Università degli Studi di Cagliari

DICAAR - Facoltà di Ingegneria-Architettura

Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 25.01.2022

Parte I - Testo 2

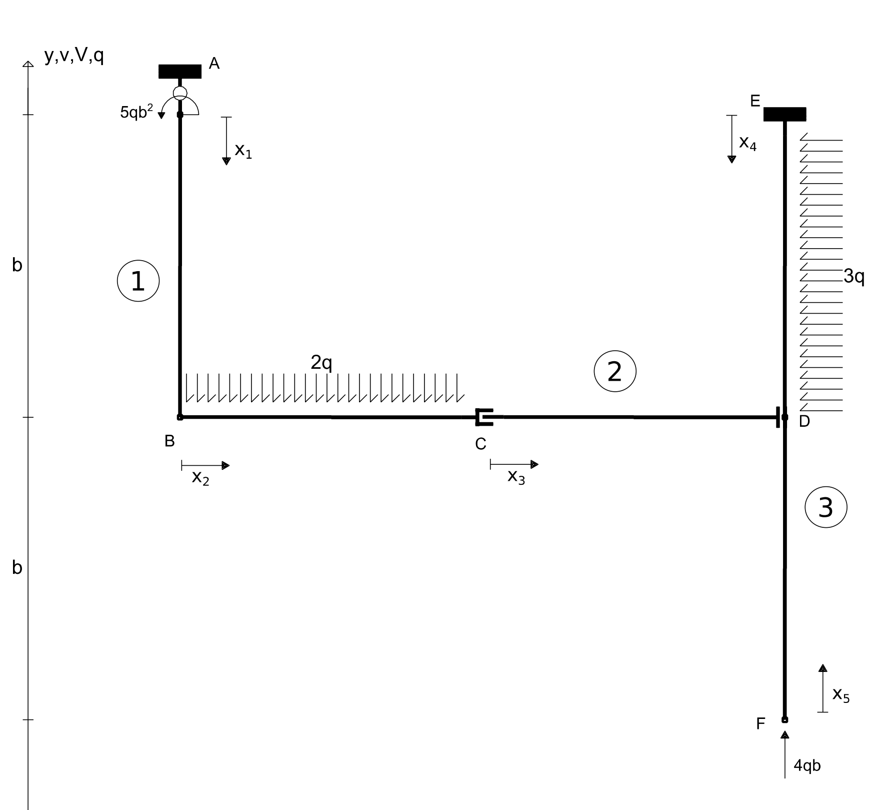
Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:………………………………	e-mail:……………………	Matricola:…….

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le *equazioni* delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari SdC_SdA 25.01.22*002



Esercizio n. 2 (11 punti)

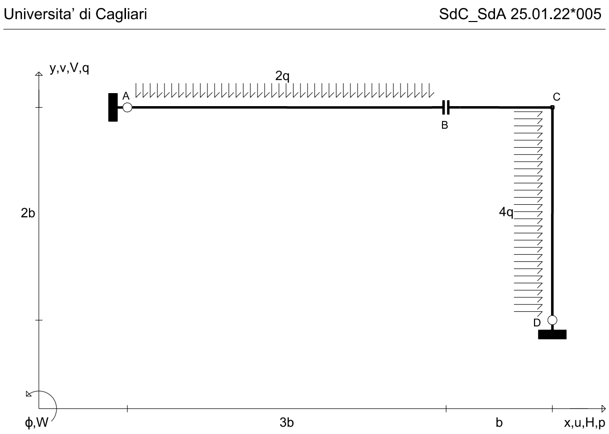
Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare H_D applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

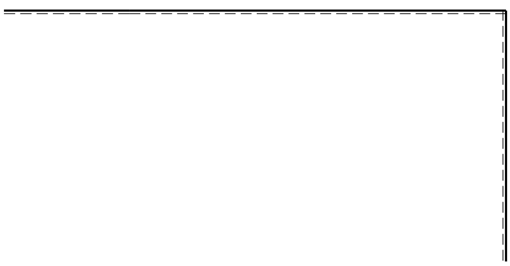
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta AB), C_1, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta BCD), C_2, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12};
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto D, u_D.

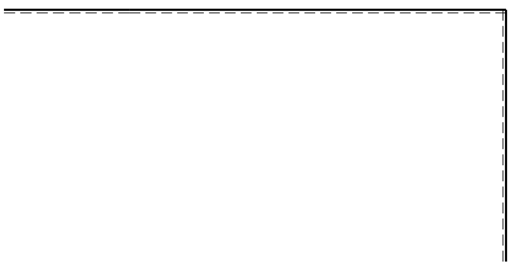
Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto C, M_C.
In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste AB, BC, CD*) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto B relativo al corpo 1, v_B^1, e quella orizzontale dello spostamento del punto B, u_B.

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m), dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.







H_D (⇨) = ...; C_1 = (........., ...); C_2 = (........., ...); C_{12} = (........., ...);

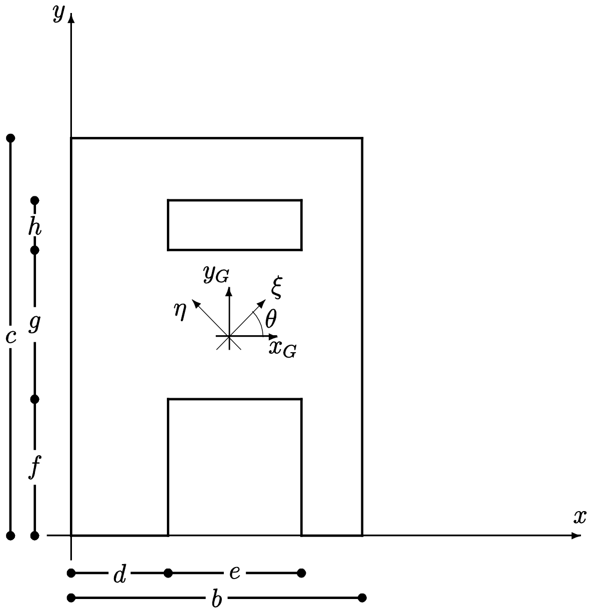
v_C = ...; u_D = ...;

M_C ( ) = ...; v_B^1 = ...; u_B = ...;

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: *Si noti che il disegno non è in scala!*) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 3a$; $c = 5a$; $d = a$; $e = a$; $f = 3a$; $g = 0$; $h = 0$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.



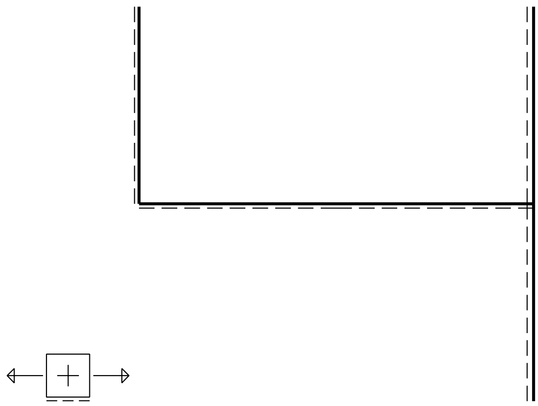
S_x = ...; S_y = ...;

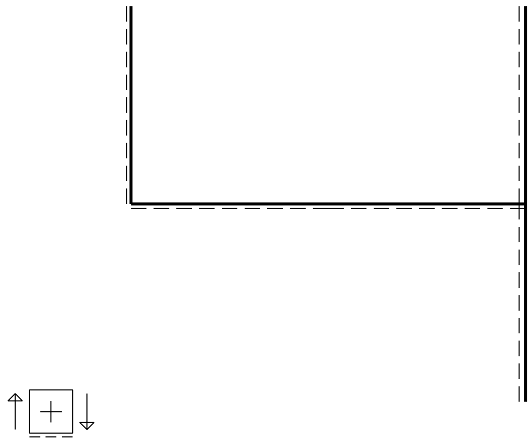
x_G = ...; y_G = ...;

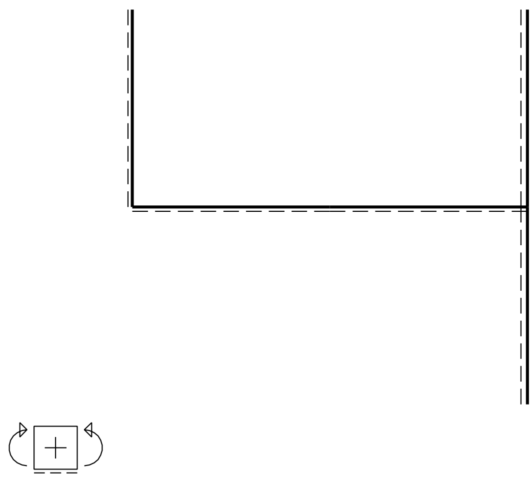
J_{xG} = ...; J_{yG} = ...;

J_{xGyG} = ...; tan 2θ = ...;

$J_\xi = J_{\max}$ = ...; $J_\eta = J_{\min}$ = ...;







H_A (⇨) = ...; V_A (⇧) = ...; H_E (⇨) = ...; V_E (⇧) = ...; M_E (⮵) = ...;

N_{AB} = ... ; T_{AB} = ... ;M_{AB} = ... ;

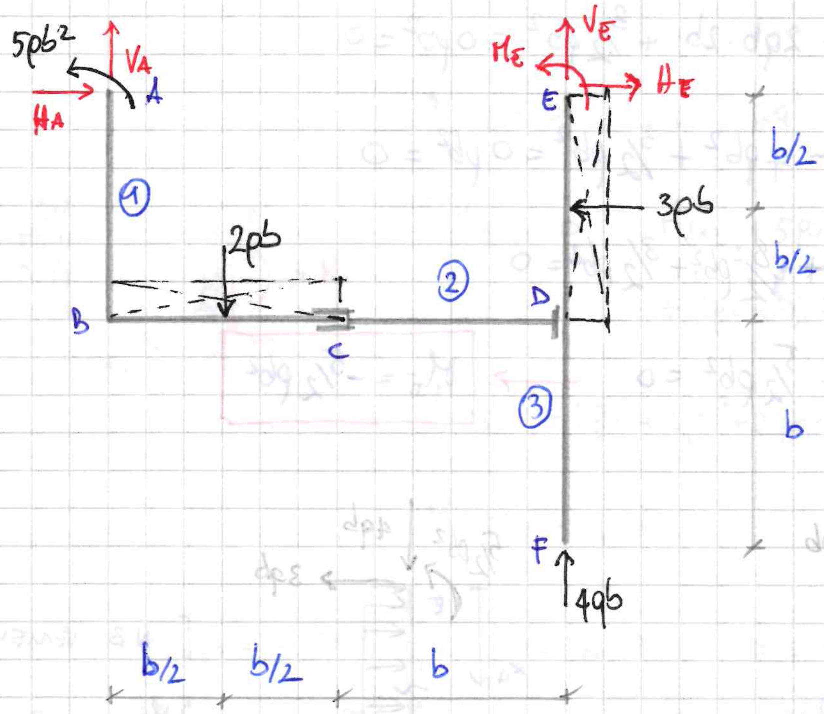
N_{BC} = ... ; T_{BC} = ... ;M_{BC} = ... ;

N_{CD} = ... ; T_{CD} = ... ;M_{CD} = ... ;

N_{ED} = ... ; T_{ED} = ... ;M_{ED} = ... ;

N_{FD} = ... ; T_{FD} = ... ;M_{FD} = ... ;

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO



EQUAZIONI CARDINALI:

[1] $\rightarrow R_x = 0 \qquad H_A + H_E - 3qb = 0$

[2] $\uparrow R_y = 0 \qquad V_A + V_E - 2qb + 4qb = 0$

[3] $\circlearrowleft M_{z(E)} = 0 \qquad M_E - V_A \cdot 2b + 2qb \cdot \frac{3}{2}b - 3qb \cdot \frac{b}{2} + 5qb^2 = 0$

EQUAZIONI AUSILIARIE:

Ⅰ IN C $\Rightarrow$ $R_x^{(1)} = 0$, oppure $R_x^{(2+3)} = 0$

Ⅱ IN D $\Rightarrow$ $R_y^{(3)} = 0$, oppure $R_y^{(1+2)} = 0$

[4] $\rightarrow R_x^{(1)} = 0 \qquad H_A = 0 \longrightarrow \boxed{H_A = 0}$

[5] $\uparrow R_y^{(3)} = 0 \qquad V_E + 4qb = 0 \longrightarrow \boxed{V_E = -4qb}$

[4] → [1] $\cancel{H_A} + H_E - 3qb = 0 \qquad H_E - 3qb = 0 \longrightarrow \boxed{H_E = 3qb}$

[5] → [2] $V_A - \cancel{4qb} - 2qb + \cancel{4qb} = 0 \qquad V_A - 2qb = 0 \longrightarrow \boxed{V_A = 2qb}$

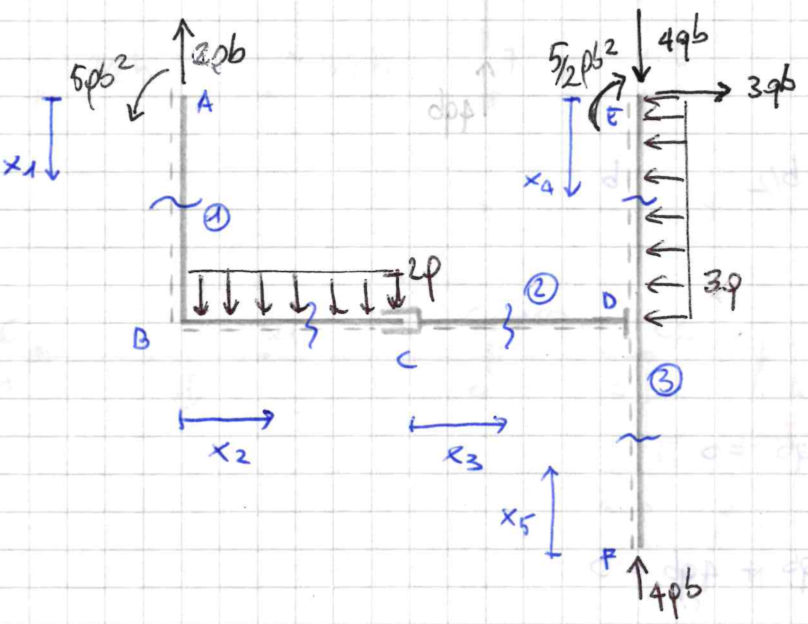
$[2] \rightarrow [3]$ $M_E - V_A \cdot 2b + 3qb^2 - \frac{3}{2}qb^2 + 5pb^2 = 0$

$M_E - 2qb \cdot 2b + \frac{3}{2}pb^2 + 5pb^2 = 0$

$M_E - 4qb^2 + \frac{3}{2}pb^2 + 5pb^2 = 0$

$M_E + qb^2 + \frac{3}{2}pb^2 = 0$

$M_E + \frac{5}{2}pb^2 = 0 \rightarrow \boxed{M_E = -\frac{5}{2}pb^2}$



N.B. VERIFICA:

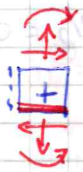
$\Sigma M_{z(A)} = 0$

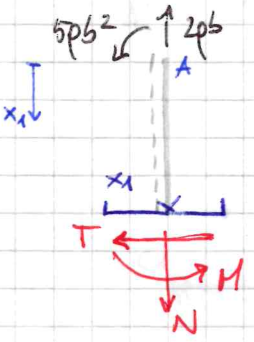
$5pb^2 + qb^2 - \frac{5}{2}pb^2 - \cancel{8pb^2} + \cancel{8pb^2} - \frac{3}{2}pb^2$

$\frac{10}{2}pb^2 - \frac{2}{2}pb^2 - \frac{5}{2}pb^2 - \frac{3}{2}pb^2 = 0$!

CALCOLO AZIONI INTERNE

A → B $\quad 0 \le x_1 \le b$



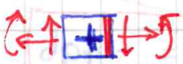


$\downarrow R_{\parallel} = 0 \quad N(x_1) - 2qb = 0 \quad \boxed{N(x_1) = 2qb}$

$\rightarrow R_{\perp} = 0 \quad \boxed{T(x_1) = 0}$

$\Sigma M_{z(x_1)} = 0 \quad M(x_1) + 5qb^2 = 0 \quad \boxed{M(x_1) = -5qb^2}$

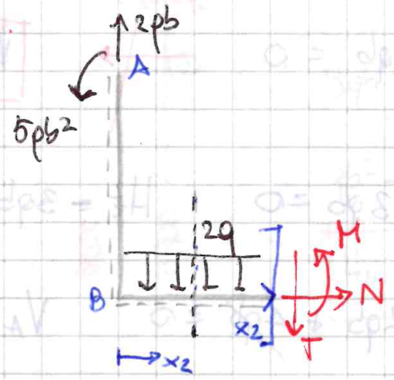
B → C $\quad 0 \le x_2 \le b$



$\rightarrow R_{\parallel} = 0 \quad \boxed{N(x_2) = 0}$

$\uparrow R_{\perp} = 0 \quad 2qb - 2qx_2 + T(x_2) = 0$

$\boxed{T(x_2) = 2qb - 2qx_2}$

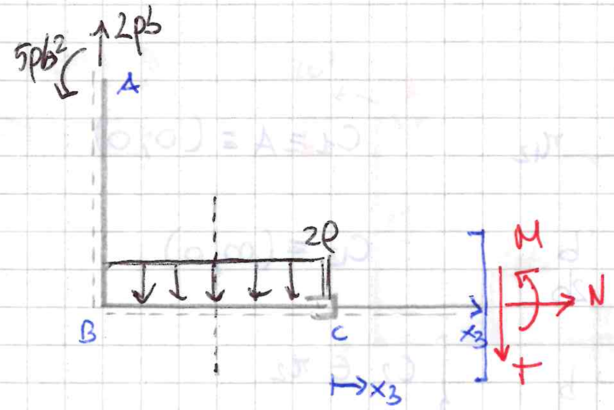


$\Sigma M_{z(x_2)} = 0$

$M(x_2) + 5qb^2 + 2qx_2 \cdot \frac{x_2}{2} - 2qbx_2 = 0$

$\boxed{M(x_2) = -5qb^2 + 2qbx_2 - qx_2^2}$

C → D $0 \le x_3 \le b$



$\rightarrow R_{\parallel} = 0 \qquad \boxed{N(x_3) = 0}$

$\uparrow R_{\perp} = 0 \qquad \cancel{2pb} - \cancel{2qb} - T(x_3) = 0 \qquad \boxed{T(x_3) = 0}$

$\circlearrowleft M_{z(x_3)} = 0 \qquad M(x_3) + 5pb^2 - 2pb(b + x_3) + 2pb\left(b/2 + x_3\right) = 0$

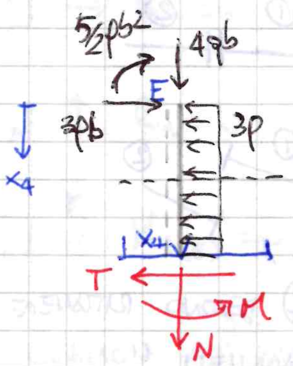
$M(x_3) = -5pb^2 + 2pb^2 + \cancel{2qbx_3} - qb^2 - \cancel{2pbx_3}$

$M(x_3) = -4pb^2$

N.B. $M(x_2) \rightarrow x_2 = 0 \quad M(x_2) = -5pb^2$ IN B $M(x_2)$ DEVE ESSERE UGUALE A $M(x_1)$

$M(x_2) \rightarrow x_2 = b \quad M(x_2) = -4pb^2$ * IN C $M(x_2)$ DEVE ESSERE UGUALE A $M(x_3)$

E → D $0 \le x_4 \le b$



$\downarrow R_{\parallel} = 0 \qquad N(x_4) + 4pb = 0 \qquad \boxed{N(x_4) = -4pb}$

$\rightarrow R_{\perp} = 0 \qquad 3pb - 3px_4 - T(x_4) = 0 \qquad \boxed{T(x_4) = 3pb - 3qx_4}$

$\circlearrowleft M_{z(x_4)} = 0 \qquad M(x_4) - 5/2\,pb^2 - 3qbx_4 + 3qx_4\frac{x_4}{2} = 0$

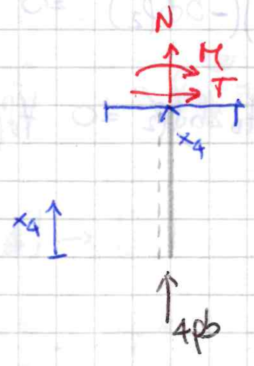
$$\boxed{M(x_4) = 5/2\,pb^2 + 3qbx_4 - \frac{3}{2}px_4^2}$$

$M(x_4) \rightarrow x_4 = 0 \qquad M(x_4) = 5/2\,pb^2$

$M(x_4) \rightarrow x_4 = b \qquad M(x_4) = 4qb^2$ * [IN D = A $M(x_3)$]

M SI RIPORTA DAL LATO DELLE FIBRE TESE!!

F → D $0 \le x_5 \le b$

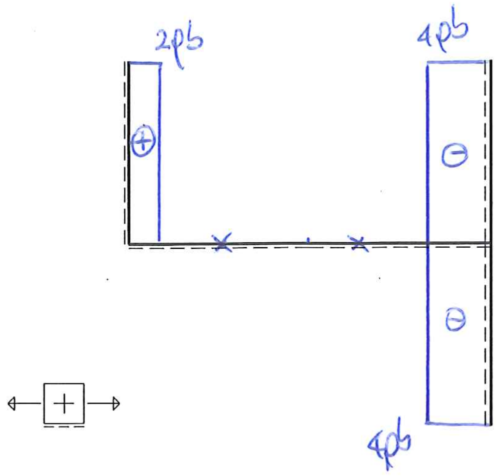


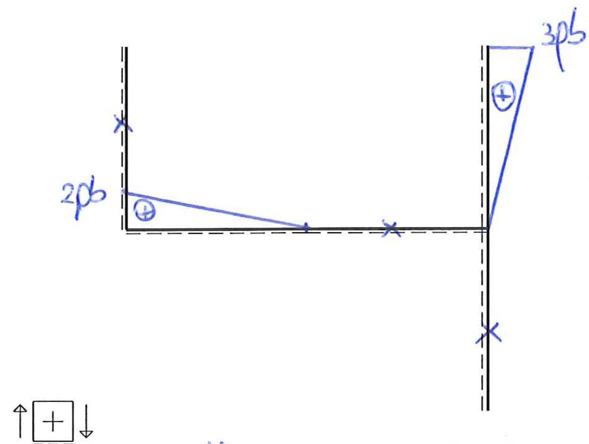
$\uparrow R_{\parallel} = 0 \qquad N(x_5) + 4pb = 0 \qquad \boxed{N(x_5) = -4qb}$ [UGUALE AL TRATTO ED]

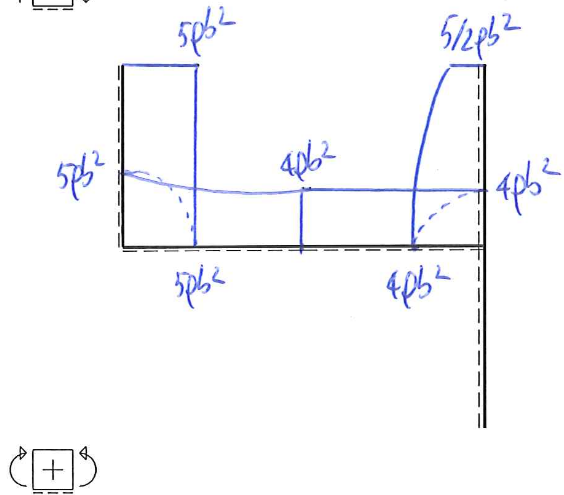
$\rightarrow R_{\perp} = 0 \qquad \boxed{T(x_5) = 0}$

$\circlearrowleft M_{z(x_5)} = 0 \qquad \boxed{M(x_5) = 0}$

* [N.B. IN D EQUILIBRIO DEI MOMENTI]







H_A (⇨) = 0; V_A (⇧) = 2qb; H_E (⇨) = 3pb; V_E (⇧) = −4pb; M_E = $-5/2\,pb^2$;

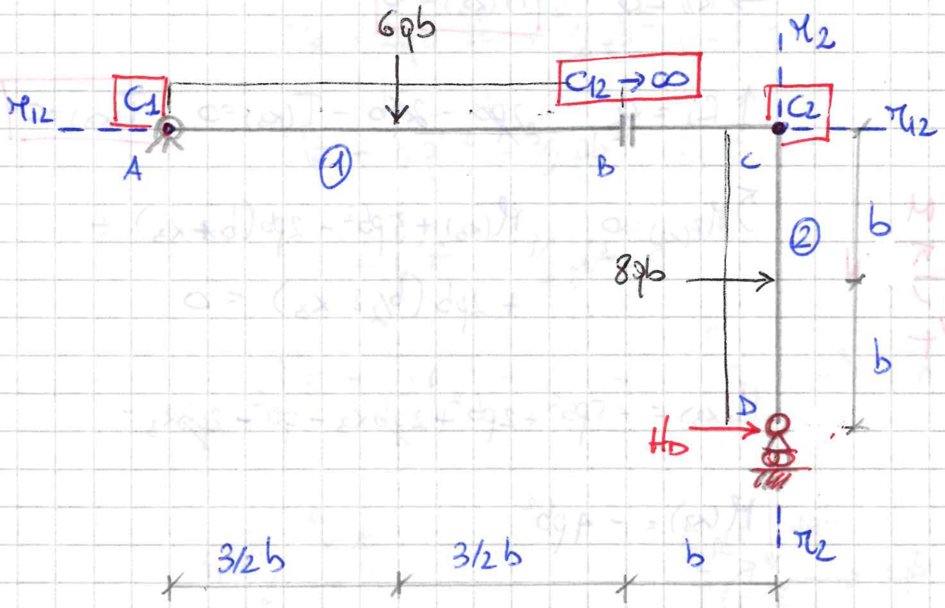
N_{AB} = 2qb ; T_{AB} = 〃 ; M_{AB} = $-5pb^2$;

N_{BC} = 〃 ; T_{BC} = $2qb - 2qx_2$; M_{BC} = $-5pb^2 + 2pbx_2 - qx_2^2$;

N_{CD} = 〃 ; T_{CD} = 〃 ; M_{CD} = $-4pb^2$;

N_{ED} = −4qb ; T_{ED} = $3pb - 3px_4$; M_{ED} = $5/2\,pb^2 + 3pbx_4 - 3/2\,px_4^2$;

N_{FD} = −4qb ; T_{FD} = 〃 ; M_{FD} = 〃 ;

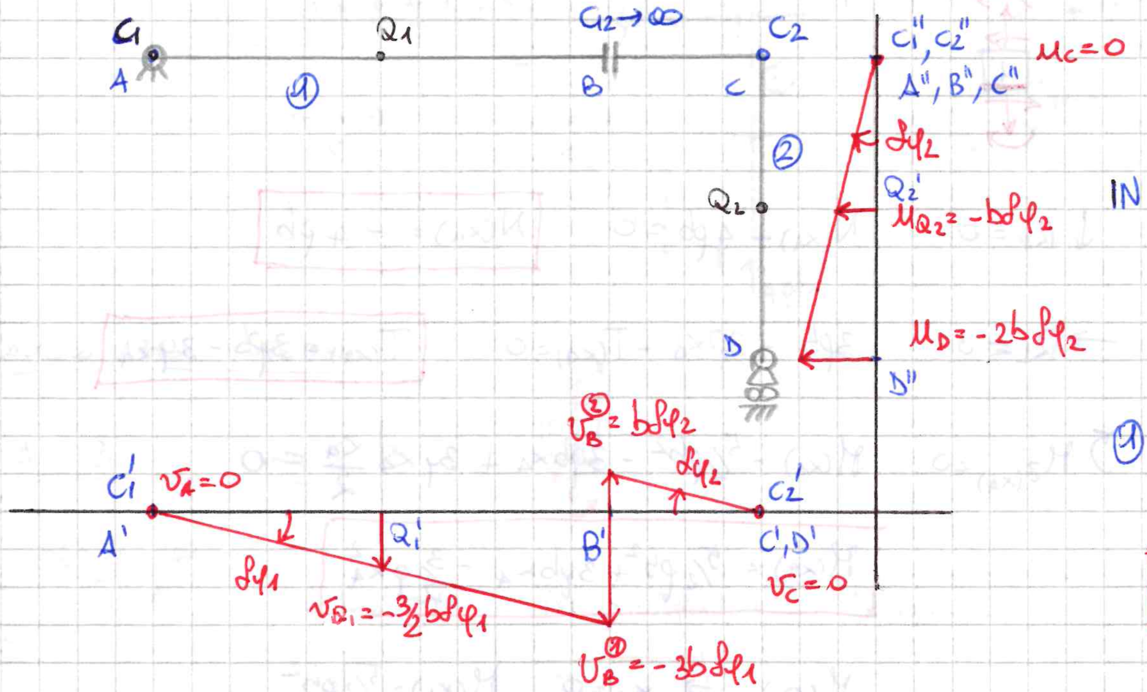


$C_1 \equiv A = (0,0)$

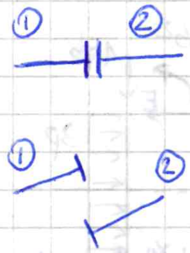
$C_{12} = (\infty, 0)$

$\begin{cases} C_2 \in r_2 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{12} \end{cases}$

$\boxed{C_2 \equiv C = (4b, 0)}$



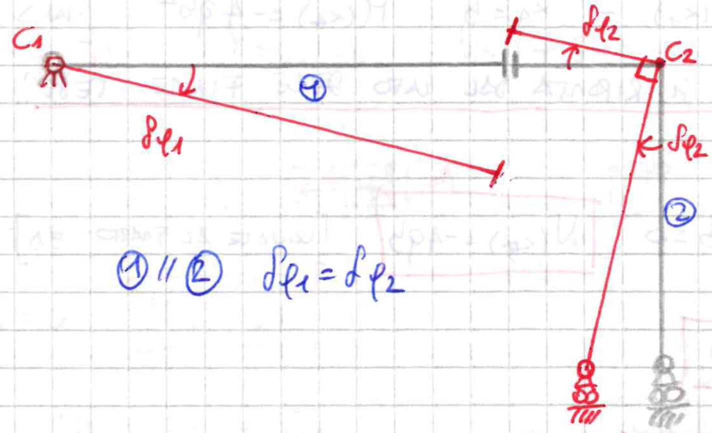
IN B



(1) E (2) DEVONO RIMANERE PARALLELI !!

$\boxed{\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2}$

PLV PER DETERMINARE H_D



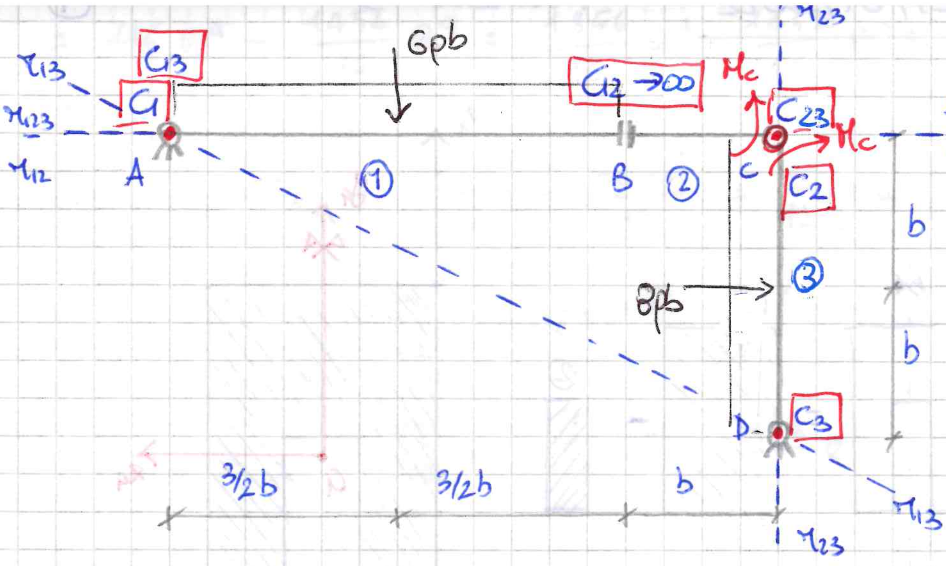
(1) // (2) $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$

$6qb \cdot \frac{3}{2} b\delta\varphi_1 - 8qb \cdot b\delta\varphi_2 - H_D \cdot 2b\delta\varphi_2 = 0$

$9qb^2 \cancel{\delta\varphi_2} - 8qb^2 \cancel{\delta\varphi_2} - H_D 2b \cancel{\delta\varphi_2} = 0 \quad \forall \delta\varphi_2$

$qb^2 - H_D 2b = 0$

$\boxed{H_D = \frac{1}{2} qb}$



$C_1 \equiv A = (0,0)$

$C_{12} = (\infty, 0)$

$C_{23} \equiv C = (4b, 0)$

$C_3 \equiv D = (4b, -2b)$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 & C_2 \in r_{12} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 & C_2 \in r_{23} \end{cases}$$

$\boxed{C_2 \equiv C = (4b, 0)}$

N.B. $C_2 \equiv C_{23}$

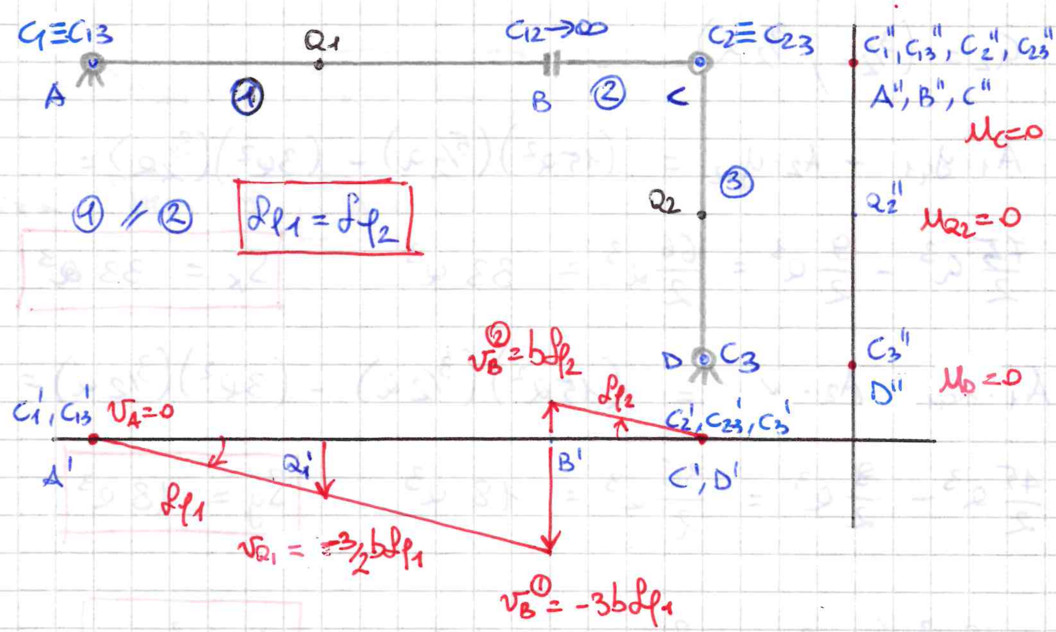
IL CORPO ③ RIMANE FERMO!

$C_1 \equiv C_{13}$

$C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 \quad C_{13} \in r_{13}$

$C_{12} \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_{23} \quad C_{13} \in r_{123}$

$\boxed{C_{13} \equiv A = (0,0)}$

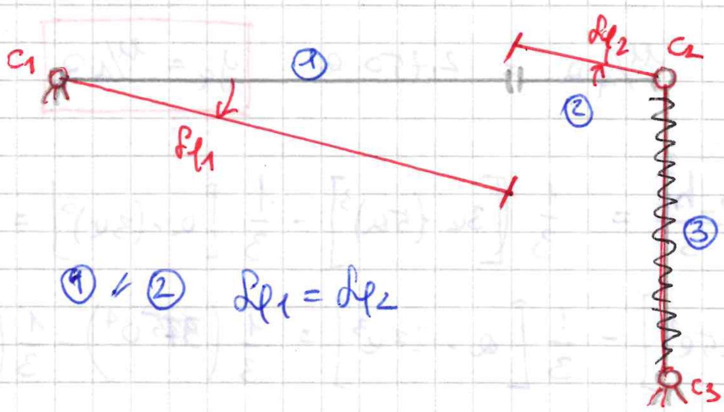


① // ② $\boxed{\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2}$

IL CORPO ③ RIMANE FERMO!

C_2 E C_3 NON POSSONO MUOVERSI

IL CORPO ① E ② NON SUBISCONO SPOSTAMENTI ORIZZONTALI



① // ② $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$

PLV PER DETERMINARE M_C

$6qb \cdot \frac{3}{2} b\,\delta\varphi_1 - M_C\,\delta\varphi_2 = 0$

$9qb^2\,\delta\varphi_1 - M_C\,\delta\varphi_2 = 0$

$9qb^2\,\delta\varphi_2 - M_C\,\delta\varphi_2 = 0 \quad \forall\, \delta\varphi_2$

$9qb^2 - M_C = 0$

$\boxed{M_C = 9qb^2}$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare H_D applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

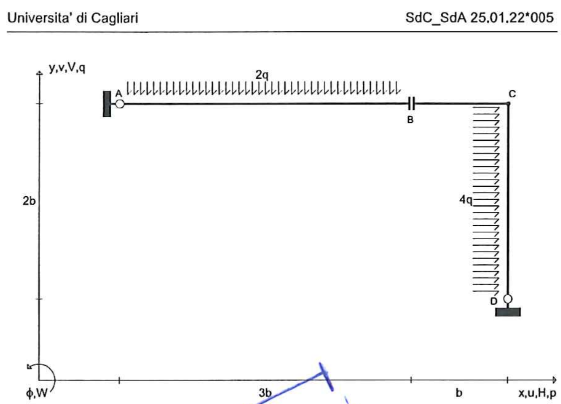
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta AB), C_1, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta BCD), C_2, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12};
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto D, u_D.

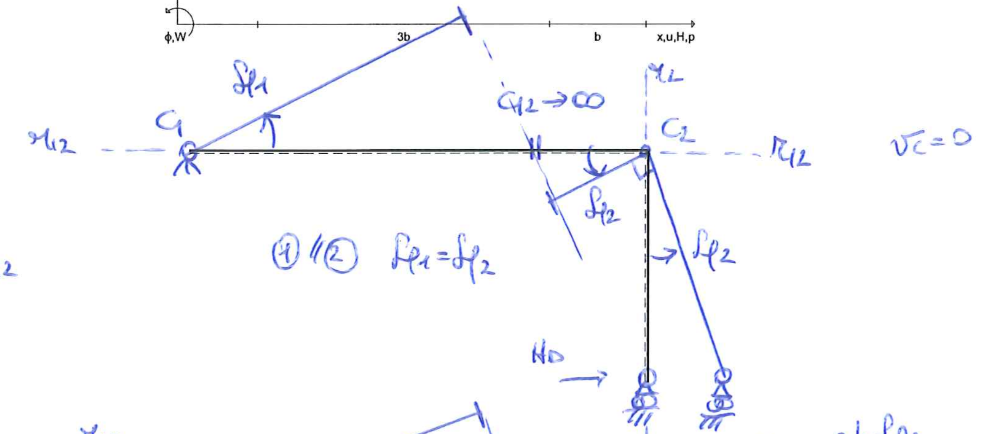
Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto C, M_C.

In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste AB, BC, CD*) si richiede di:

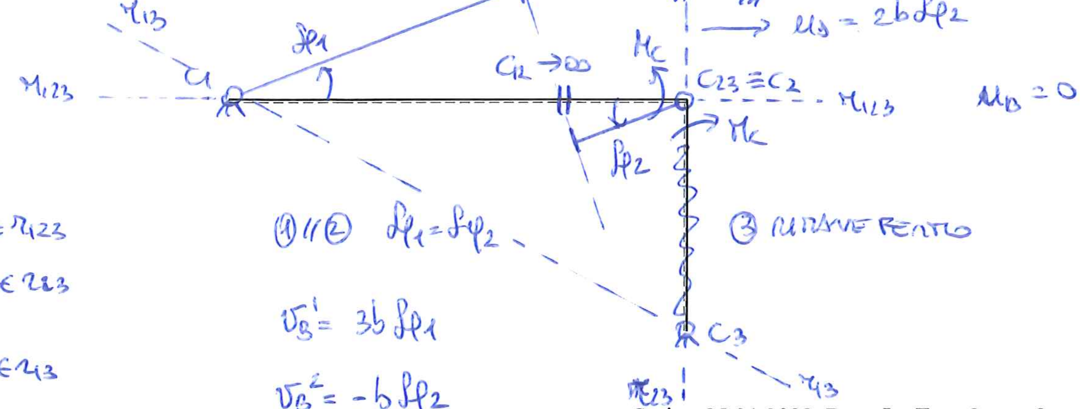
4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto B relativo al corpo 1, v_B^1, e quella orizzontale dello spostamento del punto B, u_B.

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m), dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.



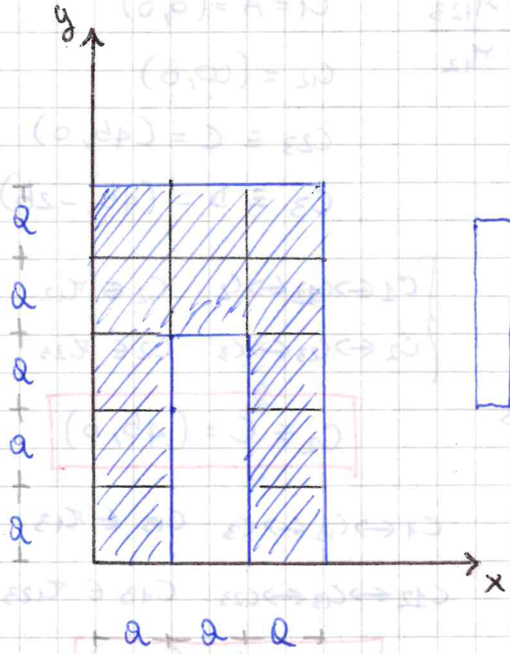


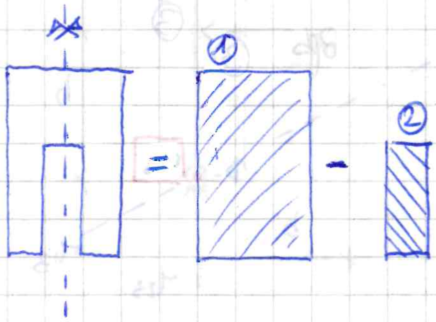
$\begin{cases} C_2 \in r_2 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_1 \in r_{12} \end{cases}$

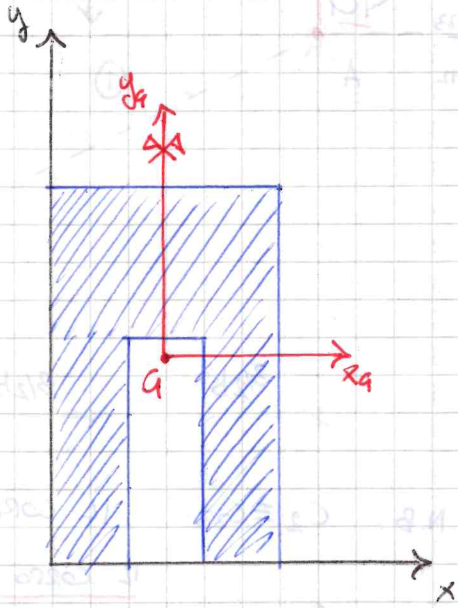


$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{123} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \quad C_2 \in r_{23} \end{cases}$

$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 \quad C_3 \in r_{13} \\ C_{12} \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \quad C_{13} \in r_{123} \end{cases}$







$A_1 = 15a^2$ $\quad G_1 = \left(\frac{3}{2}a \,;\, \frac{5}{2}a\right)$ $\quad A = A_1 - A_2 = 12a^2$

$A_2 = 3a^2$ $\quad G_2 = \left(\frac{3}{2}a \,;\, \frac{3}{2}a\right)$

$$\boxed{S_x = S_x^1 - S_x^2} = A_1 \cdot y_{G1} - A_2 \cdot y_{G2} = (15a^2)\left(\tfrac{5}{2}a\right) - (3a^2)\left(\tfrac{3}{2}a\right) =$$

$$= \frac{75}{2}a^3 - \frac{9}{2}a^3 = \frac{66}{2}a^3 = 33a^3 \qquad \boxed{S_x = 33a^3}$$

$$\boxed{S_y = S_y^1 - S_y^2} = A_1 \cdot x_{G1} - A_2 \cdot x_{G2} = (15a^2)\left(\tfrac{3}{2}a\right) - (3a^2)\left(\tfrac{3}{2}a\right) =$$

$$= \frac{45}{2}a^3 - \frac{9}{2}a^3 = \frac{36}{2}a^3 = 18a^3 \qquad \boxed{S_y = 18a^3}$$

$$\boxed{x_G = S_y/A} = 18a^3/12a^2 = \tfrac{3}{2}a = 1{,}5\,a \qquad \boxed{x_G = \tfrac{3}{2}a}$$

$$y_G = S_x/A = 33a^3/12a^2 = \tfrac{11}{4}a = 2{,}750\,a \qquad \boxed{y_G = \tfrac{11}{4}a}$$

$$\boxed{J_x = J_{x_1} - J_{x_2}} = \frac{b_1 h_1^3}{3} - \frac{b_2 h_2^3}{3} = \frac{1}{3}\left[3a\,(5a)^3\right] - \frac{1}{3}\left[a \cdot (3a)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[3a \cdot 125a^3\right] - \frac{1}{3}\left[a \cdot 27a^3\right] = \frac{1}{3}\left(375a^4\right) - \frac{1}{3}\left(27a^4\right) =$$

$$= \frac{375}{3}a^4 - \frac{27}{3}a^4 = \frac{348}{3}a^4 = 116a^4$$

$$\boxed{J_{xG} = J_x - A \cdot y_G^2} = 116a^4 - 12a^2 \cdot \left(\tfrac{11}{4}a\right)^2 = 116a^4 - 12a^2\left(\tfrac{121}{16}a^2\right) =$$

$$= 116\,e^4 - \frac{1452}{16} e^4 = \frac{1856}{16} e^4 - \frac{1452}{16} e^4 = \frac{404}{16} e^4 = \frac{101}{4} e^4 \qquad \boxed{J_{x_G} = \frac{101}{4} e^4}$$

$$\boxed{J_{y_G} = J_{y_{G1}} - J_{y_{G2}}} = \frac{h_1 b_1^3}{12} - \frac{h_2 \cdot b_2^3}{12} = \frac{1}{12}\left[5e \cdot (3e^3)\right] - \frac{1}{12}\left[3e \cdot (e)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left(5e \cdot 27e^3\right) - \frac{1}{12}\left(3e^4\right) = \frac{1}{12}\left(135\,e^4\right) - \frac{1}{12}\left(3e^4\right) =$$

$$= \frac{135}{12} e^4 - \frac{3}{12} e^4 = \frac{132}{12} e^4 = 11\,e^4 \qquad \boxed{J_{y_G} = 11\,e^4}$$

$\boxed{J_{x_G y_G} = 0}$ $\quad y_G$ ASSE DI SIMMETRIA

$$tg\, 2\vartheta = -\frac{2\cancel{J_{x_G y_G}}}{J_{x_G} - J_{y_G}} = 0 \qquad \boxed{tg\, 2\vartheta = 0} \quad \begin{cases} \boxed{\vartheta = 0} & \text{SE } J_{x_G} > J_{y_G} \\ \vartheta = \pi/2 & \text{SE } J_{x_G} < J_{y_G} \end{cases}$$

$$J_\xi = J_{MAX} \rightarrow \boxed{J_\xi = J_{x_G}}$$

$$J_\eta = J_{MIN} \rightarrow \boxed{J_\eta = J_{y_G}}$$

H_D (⇨) = $1/2\, pb$; C_1 = (0, 0); C_2 = ($4b$, 0); C_{12} = (∞, 0);

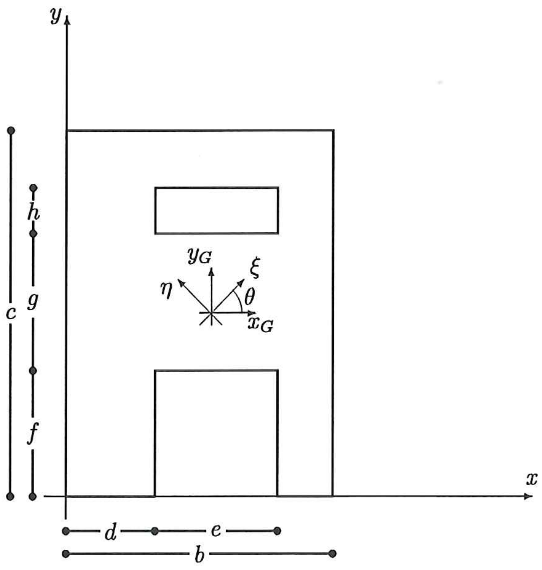
v_C = 0; u_D = $2b\,\delta\varphi_2$;

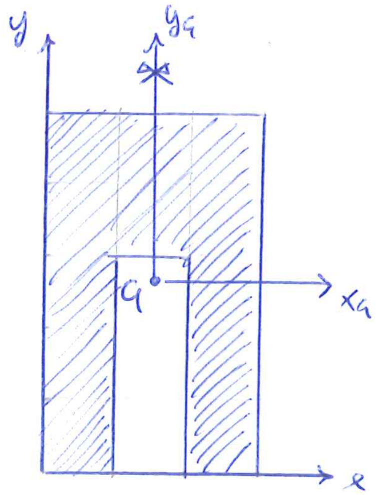
M_C (⇦□⇨) = $9pb^2$; $v_B^{\,I}$ = $3b\,\delta\varphi_1$; u_B = 0;

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: <u>*Si noti che il disegno non è in scala!*</u>) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 3a$; $c = 5a$; $d = a$; $e = a$; $f = 3a$; $g = 0$; $h = 0$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.





S_x = $33\, a^3$; S_y = $18\, a^3$;

x_G = $3/2\, a = 1{,}5\, a$; y_G = $11/4\, a = 2{,}750\, a$;

J_{xG} = $101/4\, a^4 = 25{,}250\, a^4$; J_{yG} = $11 a^4$;

J_{xGyG} = 0; $\tan 2\theta$ = 0 $(2\theta = 0)$;

$J_\xi = J_{\max}$ = $J_{x_G} = 101/4\, a^4$; $J_\eta = J_{\min}$ = $J_{y_G} = 11 a^4$;