Controlli automatici

Trasformata di Laplace

Prof. Alessandro Pisano

apisano@unica.it

Definizione

La trasformata di Laplace è un operatore che associa un una funzione $x(t)$ una diversa funzione, chiamata $X(s)$, in cui s è una variabile complessa detta variabile di Laplace.

La trasformata di Laplace e le sue proprietà costituiscono la base metodologica di una procedura che consente, fra le altre cose, di rappresentare una sistema LTI SISO attraverso un rapporto di polinomi, denominato «**Funzione di Trasferimento**», che mette a disposizione numerosi e potenti strumenti di analisi e progetto per i sistemi di controllo.

La trasformata (unilatera) di Laplace è definita come segue

$$X(s) = \mathcal{L}\big(x(t)\big) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

Si dimostra che la Trasformata di Laplace (TdL) di una ampia gamma di segnali (segnali canonici e impulsivi) risulta essere espressa attraverso un **rapporto di polinomi**.

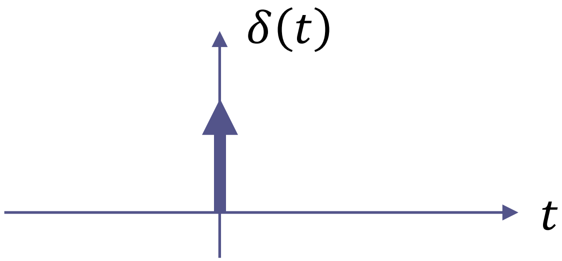
Segnali canonici: $x(t) = Acos(\omega t + \phi)t^{\beta}e^{\alpha t}$ $A, \omega, \phi, \alpha \in \mathbb{R}$ $\beta \in \mathbb{N}$

Una combinazione lineare fra segnali canonici è essa stessa un segnale canonico

Funzione del tempo	Trasformata di Laplace
$\delta(t)$ (impulso di Dirac)	1
$\delta_{-1}(t)$ (gradino unitario)	$\frac{1}{s}$
$\delta_{-2}(t) = t\delta_{-1}(t)$ (rampa unitaria)	$\frac{1}{s^2}$

TdL

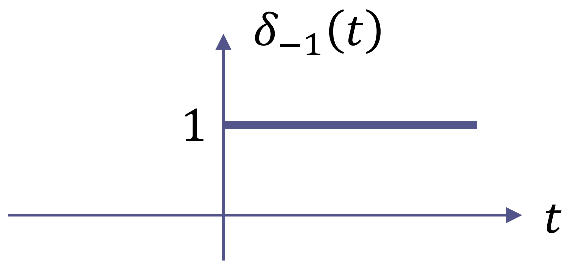
$\delta(t)$ Impulso di Dirac



$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

1

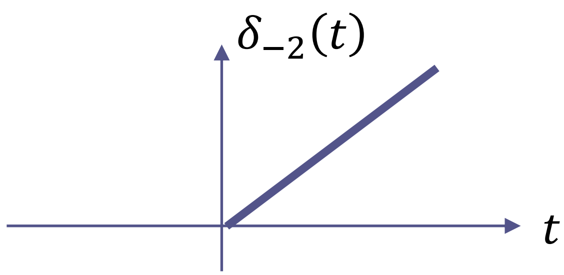
$\delta_{-1}(t)$ Gradino unitario



$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{s}$

$\delta_{-2}(t)$ Rampa unitaria



$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{s^2}$

Funzione del tempo	Trasformata di Laplace
e^{at} (esponenziale)	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$ (esponenziale polinomiale)	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\sin(\omega t)$ (sinusoide)	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$ (cosinusoide)	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$	$\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ (fattore trinomio)
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

Proprietà e teoremi

Linearità

$$\mathcal{L}(ax(t) + by(t)) = aX(s) + bY(s)$$

Es. $$\mathcal{L}(2\delta_{-1}(t) + 4\sin(2t)) = 2\mathcal{L}\big(\delta_{-1}(t)\big) + 4\mathcal{L}(\sin(2t))$$
$$= \frac{2}{s} + 4\,\frac{2}{s^2+4}$$

Teorema di derivazione

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right) = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^nx(t)}{dt^n}\right) = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} - \cdots - -s\left.\frac{d^{n-2}x(t)}{dt^{n-2}}\right|_{t=0} - \left.\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$
$$= s^nX(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i}\left.\frac{d^ix(t)}{dt^i}\right|_{t=0} \qquad n = 1,2,3,\ldots..$$

Proprietà e teoremi

Linearità

$$\mathcal{L}(ax(t) + by(t)) = aX(s) + bY(s)$$

Es. $$\mathcal{L}(2\delta_{-1}(t) + 4\sin(2t)) = 2\mathcal{L}\left(\delta_{-1}(t)\right) + 4\mathcal{L}(\sin(2t))$$
$$= \frac{2}{s} + 4\,\frac{2}{s^2 + 4}$$

Teorema di derivazione

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right) = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^nx(t)}{dt^n}\right) = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} - \cdots - -s\left.\frac{d^{n-2}x(t)}{dt^{n-2}}\right|_{t=0} - \left.\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$

$$= s^nX(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i}\left.\frac{d^ix(t)}{dt^i}\right|_{t=0} \qquad n = 1,2,3,\dots..$$

Teorema di integrazione

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t x(\tau)d\tau\right) = \frac{X(s)}{s}$$

Teorema del valore finale

Se esiste finito il $\lim_{t\to\infty} x(t)$, il valore di tale limite è:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Come possiamo stabilire a priori se tale limite esiste finito o meno ?

Esiste una condizione necessaria e sufficiente, basata sulla collocazione delle radici del polinomio a denominatore della TdL $X(s)$ del segnale

Dato un segnale canonico $x(t)$ la cui TdL è

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

chiameremo **POLI** e **ZERI** della sua TdL rispettivamente le radici del polinomio a denominatore e numeratore

Un segnale canonico $x(t)$ ammette un limite finito per $t \to \infty$ se e solo se la sua TdL $X(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa eccetto al più un polo semplice in $s = 0$

Un altro utile risultato è il seguente

Un segnale canonico $x(t)$ tende a zero per $t \to \infty$ se e solo se la sua TdL $X(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa.

Esempio

$$X(s) = \frac{3s+2}{s(s+1)}$$

La TdL del segnale in esame ha due poli: $s = 0$ ed $s = -1$

La condizione di applicabilità del teorema del valore finale è soddisfatta, e pertanto si ha che

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3s+2}{(s+1)} = 2$$

Si mostra facilmente che il segnale $x(t)$ la cui TdL è $\frac{3s+2}{s(s+1)}$ ha la seguente espressione

$$x(t) = 2\delta_{-1}(t) + e^{-t}$$

$$\mathcal{L}(2\delta_{-1}(t) + e^{-t}) = 2\mathcal{L}\big(\delta_{-1}(t)\big) + \mathcal{L}(e^{-t})$$
$$= \frac{2}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{3s+2}{s(s+1)}$$

Esempio

$$X(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

La TdL del segnale in esame ha due poli immaginari puri:
$s = 3j$ ed $s = -3j$

La condizione di applicabilità del teorema del valore finale non è soddisfatta, e pertanto si ha che

$$\lim_{t \to \infty} x(t) \neq \lim_{s \to 0} sX(s) = \lim_{s \to 0} \frac{3s}{s^2 + 9} = 0$$

Si verifica facilmente che il segnale $x(t)$ la cui TdL è $\frac{3}{s^2+9}$ è il segnale x(t) $= sin(3t)$, ed infatti tale segnale non ammette un limite finito per $t \to \infty$

Antitrasformata di Laplace

La determinazione, a partire da un rapporto di polinomi $X(s)$, della funzione x(t) tale che $\mathcal{L}\big(x(t)\big) = X(s)$ si effettua decomponendo $X(s)$ nella somma di termini elementari dei quali, mediante le Tabelle, si possono determinare con facilita le funzione del tempo ad essi associate

Esempio

$$X(s) = \frac{2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

Decomposizione in fratti semplici

Calcoliamo le costanti A e B imponendo che i membri alla destra ed alla sinistra dell'uguale siano coincidenti

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{(A+B)s+A}{s(s+1)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} \quad \xRightarrow{\text{TABELLE}} \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s+1)}\right\} = 2\delta_{-1}(t) - 2\,e^{-t}$$

Risoluzione di equazioni differenziali del primo ordine mediante TdL

Mostriamo con riferimento ad un esempio come attraverso le proprietà della TdL sia possibile risolvere equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti attraverso dei calcoli puramente algebrici

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \qquad\qquad u(t) = 2\delta_{-1}(t)$$

$$y(0) = 1$$

Applichiamo l'operatore di TdL a tutti i membri della equazione differenziale, semplificando il primo termine mediante il teorema di derivazione

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

$$\Downarrow$$

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = U(s) \quad \Rightarrow \quad (s+1)Y(s) = \overset{1}{y(0)} + \overset{\frac{2}{s}}{U(s)}$$

$$(s+1)Y(s) = \overbrace{y(0)}^{=1} + \overbrace{U(s)}^{=\frac{2}{s}} = 1 + \frac{2}{s}$$

Ora ricaviamo esplicitamente la $Y(s)$ e poi determiniamo, mediante antitrasformazione, la soluzione $y(t)$ della equazione differenziale.

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s+1} + \frac{1}{(s+1)}U(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s(s+1)}$$

L'antitrasformata del primo termine alla destra dell'uguale è la funzione esponenziale e^{-t}

L'antitrasformata del secondo termine alla destra dell'uguale è stata calcolata nell'esempio precedente, ed è la funzione $2\delta_{-1}(t) - 2\,e^{-t}$

Si ha quindi, applicando la linearità della TdL:

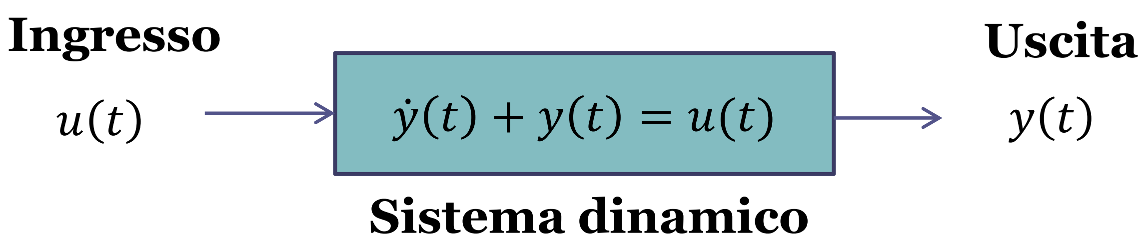
$$y(t) = e^{-t} + 2\delta_{-1}(t) - 2\,e^{-t} = 2\delta_{-1}(t) - e^{-t}$$ Soluzione della equazione differenziale

Abbiamo visto come attraverso l'impiego delle proprietà della TdL e delle relative tabelle sia stato possibile risolvere l'equazione differenziale oggetto di questo esempio attraverso una procedura di calcolo interamente algebrica.

Ora sviluppiamo un ragionamento differente, che anticipa dei risultati che saranno presentati in modo completo e organico da qui a poco, che considera l'equazione differenziale di questo esempio come la descrizione di un sistema dinamico LTI

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \qquad y(0) = y_0 \qquad \cancel{u(t) = 2\delta_{-1}(t)}$$

Prescindiamo in questo ragionamento dalla particolare forma ipotizzata per il segnale $u(t)$ nel precedente esempio, e consideriamo un segnale di ingresso $u(t)$ qualunque.



Con riferimento ad una ODE non omogenea come quella che descrive questo sistema dinamico l'analisi matematica ci insegna che la sua soluzione $y(t)$ può essere espressa attraverso la **somma di due termini** , detti «risposta libera» e «risposta forzata»

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

La risposta libera $y_\ell(t)$ è l'uscita del sistema nell'ipotesi che l'ingresso forzante $u(t)$ sia pari a zero. La risposta libera $y_\ell(t)$ è pertanto soluzione della ODE

$$\dot{y}(t) + y(t) = 0$$
$$y(0) = y_0$$

La risposta forzata $y_f(t)$ è l'uscita del sistema nell'ipotesi che le condizioni iniziali siano nulle. La risposta forzata $y_f(t)$ è pertanto soluzione della ODE

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$
$$y(0) = 0$$

Nella espressione della TdL della variabile di uscita, che abbiamo ricavato nel contesto dell'esempio:

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+1} + \frac{1}{s+1} U(s)$$

sono chiaramente individuabili questi due contributi distinti.

$$Y(s) = \boxed{\frac{y_0}{s+1}} + \boxed{\frac{1}{s+1}U(s)} = Y_\ell(s) + Y_f(s)$$

TdL della risposta forzata

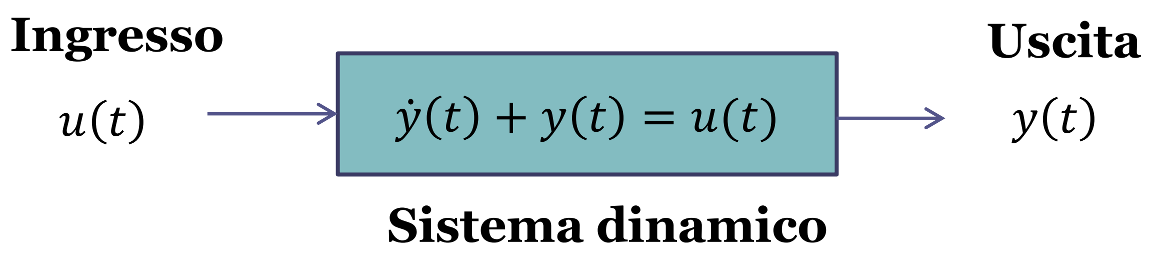
TdL della risposta libera

$$Y_\ell(s) = \frac{y_0}{s+1}$$

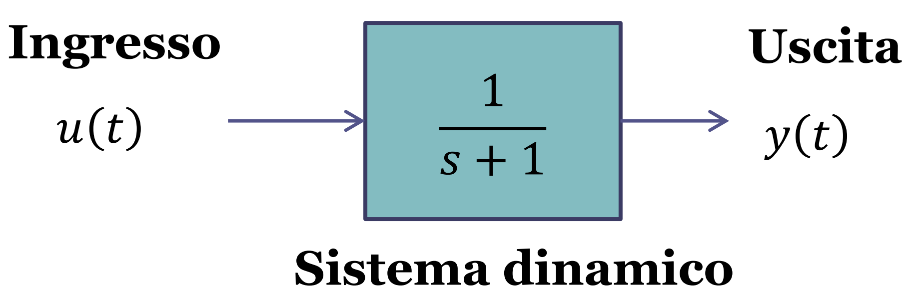
$$\boxed{\boldsymbol{Y_f(s) = \frac{1}{s+1}U(s)}}$$

La TdL della risposta forzata risulta essere il prodotto fra un certo rapporto di polinomi (in questo caso pari a $\frac{1}{s+1}$) e la TdL U(s) del segnale di ingresso.
Tale rapporto di polinomi viene denominato «Funzione di trasferimento» del sistema dinamico LTI

$$Y_f(s) = F(s)U(s) \qquad F(s) = \frac{1}{s+1}$$

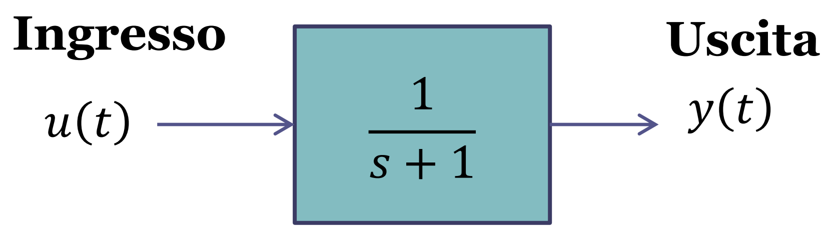


Il sistema dinamico ha Funzione di trasferimento $F(s) = \frac{1}{s+1}$ e da qui in avanti utilizzeremo la seguente rappresentazione



La Funzione di trasferimento di un processo LTI caratterizza completamente, e facilmente, la sua risposta forzata a segnali di ingresso aventi forma arbitraria, che nell'ambito dei controlli è ciò che ci interessa.

$$Y_f(s) = F(s)U(s) \qquad F(s) = \frac{1}{s+1}$$



La Funzione di trasferimento di un processo LTI è definita come il rapporto fra la TdL della componente **forzata** della variabile uscita e la TdL del segnale di ingresso

$$F(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$$

Esempio $u(t) = \delta_{-1}(t)$

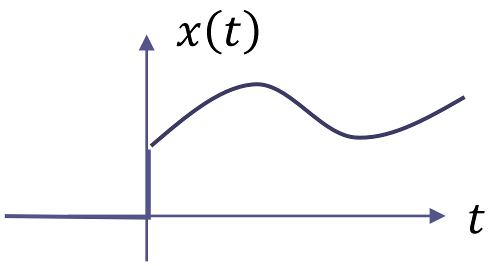
$$Y_f(s) = F(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)}$$

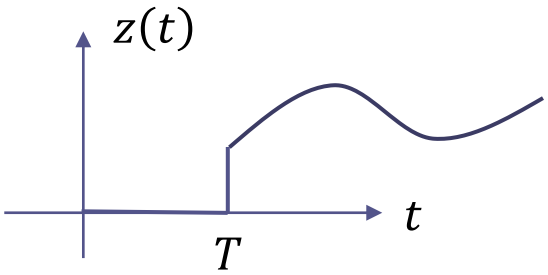
TdL della risposta (forzata) al gradino unitario

Altre proprietà

Teorema della traslazione nel tempo

Si consideri un arbitrario segnale $x(t)$ causale avente TdL $X(s)$ ed il segnale «ritardato» $z(t) = x(t-T), T > 0$, ottenuto traslando la curva verso destra di T



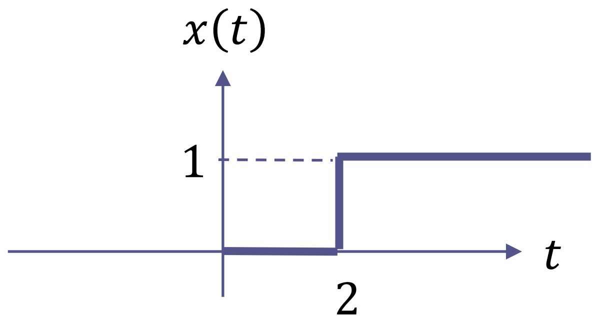


La TdL del segnale ritardato può essere facilmente determinata a partire dalla TdL del segnale originario secondo la formula seguente

$$Z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\} = e^{-sT} X(s)$$

Esempio

Si determini la TdL del segnale $x(t)$ descritto nel seguito



$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

Il segnale $x(t)$ oggetto di questo esempio puo essere visto come una versione «ritardata» del gradino unitario

$$x(t) = \delta_{-1}(t-2) \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

Prodotto per una funzione esponenziale

Si consideri un arbitrario segnale $x(t)$ causale avente TdL $X(s)$ ed il segnale $z(t) = e^{at}x(t)$ ottenuto moltiplicando il segnale originario per la funzione esponenziale e^{at}

La TdL $Z(s)$ del segnale $z(t) = e^{at}x(t)$ può essere facilmente determinata a partire dalla TdL del segnale $x(t)$ secondo la formula seguente

$$Z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\} = X(s-a)$$

Esempio Si determini la TdL del segnale $z(t) = e^{-2t}cos(3t)$

La TdL del segnale $x(t) = cos(3t)$ è (v. Tabella) $X(s) = \frac{s}{s^2+9}$

Applicando il teorema nel caso $a = -2$ si ha:

$$Z(s) = X(s+2) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2}{s^2+4s+13}$$

Teorema della convoluzione

Si considerino due segnali causali $x(t)$ ed $y(t)$ causale aventi rispettivamente TdL $X(s)$ ed $Y(s)$ ed il segnale $\mathrm{z}(t)$ ottenuto operando la convoluzione fra i due segnali $x(t)$ ed $y(t)$

$$\mathrm{z}(t) = x(t) * y(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^t y(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Si dimostra che

$$\mathrm{Z}(s) = X(s) \cdot Y(s)$$