Università degli Studi di Cagliari

DICAAR - Facoltà di Ingegneria-Architettura

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 11.01.2022
Parte I - Testo 1

CdS **Edilizia** □ CdS **AdC** □ CdS **SdA** □

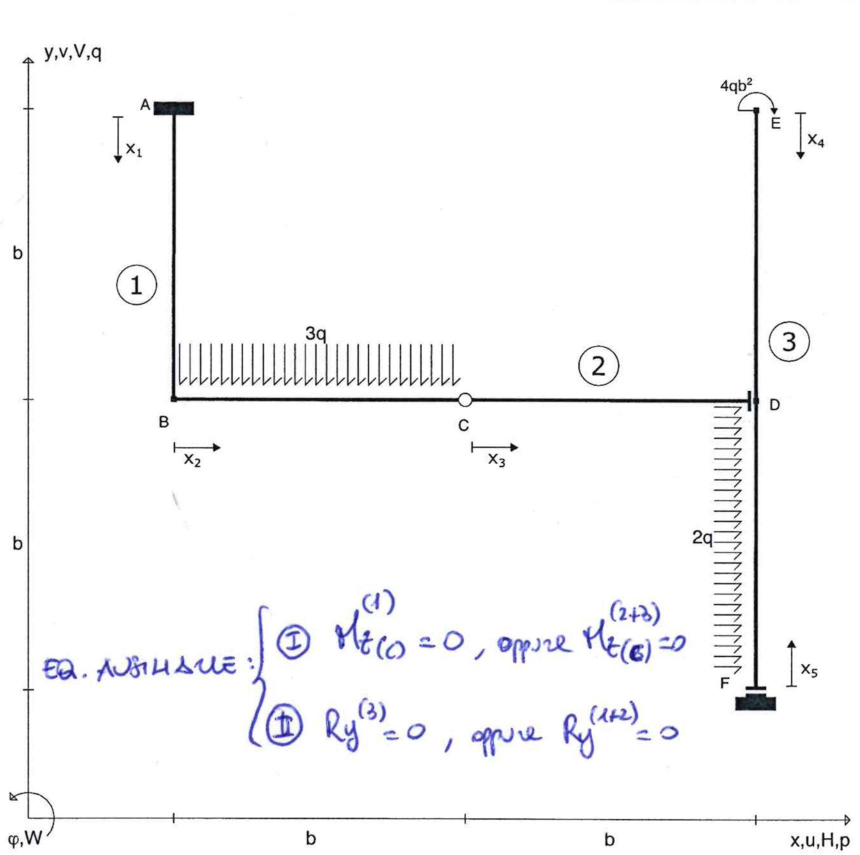
Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:.................................... e-mail:....................... Matricola:.......

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le *equazioni* delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

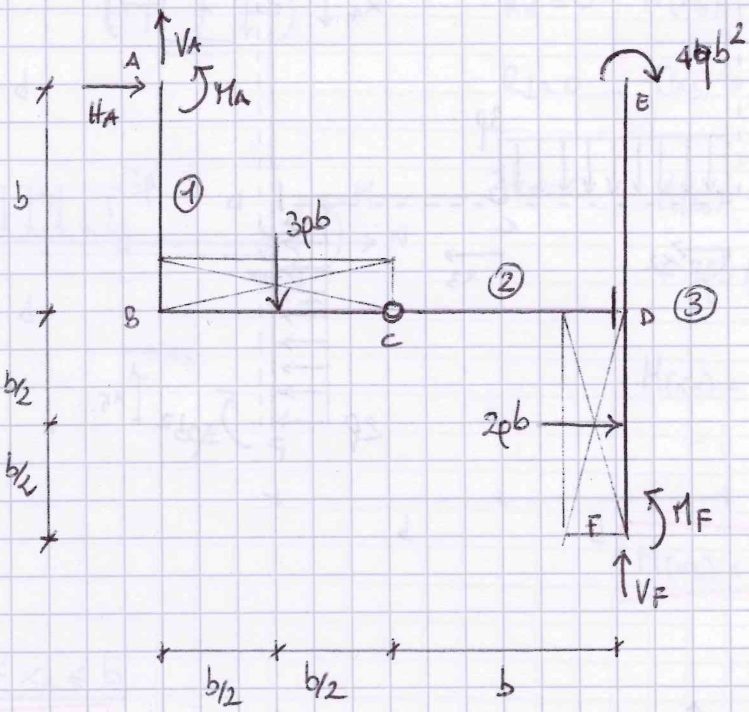
Universita' di Cagliari SdC_SdA 11.01.22*001



EQ. AUSILIARIE:
① $M_{t(C)}^{(1)} = 0$, oppure $M_{t(C)}^{(2+3)} = 0$
② $R_y^{(3)} = 0$, oppure $R_y^{(1+2)} = 0$

ESERCIZIO N° 1

• DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO



• EQ. CARDINALI:

$$\begin{cases} R_x = 0 \rightarrow (1)\ H_A + 2qb = 0 \\ R_y = 0 \uparrow (2)\ V_A + V_F - 3qb = 0 \\ M_{z(A)} = 0 \circlearrowleft (3)\ M_A + M_F + V_F \cdot 2b - 3qb \cdot \frac{b}{2} + 2qb \cdot \frac{3}{2}b - 4qb^2 = 0 \end{cases}$$

• EQ. AUSILIARIE:

(I) $M_{z(C)}^{(1)} = 0$, oppure $M_{z(C)}^{(2+3)} = 0$

$M_{z(C)}^{(1)} = 0 \circlearrowleft$ (4) $M_A - V_A b - H_A b + 3qb \cdot \frac{b}{2} = 0$

(II) $R_y^{(3)} = 0$, oppure $R_y^{(1+2)} = 0$

$R_y^{(3)} = 0 \uparrow$ (5) $\boxed{V_F = 0}$

(5) → (2) $V_A + \cancel{V_F} - 3qb = 0$ $\boxed{V_A = 3qb}$

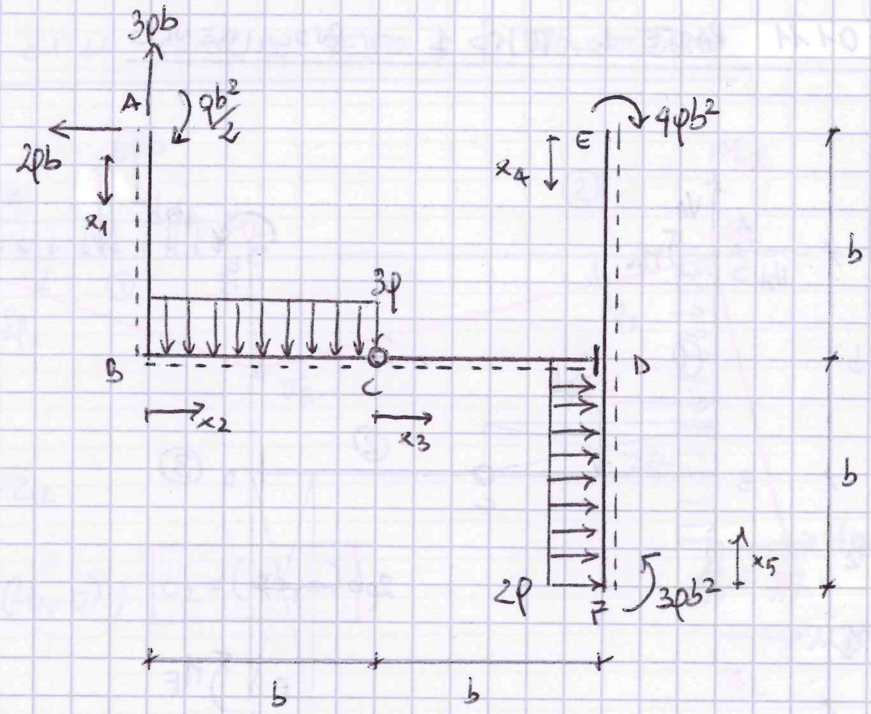
(1) $H_A + 2qb = 0$ $\boxed{H_A = -2qb}$

(1) e (2) → (4) $M_A - 3qb^2 + 2qb^2 + \frac{3}{2}qb^2 = 0$ $M_A = 3qb^2 - 2qb^2 - \frac{3}{2}qb^2$ $\boxed{M_A = -\frac{1}{2}qb^2}$

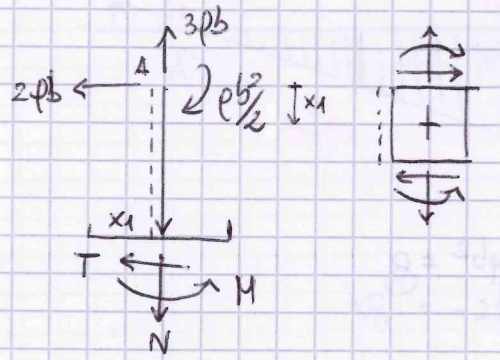
(4) e (5) → (3) $-\frac{1}{2}qb^2 + M_F + \cancel{V_F 2b} - \frac{3}{2}qb^2 + 3qb^2 - 4qb^2 = 0$ $M_F = \frac{1}{2}qb^2 + \frac{3}{2}qb^2 - 3qb^2 + 4qb^2$

$\boxed{M_F = 3qb^2}$

- DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO CON LE REAZIONI CALCOLATE



- TRATTO AB $0 \leq x_1 \leq b$



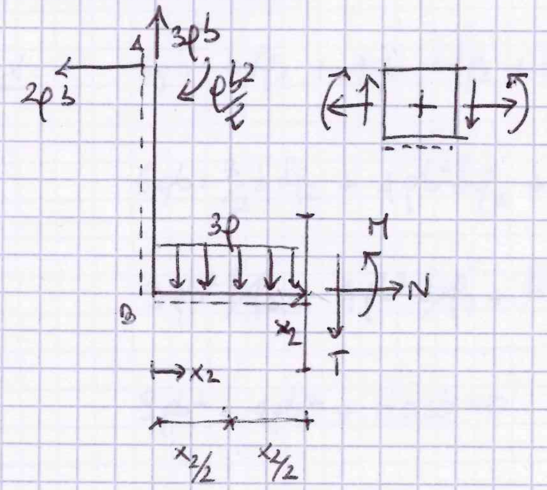
$R_\perp = 0 \quad N(x_1) - 3pb = 0 \quad \boxed{N(x_1) = 3pb}$

$R_\parallel = 0 \quad -T(x_1) - 2pb = 0 \quad \boxed{T(x_1) = -2pb}$

$M_z = 0 \quad M(x_1) - \frac{pb^2}{2} + 2pb\,x_1 = 0 \quad \boxed{M(x_1) = \frac{qb^2}{2} - 2pb\,x_1}$

$M(x_1 = 0) = \frac{qb^2}{2} \qquad M(x_1 = b) = -\frac{3}{2}qb^2$

- TRATTO BC $0 \leq x_2 \leq b$



$R_\perp = 0 \quad N(x_2) - 2pb = 0 \quad \boxed{N(x_2) = 2pb}$

$R_\parallel = 0 \quad -T(x_2) + 3pb - 3px_2 = 0 \quad \boxed{T(x_2) = +3pb - 3px_2}$

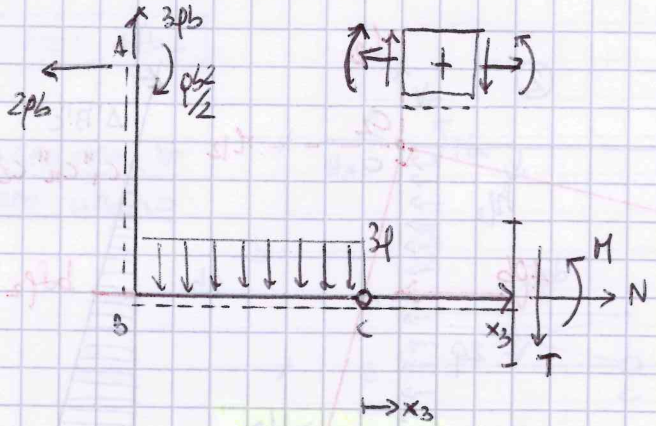
$M_z = 0 \quad M(x_2) - \frac{qb^2}{2} + 2qb^2 - 3pb\,x_2 + 3px_2 \cdot \frac{x_2}{2} = 0$

$$\boxed{M(x_2) = -\frac{3}{2}pb^2 + 3pb\,x_2 - \frac{3}{2}q\,x_2^2}$$

$M(x_2 = 0) = -\frac{3}{2}pb^2 \qquad M(x_2 = b) = 0$

$T(x_2 = 0) = 3pb \qquad T(x_2 = b) = 0$

• TRATTO CB $\quad 0 \le x_3 \le b$



$R_{\parallel} = 0 \quad N(x_3) - 2qb = 0 \quad \boxed{N(x_3) = 2qb}$

$R_{\perp} = 0 \quad -T(x_3) + \cancel{3pb} - \cancel{3pb} = 0 \quad \boxed{T(x_3) = 0}$

$M_z = 0 \quad M(x_3) - qb^2/2 + 2qb^2 - 3pb(b + x_3) +$

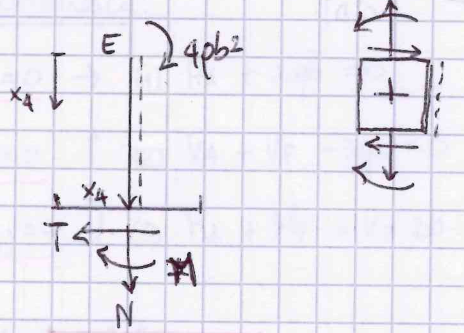
$+ 3pb\left(b/2 + x_3\right) = 0$

$M(x_3) = + qb^2/2 - 2pb^2 + 3pb^2 + \cancel{3pb\,x_3} +$

$- 3/2\,pb^2 - \cancel{3pb\,x_3}$

$\boxed{M(x_3) = 0}$

• TRATTO ED $\quad 0 \le x_4 \le b$

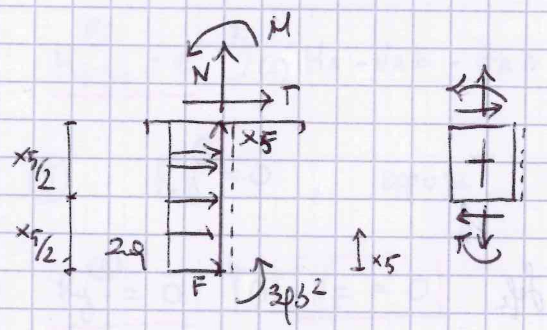


$R_{\parallel} = 0 \quad \boxed{N(x_4) = 0}$

$R_{\perp} = 0 \quad \boxed{T(x_4) = 0}$

$M_z = 0 \quad M(x_4) + 4pb^2 = 0 \quad \boxed{M(x_4) = -4pb^2}$

• TRATTO FD $\quad 0 \le x_5 \le b$



$R_{\parallel} = 0 \quad \boxed{N(x_5) = 0}$

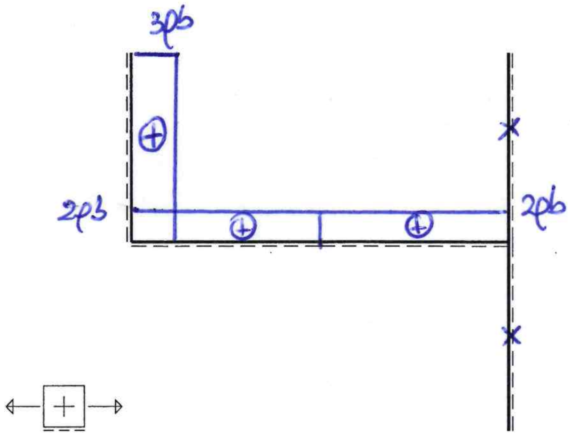
$R_{\perp} = 0 \quad T(x_5) + 2q x_5 = 0 \quad \boxed{T(x_5) = -2q\,x_5}$

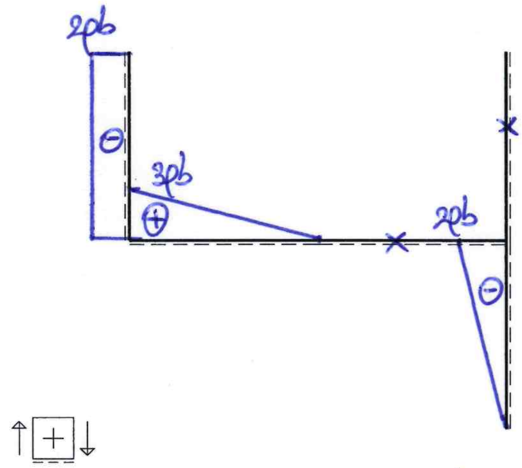
$M_z = 0 \quad M(x_5) + 3pb^2 + 2q x_5 \cdot \frac{x_5}{2} = 0$

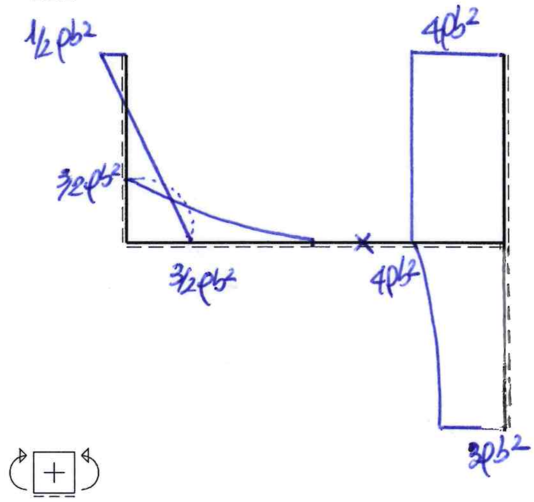
$\boxed{M(x_5) = -3pb^2 - q x_5^2}$

$M(x_5 = 0) = -3pb \qquad M(x_5 = b) = -4pb^2$

$T(x_5 = 0) = 0 \qquad T(x_5 = b) = -2pb$







H_A (⇨) = $-2pb$; V_A (⇧) = $3pb$; M_A = $-\frac{1}{2}pb^2$; V_F (⇧) = 0; M_F = $3pb^2$;

N_{AB} = $3pb$; T_{AB} = $-2pb$; M_{AB} = $\frac{1}{2}pb^2 - 2pbx_1$;

N_{BC} = $2pb$; T_{BC} = $3pb - 3px_2$; M_{BC} = $-\frac{3}{2}pb^2 + 3pbx_2 - \frac{3}{2}px_2^2$;

N_{CD} = // ; T_{CD} = // ; M_{CD} = // ;

N_{ED} = // ; T_{ED} = // ; M_{ED} = $-4pb^2$;

N_{FD} = // ; T_{FD} = $-2px_5$; M_{FD} = $-3pb^2 - px_5^2$;

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare H_D applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

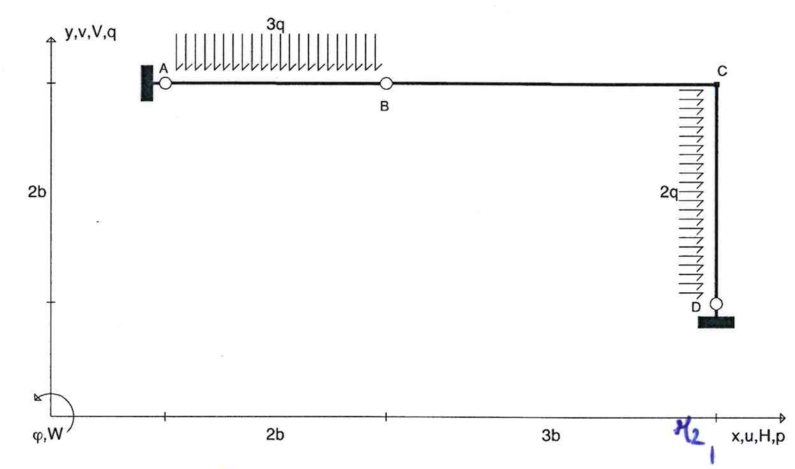
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta AB), C_1, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta BCD), C_2, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12};
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto D, u_D.

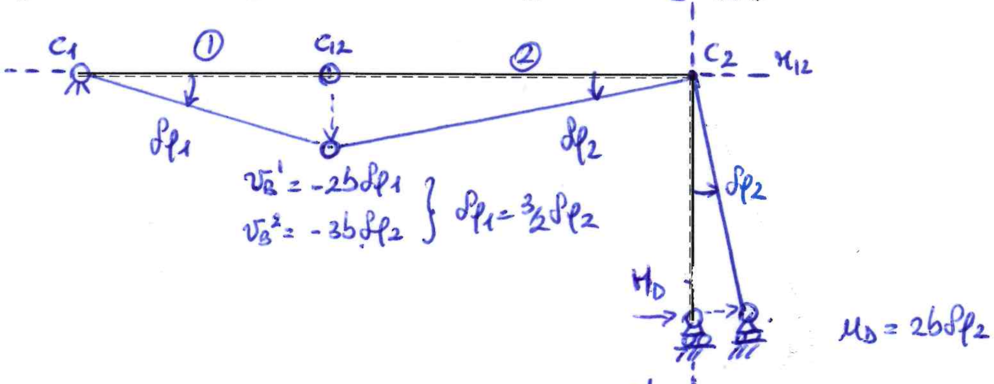
Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto C, M_C.
In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste AB, BC, CD*) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto B, v_B, e quella orizzontale dello spostamento del punto B, u_B.

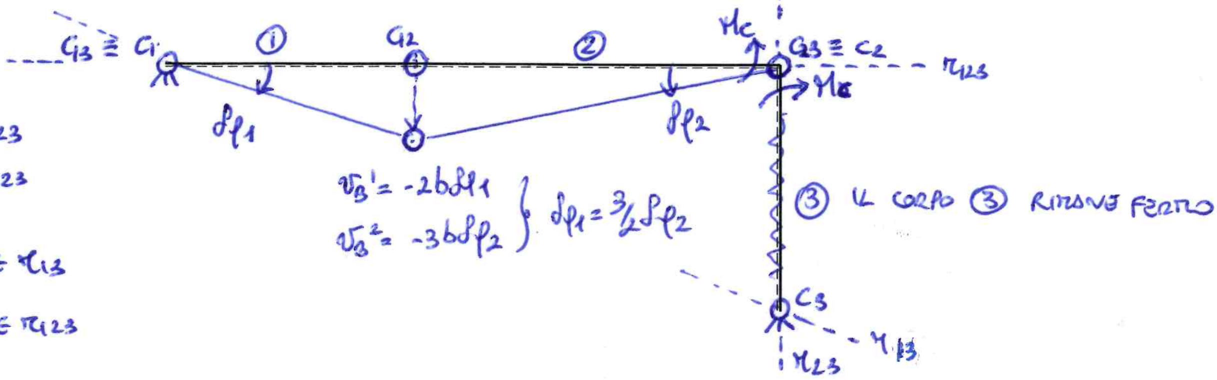
Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m), dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Universita' di Cagliari SdC_SdA 11.01.22*003





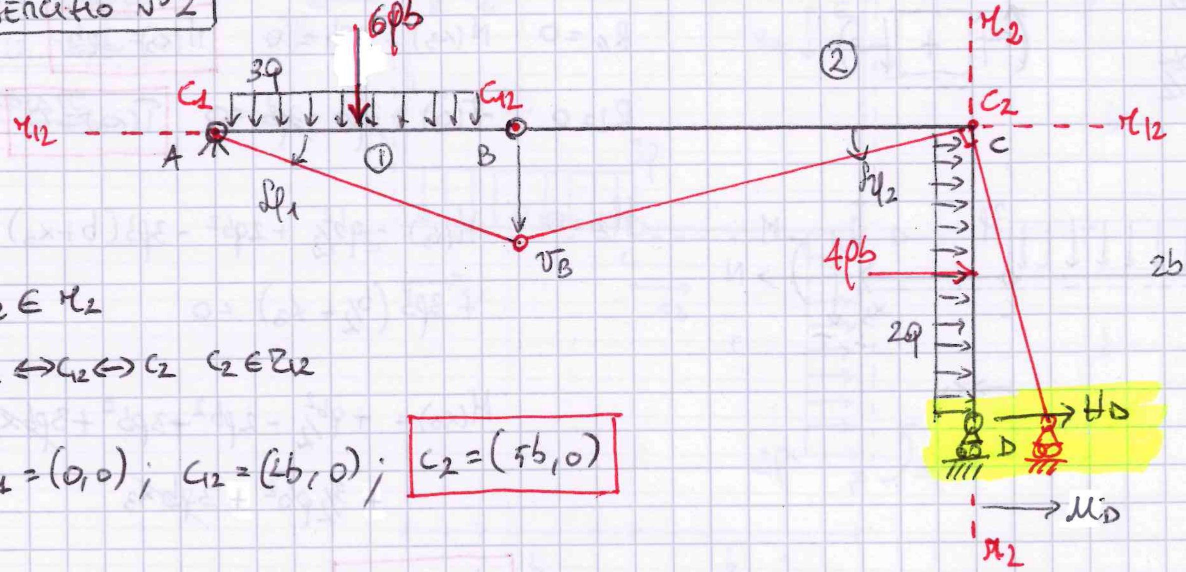
$\begin{cases} C_2 \in r_2 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{12} \end{cases}$

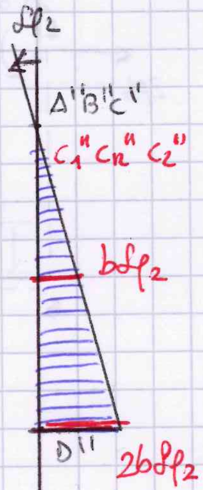


$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{123} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \quad C_2 \in r_{23} \end{cases}$

$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 \quad C_{13} \in r_{13} \\ C_{12} \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_{13} \quad C_{13} \in r_{123} \end{cases}$

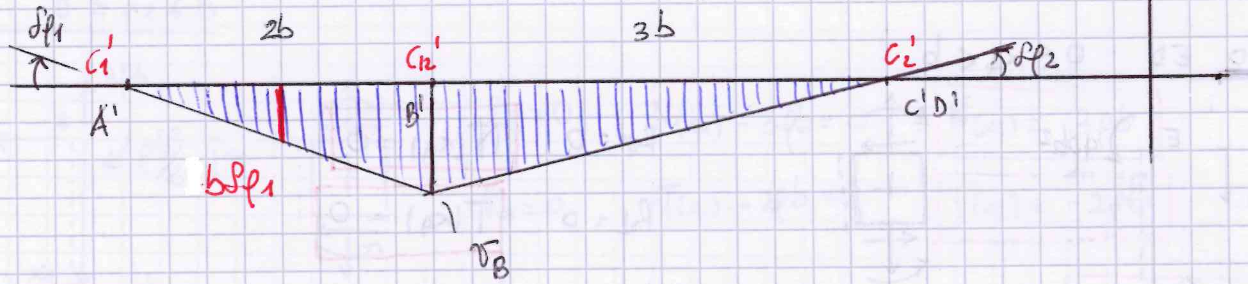
ESERCIZIO N° 2





$$\begin{cases} C_2 \in r_2 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{12} \end{cases}$$

$C_1 = (0,0)$; $C_{12} = (2b, 0)$; $\boxed{C_2 = (5b, 0)}$



$$v_B^{(1)} = -2b\,\delta\varphi_1 \qquad v_B^{(2)} = -3b\,\delta\varphi_2$$

$$v_B^{(1)} = v_B^{(2)} \Rightarrow -2b\,\delta\varphi_1 = -3b\,\delta\varphi_2 \Rightarrow \boxed{\delta\varphi_1 = \frac{3}{2}\delta\varphi_2}$$

PLV:

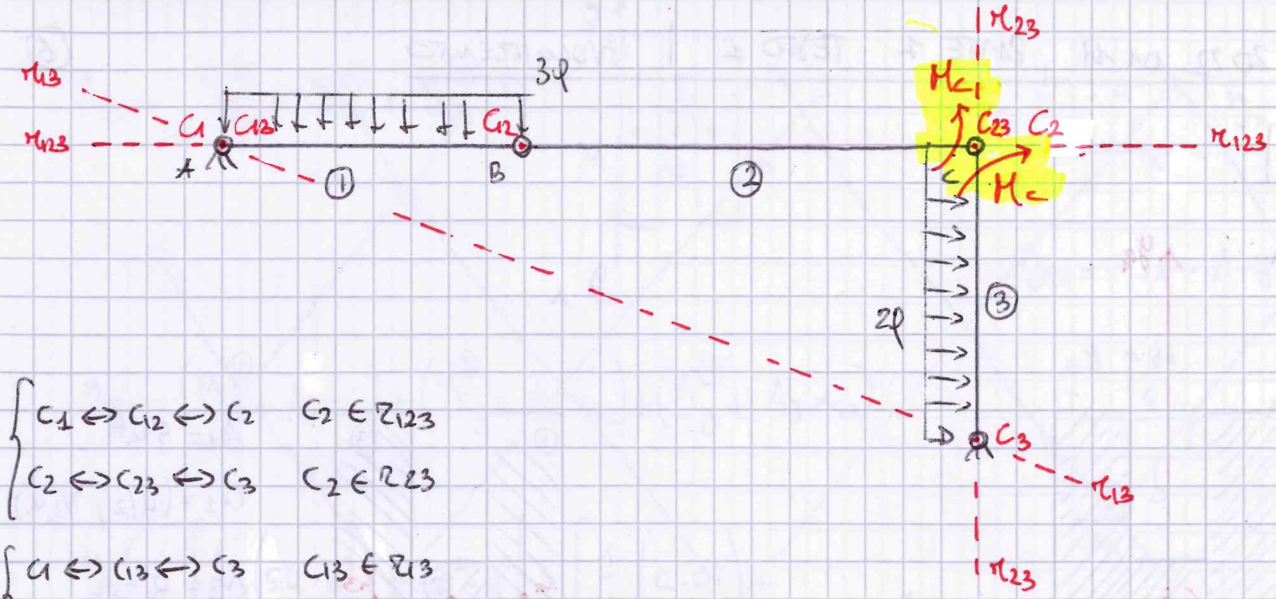
$$6qb \cdot b\delta\varphi_1 + 4qb \cdot b\delta\varphi_2 + H_D \cdot 2b\delta\varphi_2 = 0$$

$$6qb \cdot \frac{3}{2} b\delta\varphi_2 + 4qb^2\delta\varphi_2 + H_D\, 2b\delta\varphi_2 = 0$$

$$9qb^2\cancel{\delta\varphi_2} + 4qb^2\cancel{\delta\varphi_2} + H_D\, 2b\,\cancel{\delta\varphi_2} = 0 \qquad \forall\, \delta\varphi_2$$

$$9qb^2 + 4qb^2 + H_D 2b = 0 \Rightarrow H_D = -13qb^2/2\cancel{b} \qquad \boxed{H_D = -13/2\; qb}$$

$\boxed{v_C = 0}$ $\boxed{\mu_D = 2b\delta\varphi_2}$

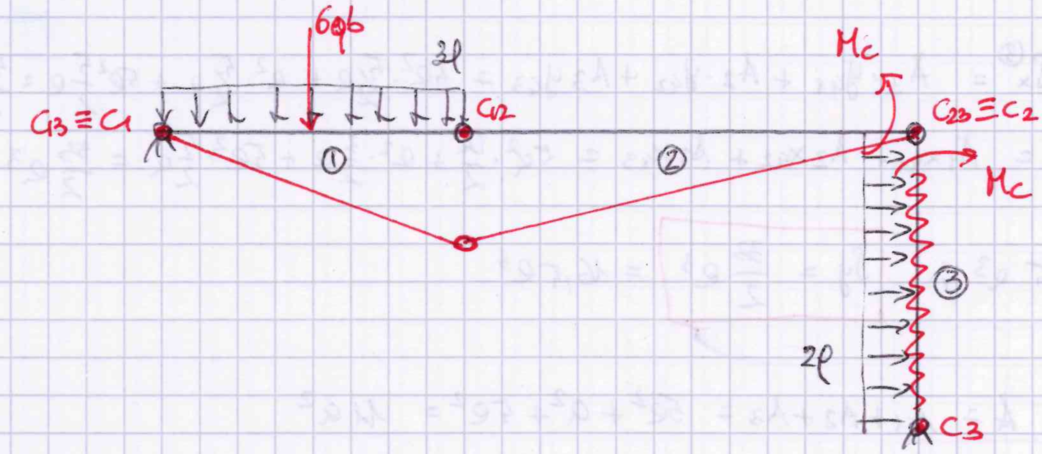


$$\begin{cases} C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 & C_2 \in r_{123} \\ C_2 \Leftrightarrow C_{23} \Leftrightarrow C_3 & C_2 \in r_{23} \end{cases}$$

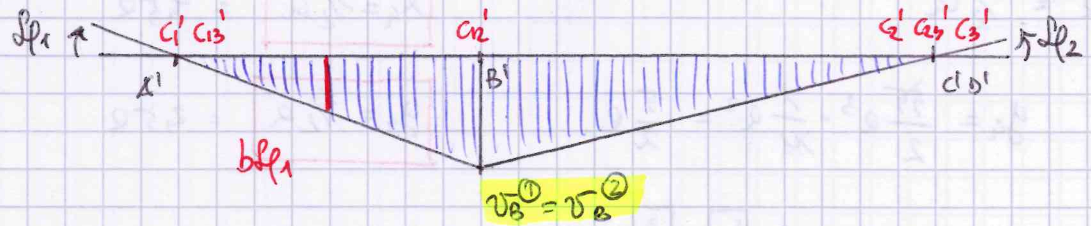
$$\begin{cases} C_1 \Leftrightarrow C_{13} \Leftrightarrow C_3 & C_{13} \in r_{13} \\ C_{12} \Leftrightarrow C_3 \Leftrightarrow C_{23} & C_{13} \in r_{123} \end{cases}$$

$C_1 = (0,0)$; $C_{12} = (2b, 0)$; $C_{23} = (5b, 0)$; $C_3 = (5b, -b)$

$\boxed{C_2 = (5b, 0)}$; $\boxed{C_{13} = (0,0)}$ N.B. $C_1 \equiv C_{13}$; $C_2 \equiv C_{23}$



IL CORPO ③ RIMANE FERMO



$v_B^{(1)} = v_B^{(2)}$

$-2b\delta\varphi_1 = -3b\delta\varphi_2$ $\quad \delta\varphi_1 = \frac{3}{2}\delta\varphi_2$

PLV $\quad 6qb \cdot b\delta\varphi_1 + M_C\delta\varphi_2 = 0 \rightarrow 6qb\,\frac{3}{2}b\,\delta\varphi_2 + M_C\delta\varphi_2 = 0$

$9qb^2\cancel{\delta\varphi_2} + M_C\cancel{\delta\varphi_2} = 0 \quad \forall\,\delta\varphi_2 \quad \boxed{M_C = -9qb^2}$

$\boxed{u_B = 0}$ $\quad \boxed{v_B = -2b\delta\varphi_1 = -3b\delta\varphi_2}$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare H_D applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

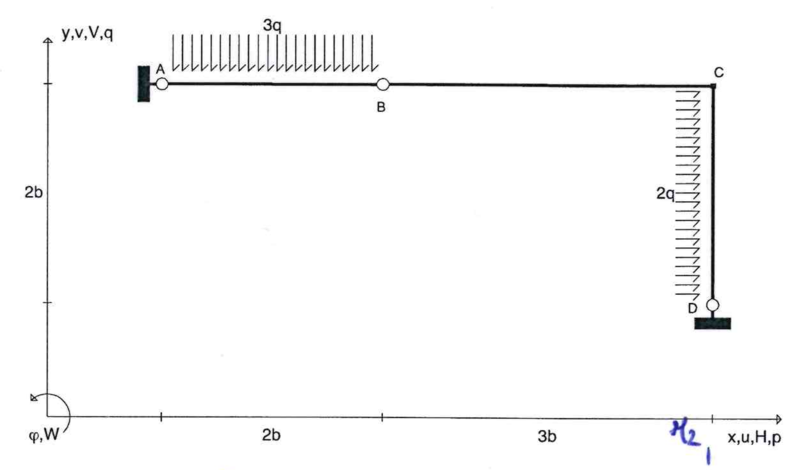
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta AB), C_1, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta BCD), C_2, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12};
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto D, u_D.

Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto C, M_C.
In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste AB, BC, CD*) si richiede di:

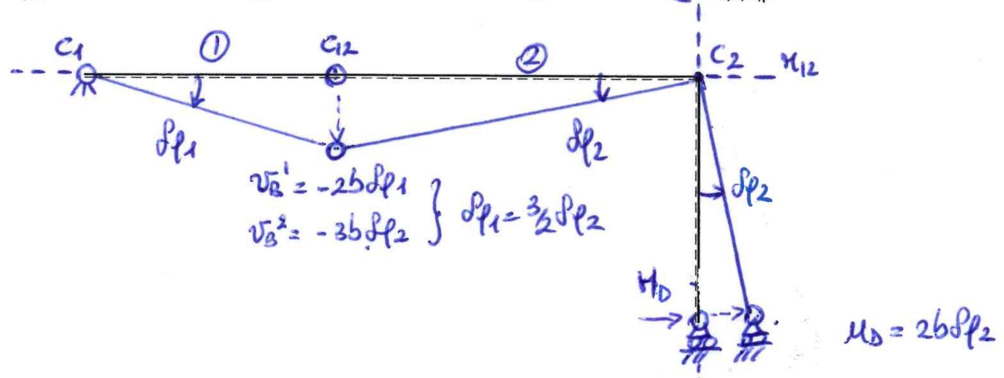
4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto B, v_B, e quella orizzontale dello spostamento del punto B, u_B.

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m), dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Universita' di Cagliari SdC_SdA 11.01.22*003

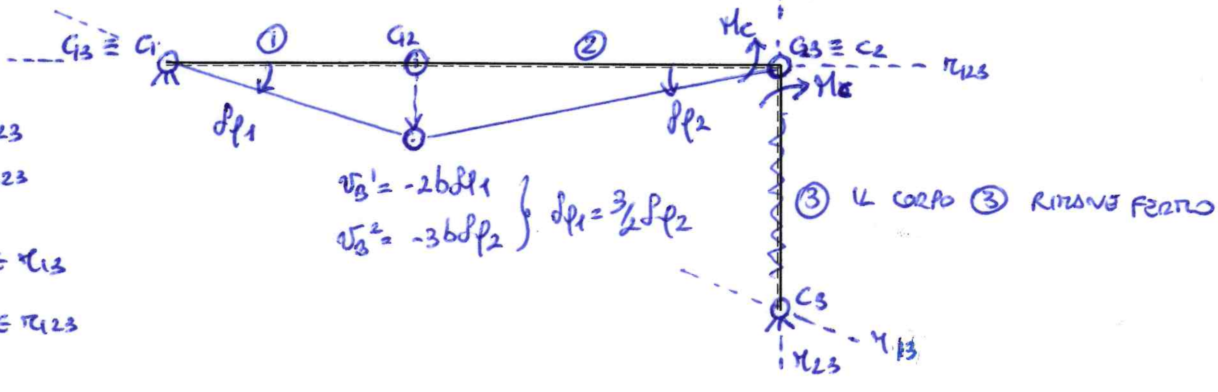


$$\begin{cases} C_2 \in r_2 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{12} \end{cases}$$



$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{123} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \quad C_2 \in r_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 \quad C_{13} \in r_{13} \\ C_{12} \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_{13} \quad C_{13} \in r_{123} \end{cases}$$



H_D (⇨) = -13/2 qb; C_1 = (0, 0); C_2 = (5b, 0); C_{12} = (2b, 0);

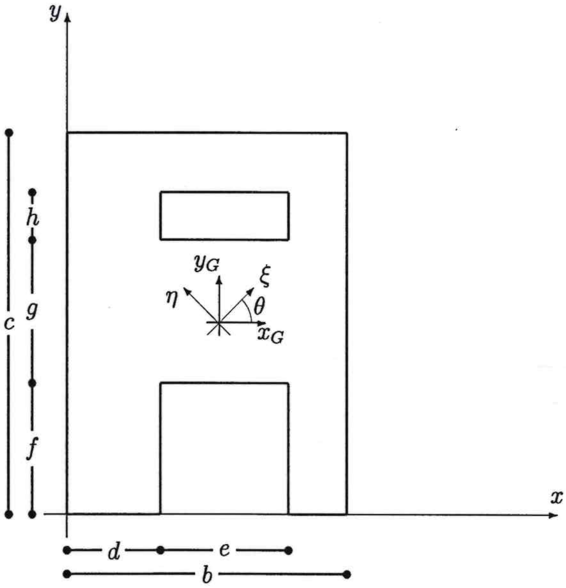
v_C = 0; u_D = 2bδφ2;

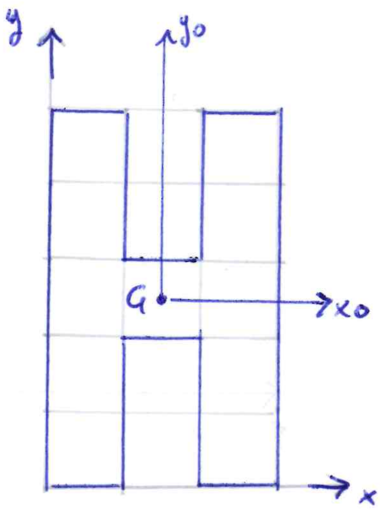
M_C (⇦□⇨) = -9 qb²; v_B = -2bδφ1; u_B = 0;

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: *Si noti che il disegno non è in scala!*) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 3a$; $c = 5a$; $d = a$; $e = a$; $f = 2a$; $g = a$; $h = 2a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{max}$ e $J_\eta = J_{min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.





S_x = 55/2 a³ = 27,5 a³; S_y = 33/2 a³ = 16,5 a³;

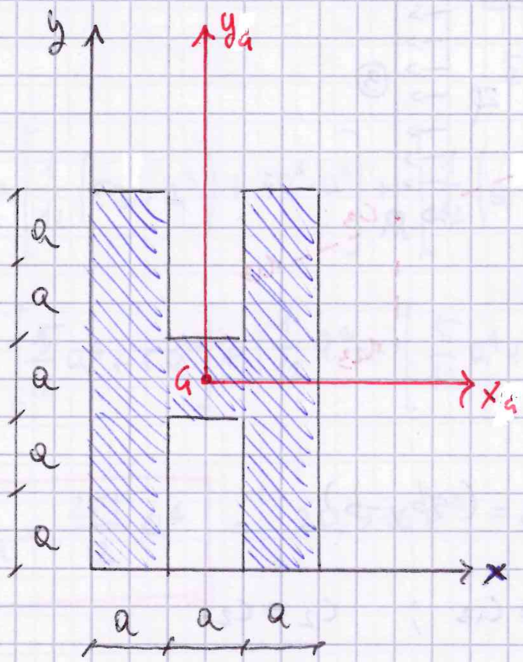
x_G = 3/2 a = 1,5 a; y_G = 5/2 a = 2,5 a;

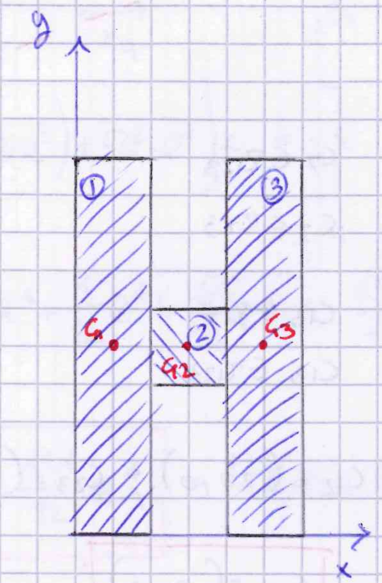
J_{xG} = 251/12 a⁴ = 20,916 a⁴; J_{yG} = 131/12 a⁴ = 10,916 a⁴;

J_{xGyG} = 0; tan 2θ = 0;

$J_\xi = J_{max}$ = J_{xG} = 251/12 a⁴; $J_\eta = J_{min}$ = J_{yG} = 131/12 a⁴;

ESERCIZIO 3





$A_1 = 5a^2$

$G_1 = (a/2 ; 5/2\, a)$

$A_2 = a^2$

$G_2 = (3/2\, a ; 5/2\, a)$

$A_3 = 5a^2$

$G_3 = (5/2\, a ; 5/2\, a)$

$$S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + S_x^{(3)} = A_1 \cdot y_{G1} + A_2 \cdot y_{G2} + A_3\, y_{G3} = 5a^2 \cdot \frac{5}{2}a + a^2 \cdot \frac{5}{2}a + 5a^2 \frac{5}{2}a = \frac{55}{2}a^3$$

$$S_y = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + S_y^{(3)} = A_1 x_{G1} + A_2 x_{G2} + A_3 x_{G3} = 5a^2 \cdot \frac{a}{2} + a^2 \cdot \frac{3}{2}a + 5a^2 \cdot \frac{5}{2}a = \frac{33}{2}a^3$$

$$\boxed{S_x = \frac{55}{2}a^3} = 27{,}5\, a^3 \; ; \quad \boxed{S_y = \frac{33}{2}a^3} = 16{,}5\, a^3$$

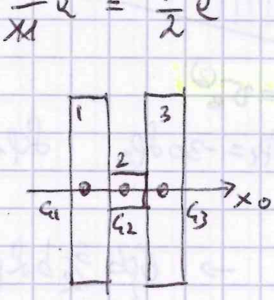
$x_G = S_y / A$ $\qquad A = A_1 + A_2 + A_3 = 5a^2 + a^2 + 5a^2 = 11\, a^2$

$$x_G = \frac{33}{2}a^3 \cdot \frac{1}{\cancel{11}}a^2 = \frac{3}{2}a \qquad \boxed{x_G = 3/2\, a} = 1{,}5\, a$$

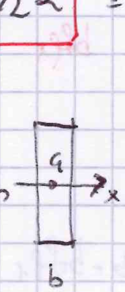
$y_G = S_x / A$

$$y_G = \frac{55}{2}a^3 \cdot \frac{1}{\cancel{11}}a^2 = \frac{5}{2}a \qquad \boxed{y_G = 5/2\, a} = 2{,}5\, a$$

$$J_{xG} = J_{xG}^{(1)} + J_{xG}^{(2)} + J_{xG}^{(3)}$$



N.B.

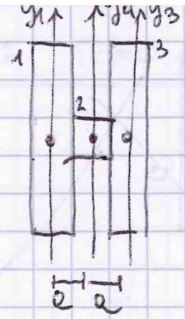


$J_{xG} = \frac{bh^3}{12}$

$$J_{xG} = \frac{1}{12}\left[a \cdot (5a)^3\right] + \frac{1}{12}\left[a \cdot a^3\right] + \frac{1}{12}\left[a \cdot (5a)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[a \cdot 125a^3\right] + \frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{12}\left[a \cdot 125a^3\right] = \frac{125}{12}a^4 + \frac{1}{12}a^4 + \frac{125}{12}a^4 = \frac{251}{12}a^4$$

$$J_{y_G} = J_{y_1}^{(1)} + J_{y_G}^{(2)} + J_{y_3}^{(3)}$$



N.B.

$$J_{y_G} = J_y + A \cdot x_G^2$$

$$J_{y_G} = \left[\frac{1}{12}\left(5a \cdot a^3\right) + 5a^2 \cdot a^2\right] + \left[\frac{1}{12}\left(a \cdot a^3\right)\right] + \left[\frac{1}{12}\left(5a \cdot a^3\right) + 5a^2 \cdot a^2\right] =$$

$$J_{y_G} = \frac{bh^3}{12}$$

$$= \left[\frac{5}{12}a^4 + 5a^4\right] + \frac{1}{12}a^4 + \left[\frac{5}{12}a^4 + 5a^4\right] = \frac{65}{12}a^4 + \frac{1}{12}a^4 + \frac{65}{12}a^4 = \frac{131}{12}a^4$$

$$\boxed{J_{x_G} = \frac{251}{12}a^4} = 20{,}916\, a^4 \qquad \boxed{J_{y_G} = \frac{131}{12}a^4} = 10{,}916\, a^4$$

$\boxed{J_{x_G y_G} = 0}$ $\quad x_G$ e y_G sono assi di simmetria

$$\tan 2\vartheta = -\frac{2J_{x_G y_G}}{J_{x_G} - J_{y_G}} = 0 \qquad \boxed{\tan 2\vartheta = 0} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\vartheta = 0} & \text{se } J_{x_G} > J_{y_G} \\ \vartheta = \pi/2 & \text{se } J_{x_G} < J_{y_G} \end{cases}$$

$$J_\xi = J_{max} \rightarrow \boxed{J_\xi = J_{x_G}}$$

$$J_\eta = J_{min} \rightarrow \boxed{J_\eta = J_{y_G}}$$

H_D (⇨) = -13/2 qb; C_1 = (0, 0); C_2 = (5b, 0); C_{12} = (2b, 0);

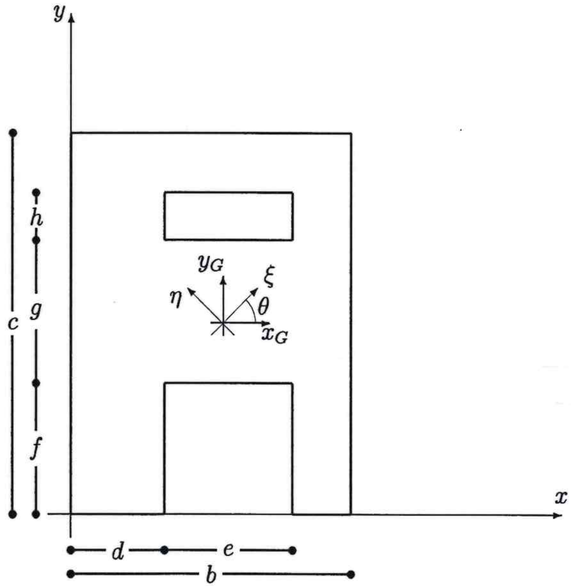
v_C = 0; u_D = 2bφ2;

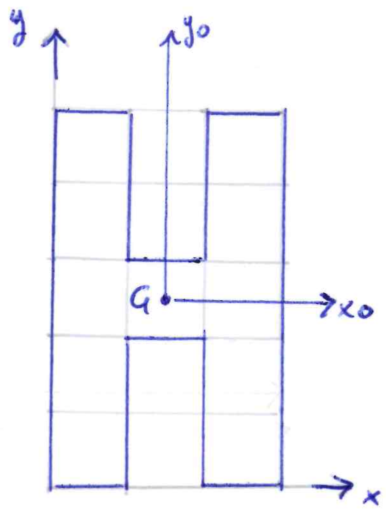
M_C = -9 qb²; v_B = -2bφ1; u_B = 0;

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: *Si noti che il disegno non è in scala!*) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 3a$; $c = 5a$; $d = a$; $e = a$; $f = 2a$; $g = a$; $h = 2a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{max}$ e $J_\eta = J_{min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.





S_x = 55/2 a³ = 27,5 a³; S_y = 33/2 a³ = 16,5 a³;

x_G = 3/2 a = 1,5 a; y_G = 5/2 a = 2,5 a;

J_{xG} = 251/12 a⁴ = 20,916 a⁴; J_{yG} = 131/12 a⁴ = 10,916 a⁴;

J_{xGyG} = 0; tan 2θ = 0;

$J_\xi = J_{max}$ = J_{xG} = 251/12 a⁴; $J_\eta = J_{min}$ = J_{yG} = 131/12 a⁴;