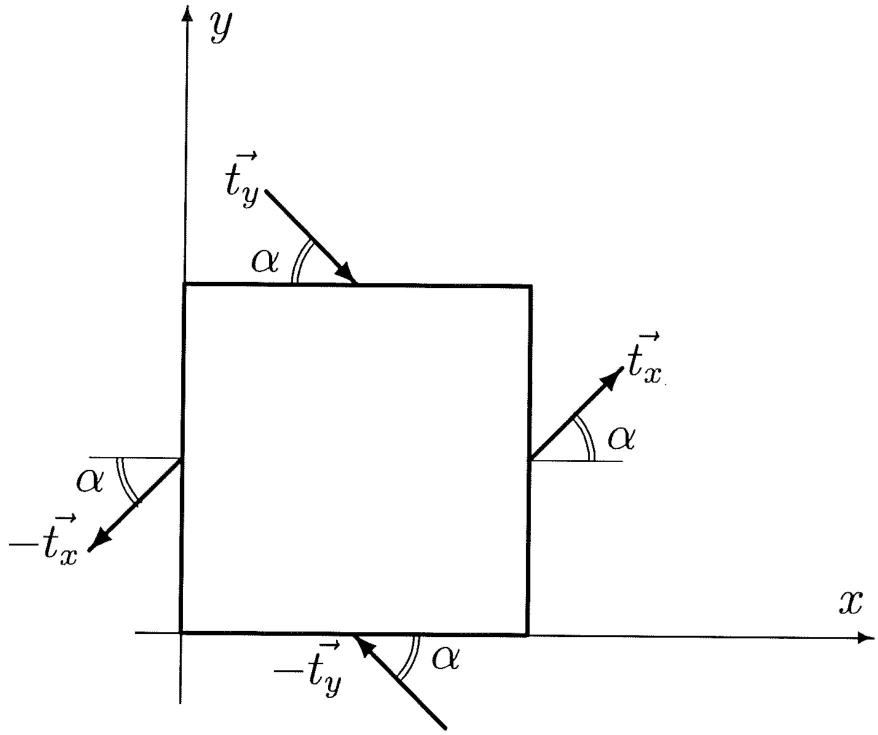
Esercizio n. 3 (9 punti)

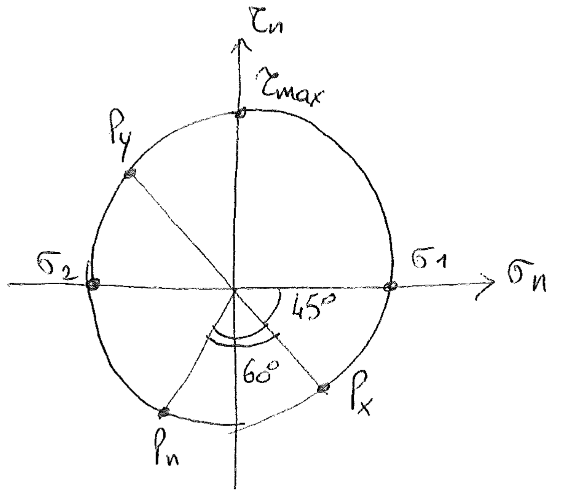
Un elemento di materiale è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) $\boldsymbol{t}_x$ e $\boldsymbol{t}_y$ rispettivamente, con $|\boldsymbol{t}_x| = |\boldsymbol{t}_y| = 48\sqrt{2}$ MPa ed entrambi inclinati, come indicato in Figura, di un angolo $\alpha = 45°$ rispetto all'orizzontale.
Si chiede di costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}, nonché le componenti di sforzo σ_n, τ_n agenti su un piano la cui normale $\boldsymbol{n}$ forma un angolo $\varphi = -30°$ (cioè pari a 30° *in senso orario*) con l'asse x.



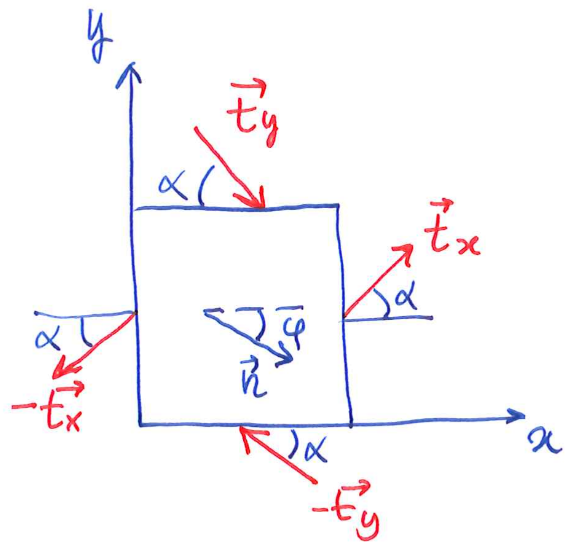
σ_1 = ...67.882...... (MPa); σ_2 = -67.882...... (MPa); τ_{max} = ...67.882.............................. (MPa);

σ_n = ...-17.569..... (MPa); $|\tau_n|$ = ...65.569........ (MPa);

cerchio di Mohr:



ESERCIZIO 3 (12/02/13) : CERCHIO DI MOHR



Nel caso considerato si ha che

$$|\vec{t}_x| = |\vec{t}_y| = 48\sqrt{2}\ \text{MPa}$$

$$\alpha = 45^\circ \qquad \varphi = -30^\circ$$

Si richiede di calcolare il valore degli sforzi principali σ_1 e σ_2, della massima tensione tangenziale τ_{MAX} e delle componenti di sforzo σ_n e τ_n su un piano di normale $\vec{n}$.

E' immediato verificare che

$$\sigma_x = \cancel{48}\ |\vec{t}_x| \cos\alpha = \cancel{4}48\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 48\ \text{MPa}$$

$$\sigma_y = -|\vec{t}_y| \sin\alpha = -48\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -48\ \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = |\vec{t}_x| \sin\alpha = 48\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 48\ \text{MPa}$$

$$\tau_{yx} = |\vec{t}_y| \cos\alpha = 48\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 48\ \text{MPa}$$

Quindi

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 48 & 48 & 0 \\ 48 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli invarianti sono

$$I_1 = 48 - 48 = 0$$

$$I_2 = \tau_{xy}^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y = 48^2 + 48^2 = 4608$$

$$I_3 = -48^2 - 48^2 = -4608$$

$$P_x = (\sigma_x, -\tau_{xy}) = (48, -48)$$

$$P_y = (\sigma_y, \tau_{yx}) = (-48, 48)$$

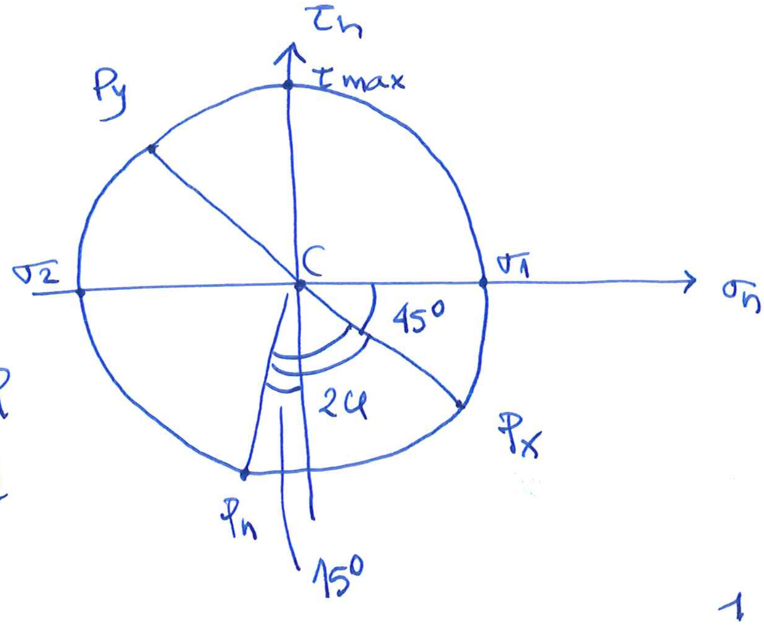
$$C = (0, 0)$$

$$R = \sqrt{48^2 + 48^2} = 67,882$$

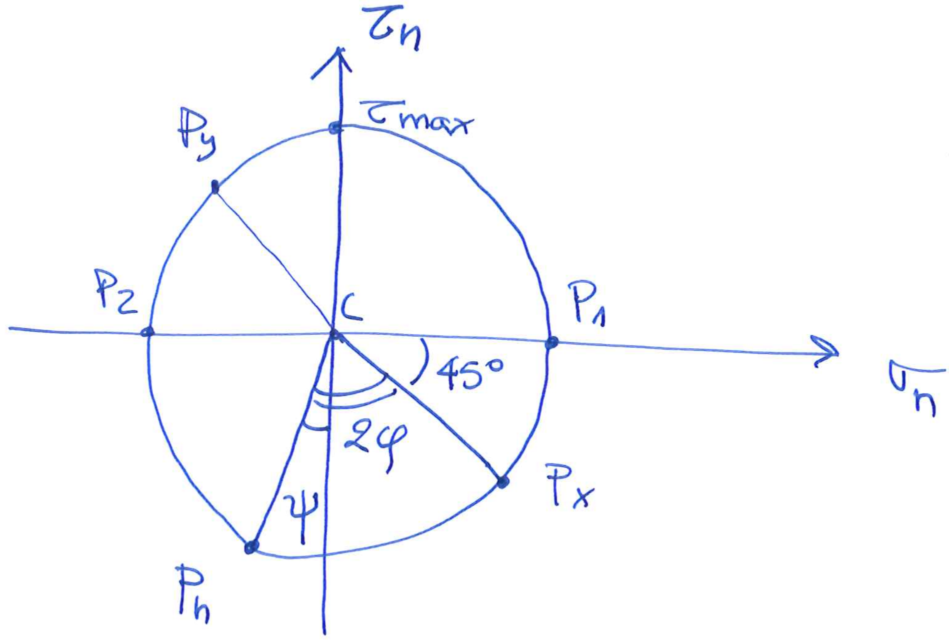
$$\sigma_1 = +R \qquad \sigma_2 = -R \qquad \tau_{max} = R$$

$$\sigma_n = -R \sin 15^\circ = -17.569\ \text{MPa}$$

$$\tau_n = -R \cos 15^\circ = -65.569\ \text{MPa}$$



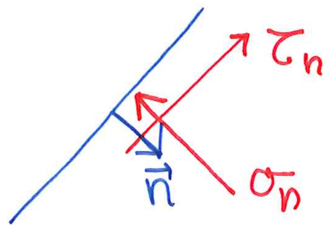
NOTA: Si noti che per calcolare le componenti di sforzo σ_n e τ_n su un piano di normale $\vec{n}$ risulta semplice riferirsi alle direzioni in cui la tensione tangenziale è massima. Quindi:



dal momento che $2\varphi = 60°$ allora

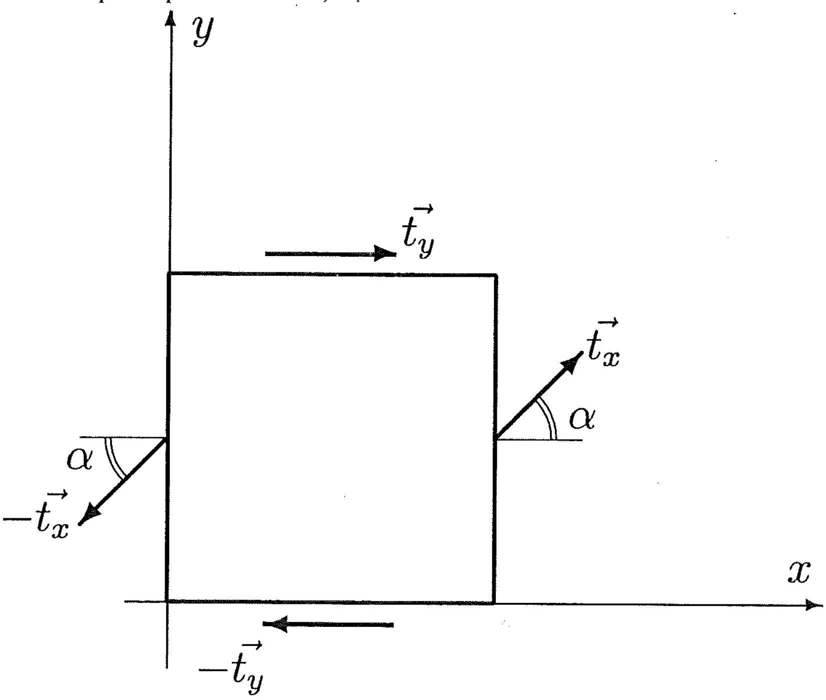
$$\psi = 2\varphi + 45° - 90°$$
$$= 60° + 45° - 90° = 15°$$

Infine, possiamo rimanalizzare σ_n e τ_n sull'elemento inclinato a normale $\vec{n}$



Esercizio n. 3 (9 punti)

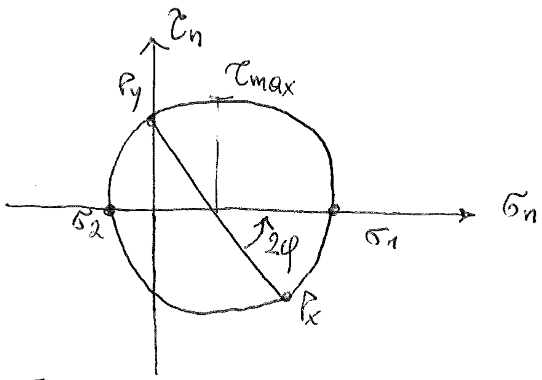
Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo α = 45° e ha modulo di valore $|t_x|$ = $75\sqrt{2}$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y, è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.
Si chiede di determinare le componenti σ_x, σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2, e la massima tensione tangenziale, τ_{max}.
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1.



σ_x = 75.0000 (MPa); σ_y = 0.0000 (MPa); τ_{xy} = 75.0000 (MPa);

σ_1 = 121.3525 (MPa); σ_2 = −46.3525 (MPa); τ_{max} = 83.8525 (MPa);

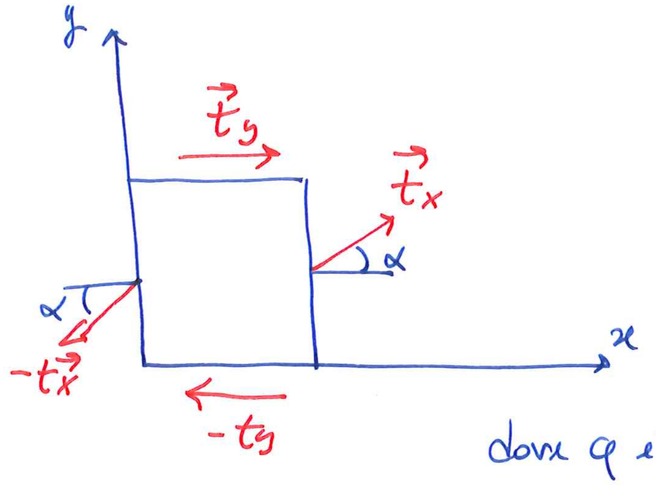
cerchio di Mohr:



$P_x = (75.0000, -75.0000)$
$P_y = (0.0000, +75.0000)$

φ = 31.7175° (°);

ESERCIZIO 3 (9/01/18): CERCHIO DI MOHR



Nel caso considerato si ha

$$|\vec{t}_x| = 75\sqrt{2} \text{ MPa}$$

e $\alpha = 45°$

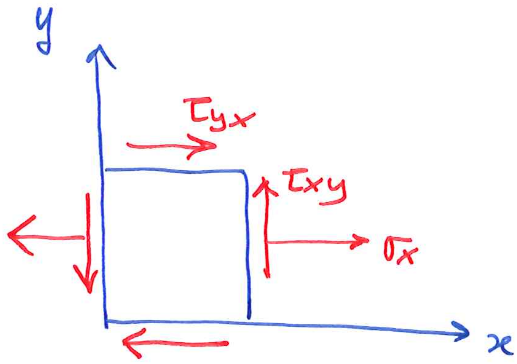
Si richiede di determinare i valori di

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_1, \sigma_2, \tau_{MAX}$ e φ.

dove φ è l'angolo formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia su cui agisce σ_1.

È facile vedere che

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x = |\vec{t}_x| \cos\alpha = 75\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 75 \text{ MPa} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = |\vec{t}_x| \sin\alpha = 75\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 75 \text{ MPa} \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} = 75 \text{ MPa} \end{array}\right\} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 75 & 75 & 0 \\ 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$P_x = (\sigma_x, -\tau_{xy}) = (75, -75)$$

$$P_y = (0, \tau_{yx}) = (0, 75)$$

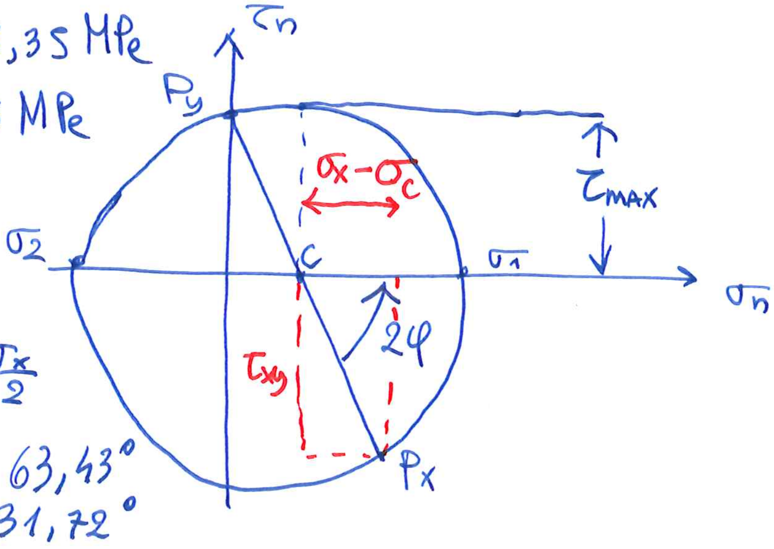
$$C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) = (37{,}5, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{37{,}5^2 + 75^2} = 83{,}85$$

$$\sigma_1 = \sigma_c + R = 37{,}5 + 83{,}85 = 121{,}35 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_c - R = 37{,}5 - 83{,}85 = -46{,}35 \text{ MPa}$$

$$\tau_{MAX} = R$$



$$\sin 2\varphi = \tau_{xy}$$

$$\cos 2\varphi = \sigma_x - \sigma_c = \sigma_x - \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} = 2 \Rightarrow 2\varphi = 63{,}43°$$

$$\varphi = 31{,}72°$$

Disegnando il polo del cerchio di Mohr possiamo ricavare le direzioni delle normale alle superficie su cui agisce σ_1 :