 1, \ldots$

QUINDI LA SUCCESSIONE DELLE S_n NON AMMETTE LIMITE.

ESERCIZIO: STABILIRE IL CARATTERE DELLA SERIE GEOMETRICA $\sum_{k=0}^{+\infty} b^k$ CON $b \in [-1, +\infty)$ E CALCOLARE LA SOMMA NEI CASI IN CUI LA SERIE CONVERGE.

APPLICANDO LA DEFINIZIONE, SCRIVIAMO $S_n = \sum_{k=0}^{n} b^k = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$ E STUDIAMO IL LIMITE $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-b} + \frac{b^{n+1}}{b-1} \right).$$

SAPPIAMO DAL 7 OTTOBRE CHE SE $b \in (1, +\infty)$ SI HA $\lim_{n\to+\infty} b^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} b \cdot b^n = +\infty$

E QUINDI $S_n \to +\infty$ PERCHÉ SOMMA DI UNA COSTANTE E DI UNA SUCCESSIONE DIVERGENTE.

SE $b = 1$ SI HA $S_n = n+1 \to +\infty$.

SE $b \in (-1, 1)$ SAPPIAMO CHE $b^{n+1} = b \cdot b^n \to 0$

E QUINDI $\sum_{k=0}^{+\infty} b^k = \dfrac{1}{1-b}$. SE $b = -1$

SI OTTIENE LA SERIE INDETERMINATA $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$.

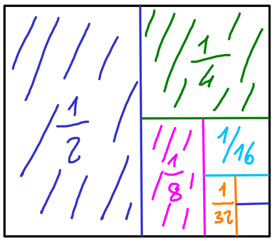
SE $b \in (-\infty, -1)$ SAPPIAMO DAL 7 OTTOBRE CHE LA SUCCESSIONE b^n È ILLIMITATA E NON HA LIMITE, QUINDI NEMMENO S_n HA LIMITE

(SE $S_n \to L$ SCRIVEREI $b^{n+1} = \left(S_n - \dfrac{1}{1-b}\right)(b-1)$ E TROVEREI IL LIMITE DI b^n, CHE PERÒ NON ESISTE!)

APPLICAZIONE IMMEDIATA: $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k} =$

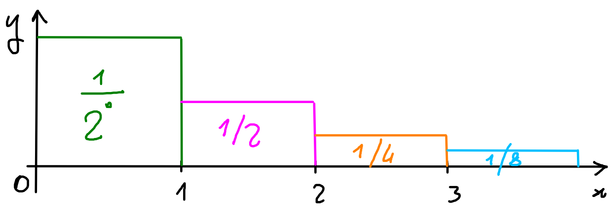
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - 2^0 = 2 - 1 = 1$$

MA 18 OTT 2022

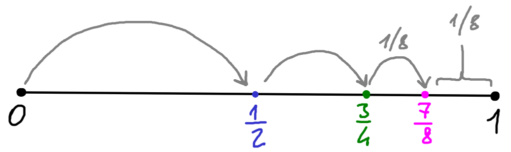


UN'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

UN'ALTRA INTERPRETAZIONE:



UNA TERZA INTERPRETAZIONE:



SI PUÒ RILEGGERE IN TERMINI DI SERIE GEOMETRICHE IL PARADOSSO DI ACHILLE E LA TARTARUGA.

GI 20 OTT 2022

SI PUÒ ANCHE TROVARE LA FRAZIONE GENERATRICE DI UN NUMERO DECIMALE PERIODICO.

ESEMPIO: $4,390909090\ldots = 4,3\overline{90}$

$$= \frac{43}{10} + 0,090909\ldots = \frac{43}{10} + 0,\overline{09} =$$

MILLESIMI
CENTESIMI

$$= \frac{43}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{10.000} + \frac{9}{1.000.000} + \ldots =$$

$$= \frac{43}{10} + \frac{9}{100}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{43}{10} + \frac{9}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}$$

$$= \frac{43}{10} + \frac{9}{100}\cdot\frac{100}{99} = \frac{43}{10} + \frac{1}{11} = \frac{473+10}{110} =$$

$$= \frac{483}{110}$$

MA 18 OTT 2022

I TEOREMI STUDIATI A PROPOSITO DELLE SUCCESSIONI NUMERICHE SI TRASFORMANO IN TEOREMI SULLE SERIE.

SOMMA DI DUE SERIE TERMINE A TERMINE:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$ STESSO DISCORSO QUANDO SI SOMMANO LE SERIE DI $\cos\theta$ E DI $\operatorname{sen}\theta$ PER OTTENERE $e^{i\theta}$.

SE DUE SERIE CONVERGONO AD UNA SOMMA FINITA, SCRIVIAMO $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = a$ E $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k = b$

ALLORA LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k+b_k)$ CONVERGE, E SI HA CHE $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k+b_k) = a+b$.

DIMOSTRAZIONE: LA SUA SOMMA RIDOTTA È

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

PER IPOTESI, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = a$ E

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k = b$ E LA TESI SEGUE DAL TEOREMA SULLA SOMMA DEI LIMITI.

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: SE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ HA SOMMA S, FINITA O INFINITA, E SE PRENDO λ (LAMBDA) IN $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ALLORA LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda a_k$ HA SOMMA λS, INTENDENDOSI CHE SE $S=\pm\infty$ ALLORA λS È INFINITO CON IL SEGNO DATO DATO DALLA REGOLA DEI SEGNI.

MA 18 OTT 2022

DIMOSTRAZIONE: LE SOMME PARZIALI DELLA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k$ SONO $\sum_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k$.

SICCOME $\sum_{k=0}^{n} a_k \longrightarrow S$ PER IPOTESI, LA TESI SEGUE DAL TEOREMA SUL LIMITE DEL PRODOTTO, E DALLA SUA ESTENSIONE AL CASO IN CUI $S = \pm\infty$.

LA COMPLETEZZA DELL'INSIEME $\mathbb{R}$ SI RIPERCUOTE SULLE SERIE: SE $a_k \geq 0$ DEFINITIVAMENTE, SI HA CHE $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k =$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq$$

S_n DEFINITIVAMENTE, QUINDI LA SUCCESSIONE (S_n) AMMETTE LIMITE (FINITO O INFINITO):

LE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI NON SONO INDETERMINATE. ESEMPI: LE SERIE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$ NON SONO INDETERMINATE.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE CONVERGONO SE E SOLO SE $\alpha \in (1, +\infty)$.

TEOREMA DEL CONFRONTO: SE $0 \leq a_k \leq b_k$ PER OGNI k, ALLORA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

ESEMPIO: $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)\, 2^k} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} =$$

$= 2$ QUINDI LA PRIMA SERIE CONVERGE.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL CONFRONTO PER LE SERIE: PER IPOTESI, $a_k \leq b_k$ PER OGNI k, QUINDI $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k$ PER OGNI n.

INOLTRE LE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI NON SONO INDETERMINATE, QUINDI LA TESI

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO PER LE SUCCESSIONI $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_n$ E $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_n$.

LA CONVERGENZA ASSOLUTA

DATA UNA QUALUNQUE SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ NON È INDETERMINATA.

SE CONVERGE AD UNA SOMMA FINITA, SI DICE CHE LA SERIE DATA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE. ESEMPIO: LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right)$$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE. ANCHE LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right)$$ LO È PERCHÉ

$$\left|\frac{(-1)^k}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right| \leq \left|\frac{(-1)^k}{2^k}\right| + \left|\frac{1}{3^k}\right| =$$

$= \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}$ E QUINDI $\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^k}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right|$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) < +\infty$$

TEOREMA: DATA UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, SE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ CONVERGE AD UNA SOMMA FINITA, ALLORA ANCHE LA SERIE DATA CONVERGE.

DIMOSTRAZIONE: STUDIAMO LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + |a_k|)$. OSSERVIAMO CHE $a_k + |a_k| \geq 0$ PER OGNI k PERCHÉ $|x| \geq -x$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. INOLTRE

$$a_k + |a_k| \leq |a_k| + |a_k| = 2|a_k|.$$

LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} 2|a_k| = 2\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ CONVERGE, QUINDI PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + |a_k|) < +\infty.$$

LA SERIE CONVERGE

PER FINIRE, BASTA OSSERVARE CHE $a_k = (a_k + |a_k|) - |a_k|$ QUINDI

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + |a_k|) - \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$$

DUNQUE LA SERIE DATA CONVERGE PERCHÉ È LA DIFFERENZA TERMINE A TERMINE DI DUE SERIE CONVERGENTI.

GI 20 OTT 2022

LA SERIE DI MENGOLI

È LA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, LA CUI SOMMA RIDOTTA SI PUÒ ESPRIMERE COME

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$$

QUINDI SI PUÒ SCRIVERE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

SE NE PUÒ DEDURRE LA CONVERGENZA DELLA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. SI HA $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k(k+1)}$ PER OGNI k, PERÒ $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$. VERIFICA: MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI PER $k(k+1)$ DIVENTA $1 + \frac{1}{k} \leq 2$, CHE È VERA PER OGNI k. SAPENDO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2$ PER LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA, LA CONVERGENZA DELLA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO.

ESERCIZIO: DEDURRE LA CONVERGENZA DELLA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ PER OGNI $\alpha \in (2, +\infty)$. L'ESERCIZIO SI PUÒ ANCHE AFFRONTARE MEDIANTE IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

GI 20 OTT 2022

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

SERVE PER STABILIRE LA CONVERGENZA DI UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ A TERMINI $a_k \geq 0$ SAPENDO CHE UN'ALTRA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ A TERMINI POSITIVI CONVERGE.

TEOREMA: SE IL RAPPORTO $\frac{a_k}{b_k}$ È LIMITATO, LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CONVERGE.

DIMOSTRAZIONE: SE IL RAPPORTO $\frac{a_k}{b_k}$ È LIMITATO, ESISTE UNA COSTANTE M TALE CHE $\frac{a_k}{b_k} \leq M$ PER OGNI k, QUINDI $a_k \leq M b_k$. LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} M b_k = M \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ CONVERGE PER IPOTESI, QUINDI LA CONVERGENZA DELLA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO.

APPLICAZIONE: SO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ E VOGLIO STUDIARE LA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ CON $\alpha \in [2, +\infty)$. PONGO $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ E $b_k = \frac{1}{k(k+1)}$, E VEDO SE IL RAPPORTO $\frac{a_k}{b_k}$ È LIMITATO. SI HA CHE

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k(k+1)}{k^\alpha} = \frac{k+1}{k^{\alpha-1}} = \frac{1}{k^{\alpha-2}} + \frac{1}{k^{\alpha-1}} \leq 2$$

PERCHÉ $k^{\alpha-1} \geq k^{\alpha-2} \geq 1$ PER OGNI $k \geq 1$.

SI NOTI CHE, NELLE APPLICAZIONI, SI SUOLE CALCOLARE IL LIMITE $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k}$: SE IL LIMITE È FINITO, IL RAPPORTO a_k/b_k È LIMITATO.

LU 24 OTT 2022

SOMMA DEI PRIMI n INTERI POSITIVI:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

LO SI VEDE APPLICANDO IL PRINCIPIO DI INDUZIONE (CORSO DI ALGEBRA 1):

BASE DELL'INDUZIONE È IL CASO $n=1$. IN TAL CASO SI HA

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{1} k = 1 \quad \text{E}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$$

E SI CONSTATA L'UGUAGLIANZA.

PASSO INDUTTIVO: AMMESSO CHE RISULTI $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ PER UN VALORE ARBITRARIO DI $n \geq 2$, VERIFICHIAMO CHE $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. BASTA SCRIVERE

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} k + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n+2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

PER IL PRINCIPIO DI INDUZIONE, SI DEDUCE CHE $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ QUALUNQUE SIA n.

APPLICAZIONE: $\sum_{k=1}^{+\infty} k = +\infty$. INFATTI

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

LO SI VEDE ANCHE PER CONFRONTO:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \geq \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

LU 24 OTT 2022

CRITERI DI CONVERGENZA

① CONDIZIONE NECESSARIA (MA NON SUFFICIENTE)

AFFINCHÉ $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CONVERGA AD UNA SOMMA FINITA È CHE $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

② CRITERIO DI CAUCHY: CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CONVERGA AD UNA SOMMA FINITA È CHE LA SUCCESSIONE (S_n) SIA FONDAMENTALE, CIOÈ CHE $S_n - S_k \xrightarrow[n,k\to+\infty]{} 0$,

OVVERO $S_n - S_k = \sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i =$

$$= \sum_{i=k+1}^{n} a_i \xrightarrow[n,k\to+\infty]{} 0.$$

IN PARTICOLARE, PONENDO $k = n-1$, SI HA LA CONDIZIONE NECESSARIA

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i = \sum_{i=n}^{n} a_i = a_n \longrightarrow 0$$

③ UN'ALTRA CONDIZIONE NECESSARIA SI OTTIENE PONENDO $n = 2k$:

$$\sum_{i=k+1}^{2k} a_i \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

APPLICAZIONE ALLA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

SAPPIAMO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$ SE $\alpha \geq 2$.

PER $\alpha = 0$ SI HA $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$

PER $\alpha \in (-\infty, 0)$ SI HA $\frac{1}{k^\alpha} = k^{-\alpha} \geq 1$ PER OGNI $k = 1, 2, 3, \ldots$ QUINDI $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$.

RESTA DA STUDIARE $\alpha \in (0,2)$. IL CASO PIÙ NOTEVOLE È LA SERIE ARMONICA $(\alpha = 1)$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

VERIFICHIAMO L'ASSERTO ANDANDO A CONSIDERARE

$$\sum_{i=k+1}^{2k} \frac{1}{i} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2} \not\to 0$$

NE SEGUE CHE, SE $\alpha < 1$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geq$

$$\geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

RESTA DA STUDIARE IL CASO $\alpha \in (1,2)$. SI HA CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$. ESSENDO $k^\alpha \geq k \to +\infty$, LA CONDIZIONE NECESSARIA $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$ È SODDISFATTA, MA CIÒ NON È SUFFICIENTE.

PER VERIFICARE CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$ SE $\alpha > 1$

RICORDIAMO CHE I TERMINI SONO POSITIVI E OSSERVIAMO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} +$

$$+ \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{8^\alpha} + \ldots + \frac{1}{15^\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{16^\alpha} + \ldots + \frac{1}{31^\alpha} + \ldots \leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} \cdot 2 +$$

$$+ \frac{1}{4^\alpha} \cdot 4 + \frac{1}{8^\alpha} \cdot 8 + \frac{1}{16^\alpha} \cdot 16 + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^k)^\alpha} \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^k)^{\alpha-1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k < +\infty \quad \text{SERIE GEOMETRICA}$$

$b = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \in (0,1)$ PERCHÉ $\alpha - 1 > 0$

MA 25 OTT 2022

$\boxed{\text{ALTRI CRITERI DI CONVERGENZA}}$

① CRITERIO DEL RAPPORTO: DATA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CON $a_k \neq 0$ GUARDIAMO $\frac{a_{k+1}}{a_k}$. NOTA:

NELLA SERIE GEOMETRICA $\sum_{k=0}^{+\infty} b^k$ SI HA $a_k = b^k$ E QUINDI $\frac{a_{k+1}}{a_k} = b$. CRITERIO DEL RAPPORTO: SE $\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell < 1$

LA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE.

APPLICAZIONE: LA SERIE

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots$$

CONVERGE QUALUNQUE SIA $x \in \mathbb{R}$. INFATTI

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell = 0.$$

IN QUANTO $a_k = \frac{x^k}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$ SE $k \geq 2$

ESERCIZIO: STABILIRE PER QUALI $x \in \mathbb{R}$ LE SERIE

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$$

CONVERGONO.

MA 25 OTT 2022

DIMOSTRAZIONE DEL CRITERIO DEL RAPPORTO:

SE $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \longrightarrow \ell < 1$, PRENDO UN $b \in (\ell, 1)$, TIPO $b = \frac{\ell+1}{2}$. PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE RISULTA $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < b < 1$ PER OGNI $k \geq k_0$. QUINDI $|a_{k_0+1}| < b\,|a_{k_0}|$,

$$|a_{k_0+2}| < b\,|a_{k_0+1}| < b^2 |a_{k_0}|,$$

$$|a_{k_0+3}| < b\,|a_{k_0+2}| < b^3 |a_{k_0}|, \ \dots$$

QUINDI $|a_{k_0+i}| < b^i |a_{k_0}|$ PER OGNI $i > 0$

MA ALLORA $\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{k_0+i}| < |a_{k_0}| \sum_{i=1}^{+\infty} b^i < +\infty$

E LA TESI SEGUE.

② CRITERIO DELLA RADICE:

SE $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell \in [0,1)$

ALLORA LA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE. NOTA: SE $a_k = b^k$ ALLORA $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|b|^k} = |b| \longrightarrow |b|$.

DIMOSTRAZIONE: PRENDO $b \in (\ell, 1)$ ED HO $\sqrt[k]{|a_k|} < b$ PER OGNI $k \geq k_0$ QUINDI $|a_k| < b^k$ E LA TESI SEGUE PER CONFRONTO.

APPLICAZIONE ALLA SERIE

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

DEFINIAMO $k! = \begin{cases} 1, & \text{SE } k = 0 \\ 1\cdot 2 \cdots k, & \text{SE } k > 0 \end{cases}$

LA SERIE DIVENTA $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ E STUDIAMO

$$\sqrt[k]{\frac{|x^k|}{k!}} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k!}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \text{PERCHÉ}$$

$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k!} = +\infty$. QUEST'ULTIMO LIMITE RESTA DA VERIFICARE. PRENDIAMO $M > 1$ E VEDIAMO SE $\sqrt[k]{k!} > M$ DEFINITIVAMENTE, CIOÈ VEDIAMO SE $k! > M^k$ PER OGNI $k \geq k_0$ CHE DIPENDERÀ DA M.

VERIFICHIAMO CHE $\frac{M^k}{k!} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ E QUINDI $\frac{M^k}{k!} < 1$ DEFINITIVAMENTE.

SAPPIAMO INFATTI CHE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$ CONVERGE PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO E QUINDI (CONDIZIONE NECESSARIA)

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{M^k}{k!} = 0.$$

IN ALTERNATIVA, SI PUÒ ANCHE SCRIVERE

$$\frac{k!}{M^k} = \frac{1\cdot 2 \cdots k}{M\cdot M \cdots M} = \left(\frac{1\cdot 2\cdots}{M \cdots M}\right)\left(\frac{2M \cdots k}{M \cdots M}\right) >$$

$$C \cdot 2 \cdots 2 = C\, 2^{k-2M+1} \longrightarrow +\infty$$

MA 25 OTT 2022

COMPLETIAMO LO STUDIO DI QUESTI DUE CRITERI OSSERVANDO CHE SE

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell > 1 \quad \text{LA SERIE } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

NON CONVERGE PERCHÉ RISULTA $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI $|a_{k+1}| > |a_k|$ E LA CONDIZIONE NECESSARIA NON È SODDISFATTA.

STESSA CONCLUSIONE SE $\sqrt[k]{|a_k|} \to \ell > 1$, IN QUANTO $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$ DEFINITIVAMENTE, DUNQUE $|a_k| > 1$.

ESERCIZIO: APPLICATE I DUE CRITERI ALLA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ PER $\alpha \in \mathbb{R}$.

GI 27 OTT 2022

USO DELLE SERIE PER VERIFICARE CHE
$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$$

DATA UNA SUCCESSIONE A TERMINI $a_k \neq 0$, SE $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ ALLORA LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CONVERGE PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO E PERCIÒ (CONDIZIONE NECESSARIA) $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ (CRITERIO DEL RAPPORTO PER LE SUCCESSIONI).

APPLICAZIONE: $\lim_{k\to+\infty} \frac{M^k}{k!} = 0$ (25/10)

APPLICAZIONE: $\lim_{k\to+\infty} \frac{k^k}{3^k k!} = 0$. INFATTI, POSTO $a_k = \frac{k^k}{3^k k!}$ SI TROVA $a_{k+1} = \frac{(k+1)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)!}$

$$= \frac{(k+1)^k (k+1)}{3^{k+1} k! (k+1)} = \frac{(k+1)^k}{3^{k+1} k!} \quad \text{E QUINDI} \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{1}{3}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to \frac{e}{3} < 1.$$

GI 27 OTT 2022

③ CRITERIO DI LEIBNIZ: SE $a_k \to 0$ E SE $a_k \geq a_{k+1}$ PER OGNI k, ALLORA LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$ CONVERGE AD UNA SOMMA FINITA.

ESEMPIO: LA SERIE $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ (SERIE DI LEIBNIZ) CONVERGE PERCHÉ LA SI PUÒ SCRIVERE $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$, QUINDI, POSTO $a_k = \frac{1}{2k+1}$, SI VEDE CHE

$a_k = \frac{1}{2k+1} \longrightarrow 0$ E $a_k > a_{k+1}$.

LEIBNIZ TROVÒ CHE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ (SEGUIRE IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 3).

PROBLEMA: LA SERIE $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots$ CONVERGE A UNA SOMMA FINITA? E LA SERIE $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \dots$? LA PRIMA SI PUÒ SCRIVERE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4k+1}$. POSTO $a_k = \frac{1}{k}$ E $b_k = \frac{1}{4k+1}$, IL RAPPORTO $\frac{a_k}{b_k} = 4 + \frac{1}{k} \leq 5$ È LIMITATO E QUINDI, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO, SE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4k+1} < +\infty$ ALLORA $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} < +\infty$. SAPENDO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ SI DEDUCE CHE $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k+1} = +\infty$.

OSSERVAZIONE: LA SERIE $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$ SI PUÒ SCRIVERE $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE DEL CRITERIO DI LEIBNIZ:

VERIFICHIAMO CHE $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ CONVERGE AD UN LIMITE FINITO. PER LA MONOTONIA DI a_k SI HA

$$S_{2n+2} = S_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq S_{2n}$$

$$S_{2n+3} = S_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq S_{2n+1}$$

$$S_0 \geq S_{2n} \geq \boxed{S_{2n} - a_{2n+1} = S_{2n+1}} \geq S_1$$

PER LA COMPLETEZZA DELL'INSIEME $\mathbb{R}$, LE DUE SUCCESSIONI (S_{2n}) E (S_{2n+1}) CONVERGONO AD UN LIMITE FINITO: LO STESSO LIMITE, GIACCHÉ $a_{2n+1} \longrightarrow 0$ PER IPOTESI.