

Richiami di Meccanica del Continuo

Lo stato di sforzo

MS AC

6 ottobre 2022

Indice

1 Il continuo di Cauchy	1
1.1 Ipotesi del continuo di Cauchy	2
2 Le condizioni di equilibrio	3
3 Lo sforzo di Cauchy	4
4 Interpretazione geometrica del tensore degli sforzi	6
5 Proprietà del tensore degli sforzi	7
5.1 Legge di trasformazione	7
5.2 Simmetria	7
6 Invarianti	9
7 Le equazioni d'equilibrio	10
8 Condizioni al contorno	11

Questa dispensa è parzialmente ispirata al Capitolo 2 del libro:
Corradi Dell'Acqua, L. *Meccanica delle strutture 1. Il comportamento dei corpi continui*.
McGraw-Hill, Milano, 2010.

1 Il continuo di Cauchy

Per studiare correttamente lo stato di sforzo di un mezzo continuo, è necessario introdurre preventivamente il concetto stesso di continuo. Nell'ambito di questa dispensa ci si limiterà a considerare mezzi comunemente denotati come *continuo di Cauchy*. Relativamente alla notazione introdotta in Fig. 1, si consideri un solido che occupa una certa regione di volume V delimitata da una superficie S . Tale solido è soggetto a due famiglie di forze che agiscono su di esso: (i) attraverso il suo volume; (ii) attraverso la sua superficie. Alcune di queste forze agiscono dall'interno altre dall'esterno e saranno dunque dette *forze interne* e *forze esterne*.

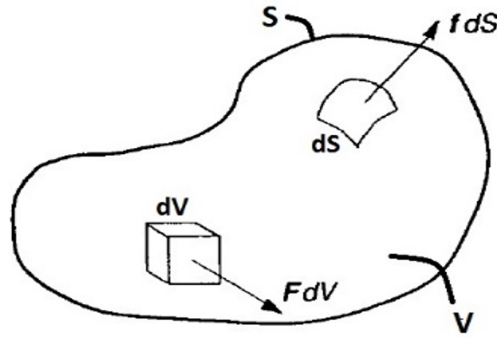


Figura 1:

1.1 Ipotesi del continuo di Cauchy

Si consideri una porzione finita del solido con volume ΔV . Sia $\Delta \vec{R}$ la risultante di tutte le forze applicata nel baricentro e $\Delta \vec{M}$ il momento risultante. Il limite per un volume infinitesimo del rapporto tra $\Delta \vec{R}$ e ΔV

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta V} = \vec{F} \quad (1.1)$$

esiste finito e rappresenta una densità di forza \vec{F} per unità di volume. Analogamente, si può considerare il limite del rapporto tra momento e volume

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta V} = \vec{0} \quad (1.2)$$

dove il fatto che questo limite sia nullo rappresenta **un'ipotesi fondante del continuo di Cauchy**. Quando tale limite (e il corrispondente per il momento per unità di superficie) esiste finito ed è diverso da zero allora si ottengono dei continui più generali di quello di Cauchy, detti polari o di Cosserat.

Una discussione simile può essere condotta considerando una porzione della superficie S , su cui agiscono una risultante $\Delta \vec{R}$ e un momento risultante $\Delta \vec{M}$. L'ipotesi di continuo di Cauchy si scrive allora

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta S} = \vec{f} \quad (1.3)$$

per la densità di forza di superficie e

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta S} = \vec{0} \quad (1.4)$$

per il momento. Come è evidente dalle relazioni scritte, in un continuo di Cauchy a livello locale si può trasmettere solo una densità di forze.

Remark \vec{F} e \vec{f} sono forze continue. Infatti, nella descrizione del mezzo continuo di Cauchy non esistono forze concentrate. Una forza concentrata può essere pensata solo come la risultante di azioni locali su una porzione piccola di volume o di superficie (si veda Fig. 2).

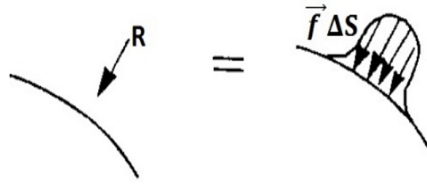


Figura 2:

Le forze \vec{F} e \vec{f} dipendono dalla coordinata del punto di applicazione e sono, dunque, funzioni continue in tre variabili. **Esse devono garantire l'equilibrio del solido.**

2 Le condizioni di equilibrio

Si vuole determinare adesso le condizioni di equilibrio per un mezzo continuo. Come è noto, tale equilibrio sarà possibile nell'ipotesi in cui la risultante delle forze e quella dei momenti siano entrambe nulle

$$\vec{R} = \vec{0} \quad (2.1)$$

$$\vec{M}_{(\mathcal{O})} = \vec{0} \quad (2.2)$$

dove il momento è calcolato rispetto a un qualsiasi polo scelto arbitrariamente.

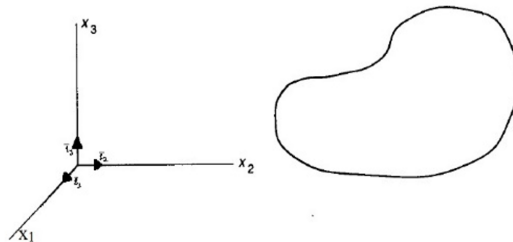


Figura 3:

Poiché le forze da considerare sono di due tipologie differenti (di superficie e di volume) allora la condizione di risultante nulla può essere scritta come (equazione vettoriale, corrispondente a tre equazioni scalari)

$$\int_S \vec{f} dS + \int_V \vec{F} dV = \vec{0} \quad (2.3)$$

Analogamente si può studiare l'equilibrio sui momenti $\vec{M}_{(\mathcal{O})} = \vec{0}$. Si consideri un generico punto \mathcal{P} collocato sulla superficie. Su questo punto sia applicata la forza di superficie \vec{f} e si consideri come polo l'origine \mathcal{O} degli assi. Il momento rispetto a \mathcal{O} sarà allora l'integrale del prodotto vettoriale tra $\vec{\mathcal{P}\mathcal{O}}$ e $\vec{f} dS$. Analogamente si può ragionare per un punto \mathcal{P} collocato all'interno di un volume infinitesimo dV . Il momento sarà l'integrale di del prodotto vettoriale tra $\vec{\mathcal{P}\mathcal{O}}$ e $\vec{F} dV$. In definitiva, si ha che

$$\vec{M}_{(\mathcal{O})} = \int_S \vec{\mathcal{P}\mathcal{O}} \times \vec{f} dS + \int_V \vec{\mathcal{P}\mathcal{O}} \times \vec{F} dV \quad (2.4)$$

Esercizio Con riferimento alla notazione di Fig. 4, scrivere in componenti l'Eq. (2.4).

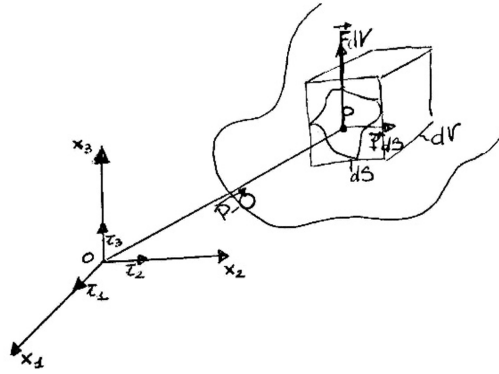


Figura 4:

3 Lo sforzo di Cauchy

Per introdurre il concetto di *sforzo*, assumiamo che il solido considerato sia in equilibrio. Immaginiamo di tagliare virtualmente il solido con un piano su cui fissiamo un punto \mathcal{P} e individuiamo una piccola superficie che chiamiamo $d\Sigma$ (si veda Fig. 5). Per individuare il piano passante per \mathcal{P} (infatti per un punto passano infiniti piani) consideriamo la normale uscente \vec{n}_α dalla faccia di una delle metà del solido; sulla faccia opposta avremo, invece, la normale $-\vec{n}_\alpha$.

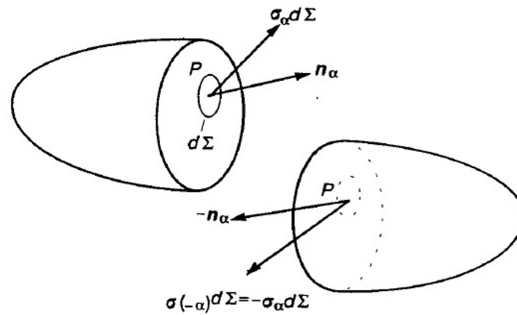


Figura 5:

Anche in questo caso possiamo considerare forze agenti sulla superficie che danno luogo a una risultante \vec{R} e un momento risultante \vec{M} . Assumiamo, inoltre, che il solido sia un continuo Cauchy. Questa ipotesi implica che

$$\lim_{d\Sigma \rightarrow 0} \frac{d\vec{R}}{d\Sigma} = \vec{\sigma}_\alpha \quad (3.1)$$

$$\lim_{d\Sigma \rightarrow 0} \frac{d\vec{M}}{d\Sigma} = \vec{0} \quad (3.2)$$

Le forze che le due porzioni si scambiano è individuata dalla densità $\vec{\sigma}_\alpha$, nota come *vettore sforzo*. Il vettore sforzo produce la risultante di $\vec{\sigma}_\alpha d\Sigma$ e deve essere tale da rispettare il principio di azione e reazione

$$\vec{\sigma}_{-\alpha} d\Sigma = -\vec{\sigma}_\alpha d\Sigma \quad (3.3)$$

Il vettore sforzo dipende chiaramente dal punto di applicazione \mathcal{P} e dalla direzione del piano che taglia il solido (anche noto come *giacitura*), cioè dalla normale. Lo stato di sforzo nel punto \mathcal{P} è individuato dai vettori sforzo corrispondenti a tutte le giaciture di normale \vec{n}_α .

A ogni valore di \vec{n}_α corrisponde un valore del vettore sforzo, in generale non perpendicolare alla superficie.

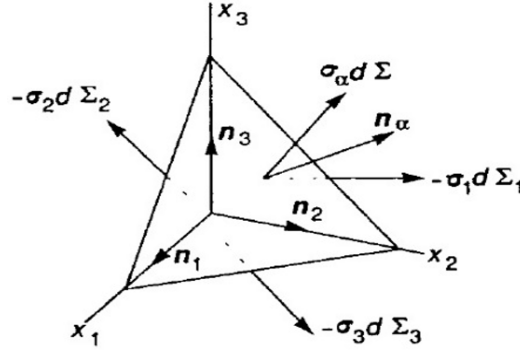


Figura 6:

Imponendo l'equilibrio del mezzo si ottiene che è sufficiente conoscere il vettore sforzo sui tre piani coordinati per poter determinarlo anche su un piano qualsiasi, Fig. 6. Consideriamo, quindi, un punto \mathcal{P} per cui sono condotti tre piani paralleli agli assi $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ e un piano inclinato posizionato in modo da ottenere un tetraedro. Il piano inclinato è caratterizzato da una normale \vec{n}_α completamente arbitraria. Consideriamo, inoltre, le forze infinitesime a cui è soggetto il tetraedro. Si noti che le quantità $\vec{\sigma}_i d\Sigma_i$ ($i = 1, 2, 3$) hanno segno negativo perché sono uscenti da facce con verso opposto all'asse di riferimento (Fig. 6). Per studiare l'equilibrio del tetraedro, sarebbe necessario considerare anche la forza di volume. Quest'ultima, però, risulta essere un infinitesimo di ordine superiore e può essere quindi trascurata.

L'equilibrio è espresso dall'equazione

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{0} \quad (3.4)$$

che può essere scritta esplicitando tutte le quantità in gioco

$$\vec{\sigma}_\alpha d\Sigma_\alpha - \vec{\sigma}_1 d\Sigma_1 - \vec{\sigma}_2 d\Sigma_2 - \vec{\sigma}_3 d\Sigma_3 = \vec{0} \quad (3.5)$$

Usando i versori degli assi $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$, la normale può essere scritta per componenti come

$$\vec{n}_\alpha = n_{\alpha 1} \hat{i}_1 + n_{\alpha 2} \hat{i}_2 + n_{\alpha 3} \hat{i}_3 \quad (3.6)$$

dove le componenti $n_{\alpha i}$ rappresentano i coseni direttori tra la direzione della normale e la direzione dell'asse coordinato \vec{x}_i . Inoltre, con la stessa notazione le superfici infinitesime $d\Sigma_1, d\Sigma_2, d\Sigma_3$ possono essere interpretate come proiezioni della superficie $d\Sigma_\alpha$ sui piani coordinati

$$d\Sigma_1 = d\Sigma_\alpha n_{\alpha 1} \quad (3.7)$$

$$d\Sigma_2 = d\Sigma_\alpha n_{\alpha 2} \quad (3.8)$$

$$d\Sigma_3 = d\Sigma_\alpha n_{\alpha 3} \quad (3.9)$$

Dunque, sostituendo nell'Eq. (3.5) si ottiene

$$\vec{\sigma}_\alpha d\Sigma_\alpha - \vec{\sigma}_1 d\Sigma_\alpha n_{\alpha 1} - \vec{\sigma}_2 d\Sigma_\alpha n_{\alpha 2} - \vec{\sigma}_3 d\Sigma_\alpha n_{\alpha 3} = \vec{0} \quad (3.10)$$

da cui, mettendo in evidenza $d\Sigma_\alpha$ si ottiene la seguente relazione

$$\vec{\sigma}_\alpha = \vec{\sigma}_1 n_{\alpha 1} + \vec{\sigma}_2 n_{\alpha 2} + \vec{\sigma}_3 n_{\alpha 3} \quad (3.11)$$

Dunque, conoscendo i vettori di sforzo sulle tre facce ortogonali agli assi coordinati è possibile ricostruire il vettore sforzo su una faccia con normale arbitraria. Poiché a loro volta ogni

vettore di sforzo ha tre componenti scalari, si deduce che per conoscere il vettore sforzo su una giacitura arbitraria è necessario conoscere nove componenti scalari. Queste componenti possono essere organizzate come matrice

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

dove le colonne rappresentano i vettori sforzo sui tre piani coordinati. L'Eq. (3.11) può allora essere riscritta in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha 1} \\ \sigma_{\alpha 2} \\ \sigma_{\alpha 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{\alpha 1} \\ n_{\alpha 2} \\ n_{\alpha 3} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

o in forma compatta

$$\vec{\sigma}_\alpha = \boldsymbol{\sigma} \vec{n}_\alpha \quad (3.14)$$

La quantità $\boldsymbol{\sigma}$ è chiamata *tensore degli sforzi*.

4 Interpretazione geometrica del tensore degli sforzi

Per interpretare geometricamente il tensore degli sforzi, consideriamo un cubo orientato secondo gli assi $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ (Fig. 7). Sulle facce abbiamo $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$ che possono essere proiettati lungo gli assi coordinati. In tal modo, si ottengono tre componenti: una uscente dalla faccia (componente normale) e due che sono contenute nella faccia (componenti tangenziali). Le componenti normali corrispondono alle quantità sulla diagonale del tensore degli sforzi $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, mentre quelle tangenziali corrispondono alle quantità non diagonali $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$.

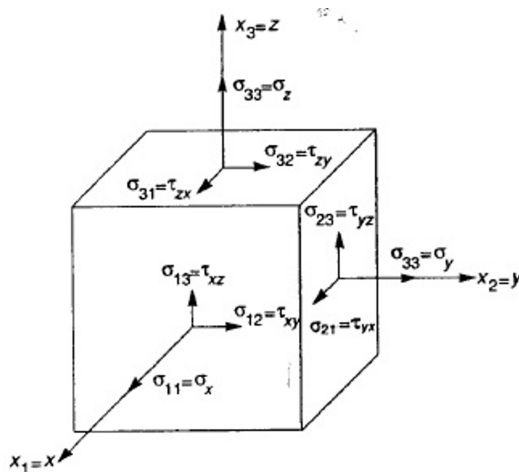


Figura 7:

In forma compatta, le componenti del tensore degli sforzi possono anche essere indicate con σ_{ij} , dove i è riferito alla faccia (normale) e j è riferito alla direzione. Una notazione più conveniente e spesso utilizzata è la cosiddetta notazione ingegneristica, secondo cui, avendo identificato gli assi $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ con $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, gli sforzi normali si denotano con $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, mentre le componenti tangenziali saranno $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. In definitiva, in notazione ingegneristica il tensore degli sforzi può essere scritto come

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Per quanto riguarda la scelta dei segni, le componenti normali sono positive quando sono uscenti dalle facce, mentre le componenti tangenziali sono positive quando hanno il verso corrispondente alla direzione degli assi (Fig. 7). Sulle facce opposte del cubo, le azioni normali sono opposte ai versi degli assi e quindi tutte le componenti devono avere segno negativo. In questo modo si garantisce l'equilibrio delle azioni sul cubo.

5 Proprietà del tensore degli sforzi

5.1 Legge di trasformazione

Abbiamo chiamato la quantità σ introdotta nell'Eq. (3.14) *tensore degli sforzi*. Nello specifico, come appare chiaro osservando la legge di trasformazione a cui σ obbedisce, esso è un tensore del second'ordine. Infatti, in una trasformazione di coordinate

$$\{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \quad (5.1)$$

le componenti del tensore degli sforzi si trasformano come segue

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{ij} n_{\alpha j} n_{\beta i} \quad (5.2)$$

dove $n_{\alpha j}$ e $n_{\beta i}$ sono rispettivamente i coseni direttori degli angoli formati dagli assi \vec{x}_j e $\vec{\xi}_\alpha$ e dagli assi \vec{x}_i e $\vec{\xi}_\beta$.

5.2 Simmetria

Inoltre, il tensore degli sforzi risulta essere un tensore simmetrico. Osserviamo il tetraedro in Fig. 8.

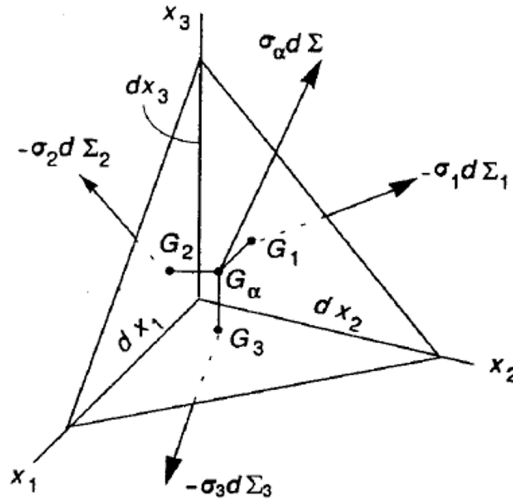


Figura 8:

Con riferimento alla Fig. 8, osserviamo che:

- (i) $-\vec{\sigma}_1 d\Sigma_1$ è la forza agente sulla faccia ortogonale all'asse \vec{x}_1
- (ii) $-\vec{\sigma}_2 d\Sigma_2$ è la forza agente sulla faccia ortogonale all'asse \vec{x}_2
- (iii) $-\vec{\sigma}_3 d\Sigma_3$ è la forza agente sulla faccia ortogonale all'asse \vec{x}_3
- (iv) $\vec{\sigma}_\alpha d\Sigma_\alpha$ è la forza agente nel baricentro della faccia obliqua

Abbiamo già mostrato che annullando la risultante di tutte le forze, $\vec{R} = \vec{0}$, si ottiene una prima condizione d'equilibrio espressa dall'Eq. (3.11). Studiamo adesso, invece, l'equilibrio alla rotazione, ottenibile annullando il momento risultante calcolato scegliendo come polo il baricentro della faccia obliqua \mathcal{G}_α

$$\vec{M}_{(\mathcal{G}_\alpha)} = \vec{0} \quad (5.3)$$

Per valutare i momenti delle forze (i)-(iv), è necessario calcolare i bracci di tali forze rispetto al polo \mathcal{G}_α . Dalle proprietà del tetraedro, discende che la distanza tra il baricentro della faccia obliqua e il baricentro delle altre facce, $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$, è pari a $1/3$ della lunghezza dello spigolo ortogonale alla faccia considerata. Quindi, indicando con dx_1, dx_2, dx_3 le misure rispettivamente dei tre spigoli, le distanze tra i baricentri saranno date da

$$\overline{\mathcal{G}_\alpha \mathcal{G}_1} = dx_1/3 \quad (5.4)$$

$$\overline{\mathcal{G}_\alpha \mathcal{G}_2} = dx_2/3 \quad (5.5)$$

$$\overline{\mathcal{G}_\alpha \mathcal{G}_3} = dx_3/3 \quad (5.6)$$

Inoltre, il volume del tetraedro elementare può essere scritto come

$$dV = d\Sigma_1(dx_1/3) = d\Sigma_2(dx_2/3) = d\Sigma_3(dx_3/3) \quad (5.7)$$

Possiamo, adesso, studiare l'equilibrio alla rotazione del tetraedro rispetto ad assi paralleli a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ e passanti per il punto \mathcal{G}_α (si veda Fig. 9). Trascurando forze che danno luogo a infinitesimi di ordine superiore al terzo, cioè agli infinitesimi di volume, le uniche forze che danno contributo sono alcune di quelle tangenziali. In particolare, studiamo l'equilibrio rispetto all'asse \vec{x}'_1 , parallelo a \vec{x}_1 e passante per \mathcal{G}_α . Risulta evidente che le componenti legate alla faccia obliqua non danno contributi perché abbiamo scelto \mathcal{G}_α come polo. Quindi saranno presenti solo i contributi delle tre facce che giacciono sui piani coordinati.

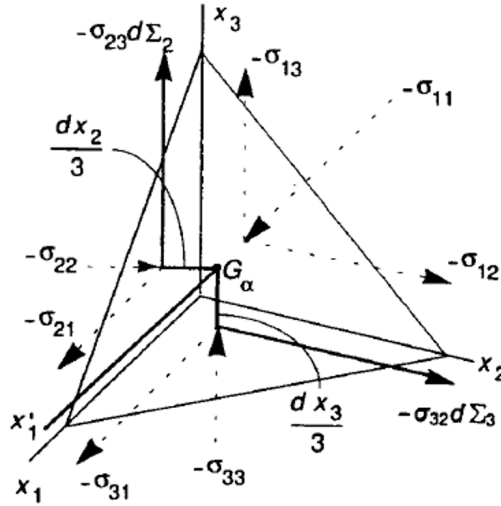


Figura 9:

In particolare, si può vedere che le componenti che appaiono nell'equazione $M_{(\mathcal{G}_\alpha)1} = 0$ sono solo $-\sigma_{23}d\Sigma_2$ e $-\sigma_{32}d\Sigma_3$. Nello scrivere l'equazione d'equilibrio, cambieremo il segno al contributo che indurrebbe una rotazione in senso orario. Si ottiene

$$\sigma_{23}d\Sigma_2(dx_2/3) - \sigma_{32}d\Sigma_3(dx_3/3) = 0 \quad (5.8)$$

che, ricordando le espressioni per il volume in Eq. (5.7), può essere riscritta come

$$(\sigma_{23} - \sigma_{32})dV = 0 \quad (5.9)$$

Per l'arbitrarietà del volume elementare dV , risulta dunque che, affinché ci sia equilibrio alla rotazione intorno all'asse \vec{x}'_1 , si deve avere $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Imponendo l'equilibrio intorno agli altri due assi, \vec{x}'_2, \vec{x}'_3 si ottiene in maniera analoga che $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ e $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

Le condizioni di reciprocità appena dedotte permettono di abbassare il numero di componenti indipendenti del tensore degli sforzi da 9 a 6

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} = \sigma_{12} & \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} = \sigma_{23} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} & \sigma_{23} = \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

o, in notazione ingegneristica,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

6 Invarianti

In generale, abbiamo visto che si $\vec{\sigma}_\alpha = \boldsymbol{\sigma} \vec{n}_\alpha$. Ci chiediamo adesso se esistono particolari direzioni per le quali il vettore sforzo $\vec{\sigma}_\alpha$ è nella stessa direzione della normale

$$\vec{\sigma}_\alpha = s \vec{n}_\alpha \quad (6.1)$$

dove s è uno scalare. Questa richiesta corrisponde al problema agli autovalori

$$\boldsymbol{\sigma} \vec{n}_\alpha = s \vec{n}_\alpha \quad (6.2)$$

che può essere anche riscritto come

$$(\boldsymbol{\sigma} - s\mathbb{1})\vec{n}_\alpha = \vec{0} \quad (6.3)$$

dove $\mathbb{1}$ rappresenta la matrice identità 3×3 . In forma di matrice il problema agli autovalori può essere riscritto come

$$\begin{pmatrix} \sigma_x - s & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - s & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{\alpha x} \\ n_{\alpha y} \\ n_{\alpha z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Per ottenere autovalori e autovettori (autodirezioni in questo caso) è necessario risolvere l'equazione secolare

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - s\mathbb{1}) = 0 \quad (6.5)$$

Lo sviluppo di questo determinante conduce a un'equazione del terzo grado nell'incognita s

$$s^3 - J_1 s^2 + J_2 s - J_3 = 0 \quad (6.6)$$

dove le quantità J_1, J_2, J_3 sono chiamate *invarianti di sforzo* e valgono

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (6.7)$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \quad (6.8)$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} - (\sigma_x \tau_{yz}^2 + \sigma_y \tau_{xz}^2 + \sigma_z \tau_{xy}^2) = \det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (6.9)$$

Esercizio Derivare l'Eq. 6.6 dall'Eq. 6.5.

Poiché $\boldsymbol{\sigma}$ è un tensore simmetrico, esso ha sempre tre radici (o autovalori) reali s_1, s_{11}, s_{111} detti *sforzi o tensioni principali*, che rappresentano gli sforzi che agiscono sulle facce ortogonali alle corrispondenti *direzioni principali*. **Lungo tali direzioni il vettore sforzo**

ha solo componente normale. Quindi, rispetto alle tre direzioni principali, $\vec{n}_1, \vec{n}_{11}, \vec{n}_{111}$, il tensore degli sforzi risulta essere diagonale

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & s_{111} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Evidentemente, risulta molto conveniente calcolare gli invarianti di sforzo in questo caso

$$J_1 = s_1 + s_{11} + s_{111} \quad (6.11)$$

$$J_2 = s_{11}s_{11} + s_{11}s_{111} + s_1s_{111} \quad (6.12)$$

$$J_3 = s_1s_{11}s_{111} \quad (6.13)$$

7 Le equazioni d'equilibrio

Per concludere questi richiami sullo stato di sforzo, vogliamo studiare lo stato di sforzo nell'intorno di un certo punto per determinare le condizioni d'equilibrio del continuo in esame.

Consideriamo un cubo infinitesimo, di spigoli dx_1, dx_2, dx_3 paralleli agli assi coordinati $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, centrato in un dato punto \mathcal{P} . Le componenti dello sforzo che studieremo sono mostrate in Fig. 10.

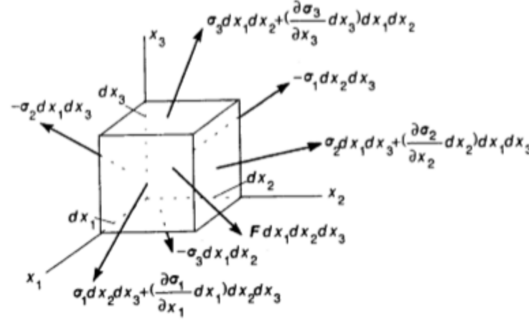


Figura 10:

Sulla faccia ortogonale all'asse \vec{x}_1 , la cui normale ha verso opposto a quello dell'asse, ci sarà una forza complessiva pari a $-\vec{\sigma}_1 dx_2 dx_3$ orientata nel verso negativo; sulla faccia che ha come normale l'asse \vec{x}_1 positivo, lo sforzo applicato deve essere incrementato di una certa quantità derivante dal fatto che la coordinata x_1 viene incrementata passando da una faccia all'altra di una quantità dx_1 : lo sforzo sulla faccia, a meno di infinitesimi di ordine superiore, sarà, quindi, pari a $\left(\vec{\sigma}_1 + \frac{\partial \vec{\sigma}_1}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3$, dove il prodotto $dx_2 dx_3$ rappresenta l'area della faccia. Questo sforzo è stato ottenuto tramite lo sviluppo con la formula di Taylor arrestato ai termini di primo ordine solo per la quantità da incrementare rispetto a x_1 . Una trattazione analoga può essere condotta sulle facce ortogonali agli assi \vec{x}_2, \vec{x}_3 . In definitiva, i contributi da considerare sono

$$(i) \text{ Faccia } x_2, x_3: \quad -\vec{\sigma}_1 dx_2 dx_3, \quad \left(\vec{\sigma}_1 + \frac{\partial \vec{\sigma}_1}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3$$

$$(ii) \text{ Faccia } x_1, x_3: \quad -\vec{\sigma}_2 dx_1 dx_3, \quad \left(\vec{\sigma}_2 + \frac{\partial \vec{\sigma}_2}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3$$

$$(iii) \text{ Faccia } x_1, x_2: \quad -\vec{\sigma}_3 dx_1 dx_2, \quad \left(\vec{\sigma}_3 + \frac{\partial \vec{\sigma}_3}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2$$

Inoltre, dobbiamo tenere conto della forza di volume esercitata sul cubetto \vec{F} , che fornisce un contributo pari a $\vec{F} dx_1 dx_2 dx_3$.

Per garantire l'equilibrio, si deve avere che la risultante di tutte le forze agenti sul cubo in Fig. 10 sia nulla $\vec{R} = \vec{0}$. Ciò può essere scritto esplicitamente come

$$\begin{aligned} & -\vec{\sigma}_1 dx_2 dx_3 + \left(\vec{\sigma}_1 + \frac{\partial \vec{\sigma}_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \\ & -\vec{\sigma}_2 dx_1 dx_3 + \left(\vec{\sigma}_2 + \frac{\partial \vec{\sigma}_2}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \\ & -\vec{\sigma}_3 dx_1 dx_2 + \left(\vec{\sigma}_3 + \frac{\partial \vec{\sigma}_3}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 + \vec{F} dx_1 dx_2 dx_3 = \vec{0} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Semplificando l'Eq. (7.1), si ottiene

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \vec{\sigma}_2}{\partial x_2} dx_2 dx_1 dx_3 + \frac{\partial \vec{\sigma}_3}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2 + \vec{F} dx_1 dx_2 dx_3 = \vec{0} \quad (7.2)$$

Mettendo in evidenza il volume elementare

$$\left(\frac{\partial \vec{\sigma}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{\sigma}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{\sigma}_3}{\partial x_3} + \vec{F} \right) dV = \vec{0} \quad (7.3)$$

Poiché, infine, il volume elementare dV è diverso da zero, dovrà annullarsi l'altro moltiplicando. In tal modo si ottiene l'equazione d'equilibrio

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{\sigma}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{\sigma}_3}{\partial x_3} + \vec{F} = \vec{0} \quad (7.4)$$

L'Eq. (7.4) è chiamata *equazione d'equilibrio in sede indefinita per il continuo*. Poiché, come abbiamo visto, i vettori $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$ possono essere visti come le colonne del tensore degli sforzi, l'Eq. (7.4) può essere riscritta come

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{F} = \vec{0} \quad (7.5)$$

dove la divergenza del tensore degli sforzi è stata scritta usando l'operatore ∇ definito come

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (7.6)$$

Infine, l'Eq. (7.5) può essere scritta esplicitando gli indici come

$$\sigma_{ij,i} + f_j = 0 \quad (7.7)$$

dove si intende la somma sugli indici ripetuti e la virgola rappresenta l'operazione derivata rispetto alla componente corrispondente all'indice che segue la virgola.

Abbiamo ottenuto tre equazioni di equilibrio in sei incognite, le componenti indipendenti del tensore degli sforzi. Risulta evidente che con solo queste equazioni non è possibile risolvere il problema dell'equilibrio del continuo, che è, infatti, un problema iperstatico e non ammette soluzioni basate sulle sole equazioni di equilibrio.

8 Condizioni al contorno

Fin'ora sono state trattate le equazioni che valgono in tutti i punti interni del solido considerato, che è soggetto a forze di volume \vec{F} e di superficie \vec{f} . A tali equazioni si affiancano le condizioni che valgono sul contorno del solido. Esse corrispondono alle condizioni di Cauchy quando il punto sul quale si vuole valutare lo stato di sforzo viene idealmente portato sulla superficie del solido. Quindi, si può dire, in maniera semplificata, che le equazioni sui punti del contorno solido consistono nelle equazioni di Cauchy in cui il contributo esterno è rappresentato dalle forze di superficie.

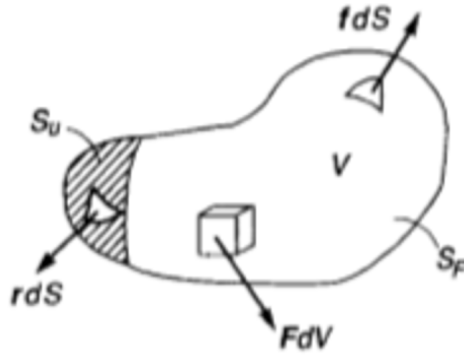


Figura 11:

Per descrivere correttamente l'equilibrio sulla superficie del solido, è necessario tenere conto delle diverse condizioni alle quali esso può essere sottoposto. Con riferimento alla Fig. 11, si considera una parte della superficie esterna come *vincolata*, S_u , e la restante parte come libera, S_F . Su S_u si considerano applicate le reazioni vincolari \vec{r} (sempre incognite del problema) esercitate dal vincolo, mentre su S_F si considerano applicate le usuali forze esterne di superficie.

Come elemento infinitesimo di superficie su cui studiare l'equilibrio si può considerare l'usuale tetraedro di Cauchy (dove la superficie obliqua sarà considerata coincidente con la superficie esterna del solido), allora lo stato di sforzo che deve equilibrare le forze di superficie sarà quello ottenuto nell'Eq. (3.11)

$$\vec{\sigma}_\alpha = \vec{\sigma}_1 n_{\alpha 1} + \vec{\sigma}_2 n_{\alpha 2} + \vec{\sigma}_3 n_{\alpha 3} = \begin{cases} \vec{f} \text{ su } S_F \\ \vec{r} \text{ su } S_u \end{cases} \quad (8.1)$$

Quest'ultima equazione può essere riscritta introducendo le componenti del tensore degli sforzi come

$$\sigma_{ij} n_i = \begin{cases} f_j \text{ su } S_F \\ r_j \text{ su } S_u \end{cases} \quad (8.2)$$