Università degli Studi di Cagliari

DICAAR - Facoltà di Ingegneria-Architettura

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2019-2020

Prova scritta in aula del 08.01.2020

Parte I - Testo 1

CdS **Edilizia** ☐ CdS **AdC** ☐ CdS **SdA** ☐

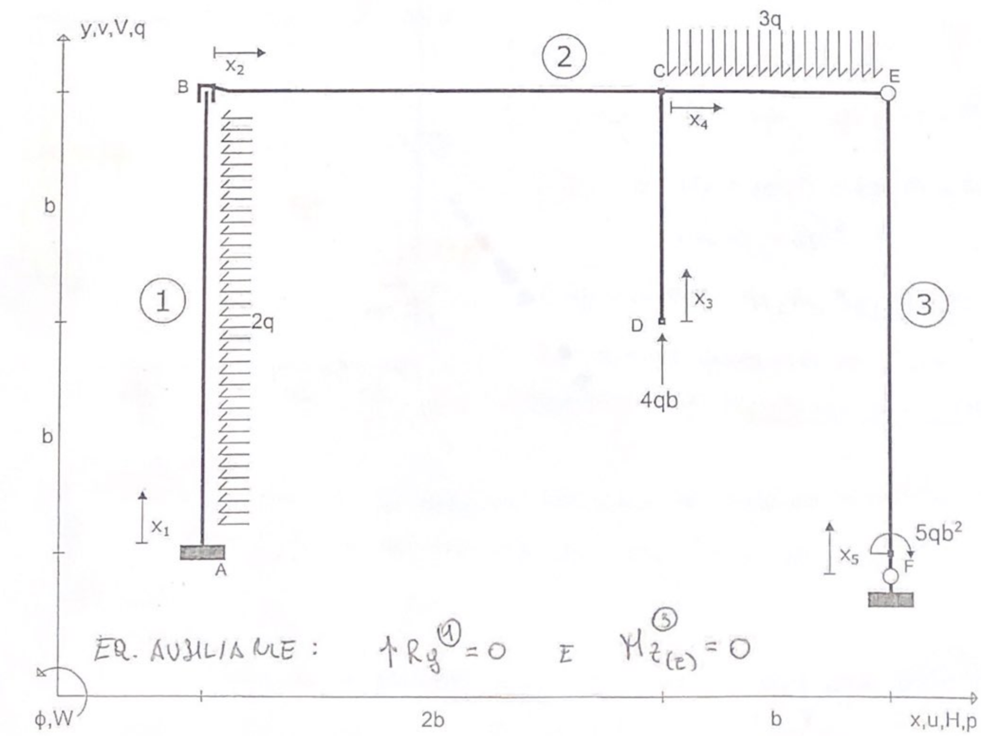
Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:......................................e-mail:........................ Matricola:.......

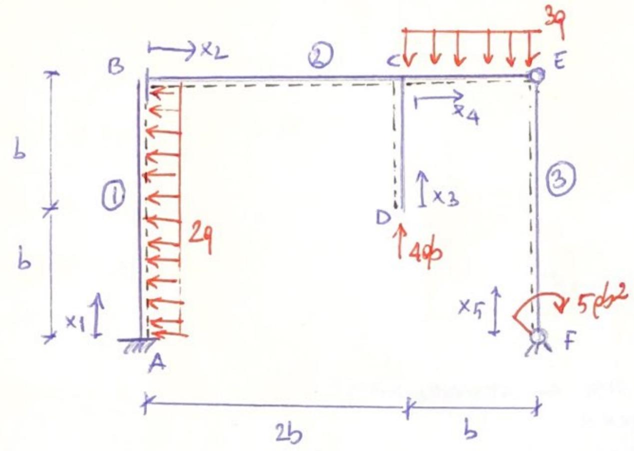
Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.
Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari SdC_SdA 08.01.20*001



• ESERCIZIO 1



• RISOLVERE LA STRUTTURA ISOSTATICA:
CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI, LE AZIONI INTERNE E TRACCIARE I DIAGRAMMI.

3 CORPI RIGIDI: ①, ② e ③

$GDL = 3 \times 3 = 9$

VINCOLI A TERRA: - INCASTRO IN A
- CERNIERA IN F

ARTICOLAZIONI INTERNE: - PATTINO ~~MANICOTTO~~ CON PIANO DI SCORRIMENTO VERTICALE IN B
- CERNIERA INTERNA IN E

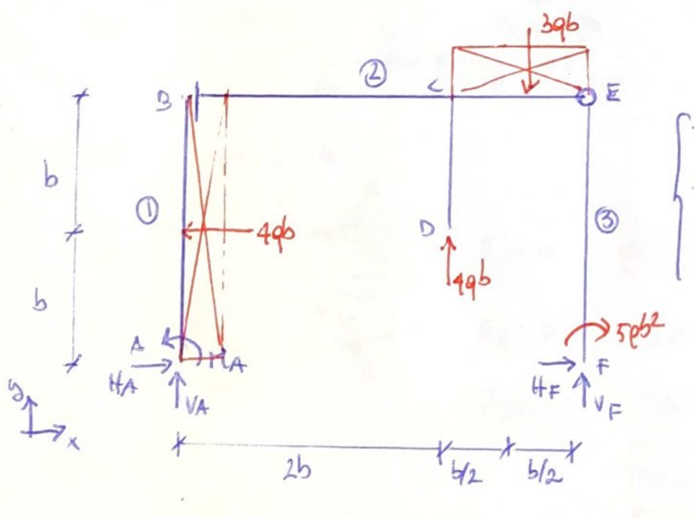
$GDV = 3 + 2 + 2 + 2 = 9$

$GDL = GDV \rightarrow$ STRUTTURA ISOSTATICA

VINCOLI BEN DISPOSTI: $\nexists$ C1 E C2, C3 E C23 NON SONO ALLINEATI

• CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO → SOSTITUISCO AI VINCOLI A TERRA LE REAZIONI, INCOGNITE, ASSUNTE COME POSITIVE. N.B. IN QUESTA FASE È LECITO SOSTITUIRE AI CARICHI DISTRIBUITI ~~LE~~ LORO RISULTANTI.



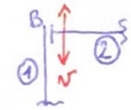
EQUAZIONI CARDINALI:

$$
\begin{cases}
\rightarrow R_x = 0 & H_A - 4pb + H_F = 0 \\
\uparrow R_y = 0 & V_A + 4pb - 3pb + V_F = 0 \\
\circlearrowright M_{z(A)} = 0 & M_A + 4pb \cdot b + 4pb \cdot 2b - 3pb \cdot \frac{5}{2}b + V_F \, 3b - 5pb^2 = 0
\end{cases}
$$

5 INCOGNITE: H_A, V_A, M_A, H_F, V_F

3 EQUAZIONI CARDINALI → SERVONO ALTRE 2 EQUAZIONI → EQUAZIONI AUSILIARIE

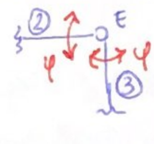
IN B C'È UN PATTINO ~~MANICOTTO~~ CON PIANO DI SCORRIMENTO VERTICALE ⇒ CONSENTE MOVIMENTI RELATIVI TRA I CORPI ① E ② IN DIREZIONE y → EQ. AUSILIARIA $R_y^{(1)} = 0$ o $R_y^{(2+3)} = 0$



$R_y^{(1)} = 0 \qquad V_A = 0$

IN E C'È UNA CERNIERA INTERNA → CONSENTE ROTAZIONI RELATIVE TRA I CORPI ② E ③

EQUAZIONE AUSILIARIA $M_{z(E)}^{(3)} = 0$ o $M_{z(E)}^{(1+2)} = 0$



$M_{z(E)}^{(3)} = 0 \qquad H_F \cdot 2b - 5pb^2 = 0$

SISTEMA LINEARE DI 5 EQUAZIONI CON 5 INCOGNITE:

(1) $H_A - 4qb + H_F = 0$ → $H_A - 4qb + \frac{5}{2}qb = 0$ → $\boxed{H_A = \frac{3}{2}qb}$

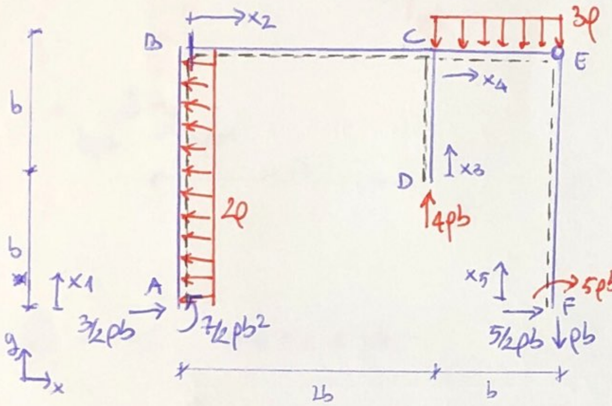
(2) $V_A + 4qb - 3qb + V_F = 0$ → $\boxed{V_F = -qb}$ → $M_A - 3qb^2 - \frac{1}{2}qb^2 = 0$ → $\boxed{M_A = \frac{7}{2}qb^2}$

(3) $M_A + V_F\, 3b - \frac{1}{2}qb^2 = 0$

(4) $V_A = 0$ → $\boxed{V_A = 0}$

(5) $H_F\, 2b - 5qb^2 = 0$ → $\boxed{H_F = \frac{5}{2}qb}$

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO EQUILIBRATO → SOSTITUIAMO I VALORI DELLE REAZIONI CON I VERSI CORRETTI. N.B. IN QUESTA FASE RIPRISTINIAMO I CARICHI DISTRIBUITI



N.B. VERIFICHIAMO LE REAZIONI, AD ESEMPIO CON L'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE RISPETTO AL PUNTO F

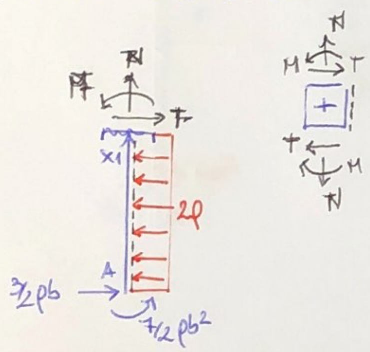
$\circlearrowleft M_{t(F)} = 0 \qquad -5qb^2 + \frac{7}{2}qb^2 + \cancel{4qb^2} - \cancel{4qb^2} + \frac{3}{2}qb^2 = 0$

$-\frac{10}{2}qb^2 + \frac{7}{2}qb^2 + \frac{3}{2}qb^2 = 0$ VERIFICATO!

POSSIAMO PASSARE AL CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

5 TRATTI: A→B (x_1); B→C (x_2); D→C (x_3); C→E (x_4); F→E (x_5)

Ⅰ A→B $\quad 0 \le x_1 \le 2b$



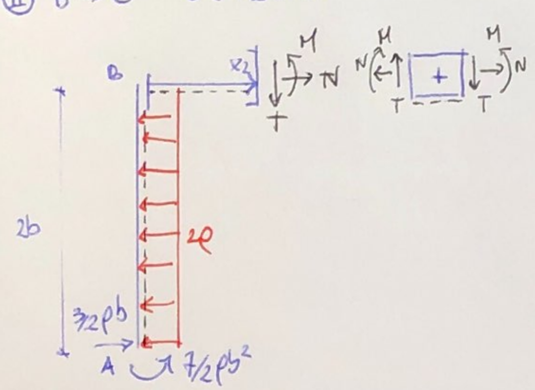
$R_{\parallel} = 0 \qquad \boxed{N(x_1) = 0}$

$R_{\perp} = 0 \qquad -\frac{3}{2}qb + 2qx_1 - T(x_1) = 0$ → $\boxed{T(x_1) = -\frac{3}{2}qb + 2qx_1}$

$M(x_1) = 0 \qquad \frac{7}{2}qb^2 + \frac{3}{2}qb\,x_1 - \cancel{2}qx_1 \cdot \frac{x_1}{\cancel{2}} + M(x_1) = 0$

$\boxed{M(x_1) = -\frac{7}{2}qb^2 - \frac{3}{2}qb\,x_1 + qx_1^2}$

Ⅱ B→C $\quad 0 \le x_2 \le 2b$



$R_{\parallel} = 0 \qquad N(x_2) + \frac{3}{2}qb - 2q\cdot 2b = 0$ ~~N(x2)~~

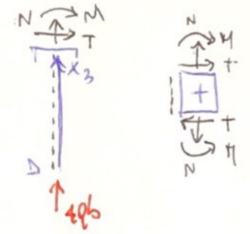
$N(x_2) = -\frac{3}{2}qb + 4qb$ → $\boxed{N(x_2) = \frac{5}{2}qb}$

$R_{\perp} = 0 \qquad \boxed{T(x_2) = 0}$

$M(x_2) = 0 \qquad M(x_2) + \frac{7}{2}qb^2 + \frac{3}{\cancel{2}}qb\cdot\cancel{2}b - 2q\cdot 2b\cdot b = 0$

$M(x_2) = -\frac{7}{2}qb^2 - 3qb^2 + 4qb^2$ → $\boxed{M(x_2) = -\frac{5}{2}qb^2}$

III $D \to C \quad 0 \leq x_3 \leq b$

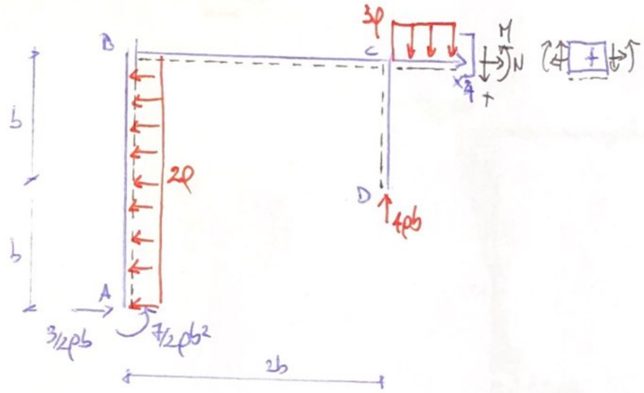


$R_{\parallel} = 0 \quad N(x_3) + 4\rho b = 0 \quad \to \quad \boxed{N(x_3) = -4\rho b}$

$R_{\perp} = 0 \quad \boxed{T(x_3) = 0}$

$M(x_3) = 0 \quad \boxed{M(x_3) = 0}$

IV $C \to E \quad 0 \leq x_4 \leq b$



$R_{\parallel} = 0 \quad N(x_4) + \frac{3}{2}\rho b - 2\rho \cdot 2b = 0 \quad \boxed{N(x_4) = \frac{5}{2}\rho b}$

$R_{\perp} = 0 \quad 4\rho b - 3\rho x_4 - T(x_4) = 0 \quad \boxed{T(x_4) = 4\rho b - 3\rho x_4}$

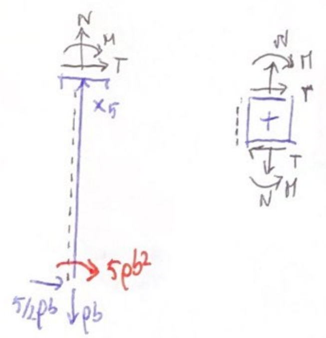
$M(x_4) = 0 \quad \frac{7}{2}\rho b^2 + \frac{3}{2}\rho b \cdot 2b - 2\rho \cdot 2b \cdot b - 4\rho b x_4 +$

$+ 3\rho x_4 \cdot \frac{x_4}{2} + M(x_4) = 0$

$M(x_4) = -\frac{7}{2}\rho b^2 - 3\rho b^2 + 4\rho b^2 + 4\rho b x_4 - \frac{3}{2}\rho x_4^2$

$\boxed{M(x_4) = -\frac{5}{2}\rho b^2 + 4\rho b x_4 - \frac{3}{2}\rho x_4^2}$

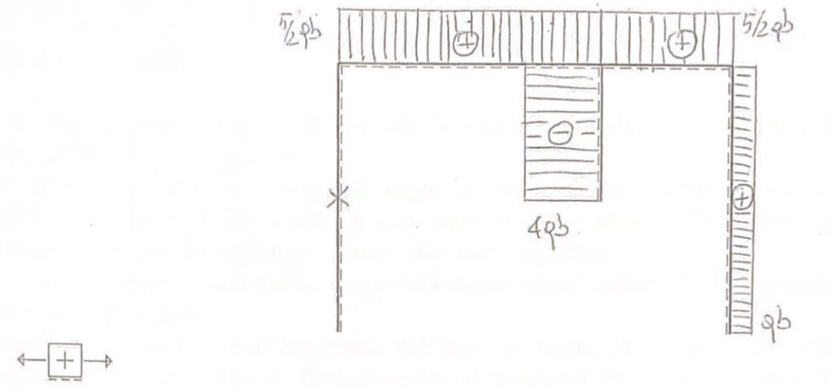
V $F \to E \quad 0 \leq x_5 \leq 2b$

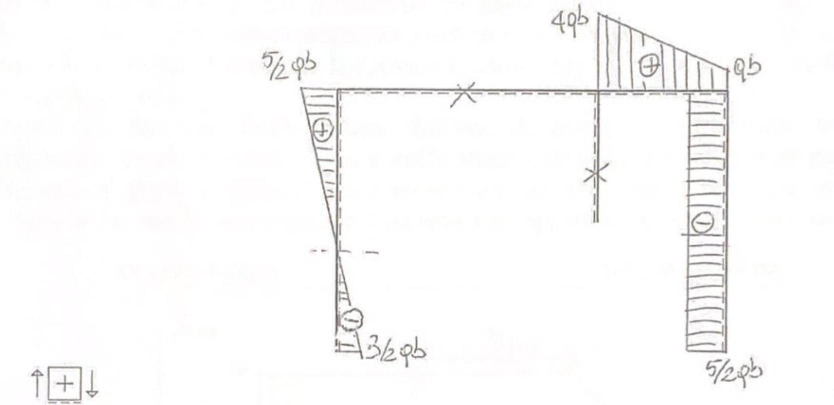


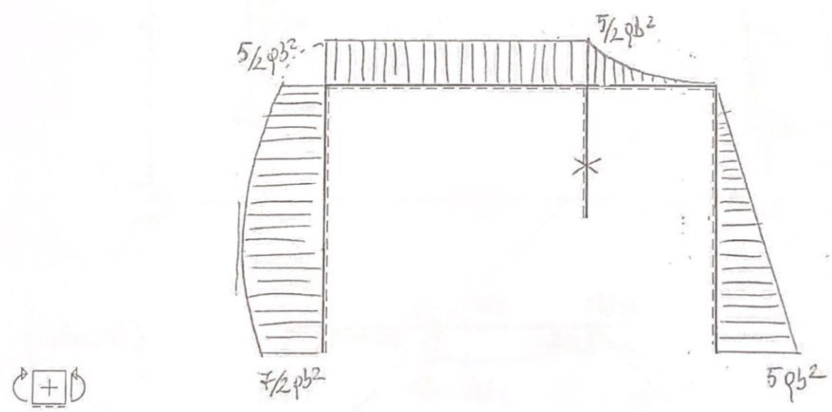
$R_{\parallel} = 0 \quad N(x_5) - \rho b = 0 \quad \boxed{N(x_5) = \rho b}$

$R_{\perp} = 0 \quad -\frac{5}{2}\rho b - T(x_5) = 0 \quad \boxed{T(x_5) = -\frac{5}{2}\rho b}$

$M(x_5) = 0 \quad 5\rho b^2 - \frac{5}{2}\rho b x_5 + M(x_5) = 0 \quad \boxed{M(x_5) = -5\rho b^2 + \frac{5}{2}\rho b x_5}$







H_A (⇨) = 3/2 qb; V_A (⇧) = 0; M_A (↻) = 7/2 qb²; H_F (⇨) = 5/2 qb; V_F (⇧) = − qb;

N_{AB} = // ; $T_{AB} = -3/2\, qb + 2q x_1$; $M_{AB} = -7/2\, qb^2 - 3/2\, qb\, x_1 + q x_1^2$;

$N_{BC} = 5/2\, qb$; T_{BC} = // ; $M_{BC} = -5/2\, qb^2$;

$N_{DC} = -4qb$; T_{DC} = // ; M_{DC} = // ;

$N_{CE} = 5/2\, qb$; $T_{CE} = 4qb - 3q x_4$; $M_{CE} = -5/2\, qb^2 + 4qb\, x_3 - \frac{3}{2} q x_3^2$;

$N_{FE} = qb$; $T_{FE} = -5/2\, qb$; $M_{FE} = -5qb^2 + 5/2\, qb\, x_5$;

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_E applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

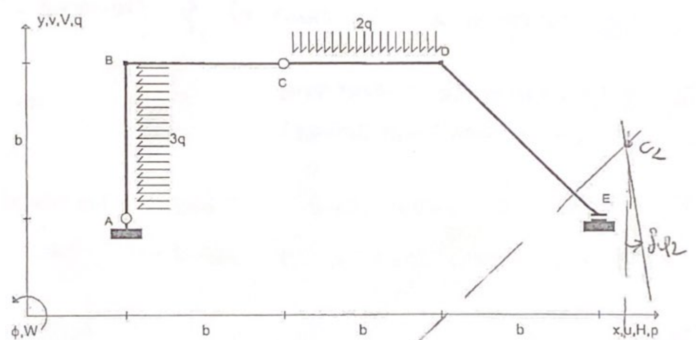
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12};
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto B, u_B, e quella orizzontale dello spostamento del punto D, u_D.

Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto D, M_D.

In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste ABC, CD, DE*) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto B, u_B.

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m), dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

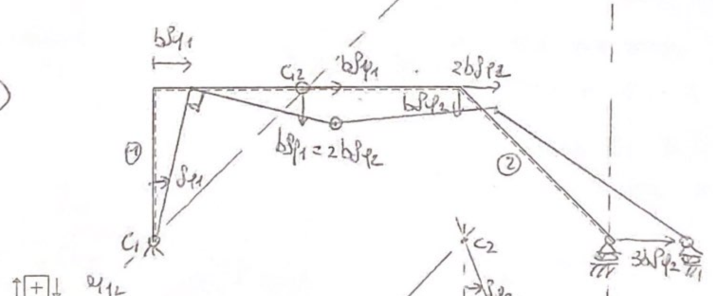


$C_2 \in r_2$

$C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{12}$ $\Big\}$ $C_2(3b, 3b)$

$b\delta\varphi_1 = 2b\delta\varphi_2$

$\boxed{\delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2}$

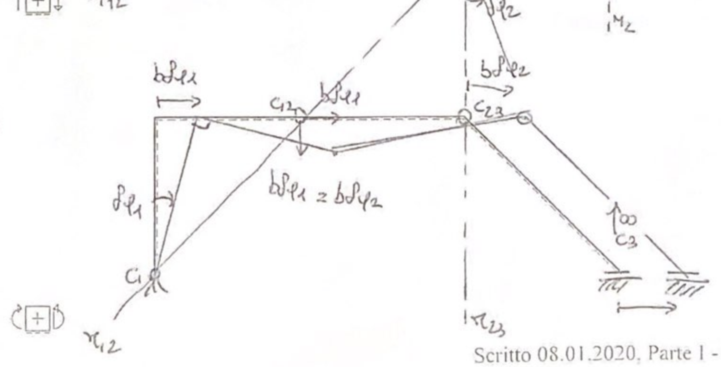


$C_2 \in r_{23}$

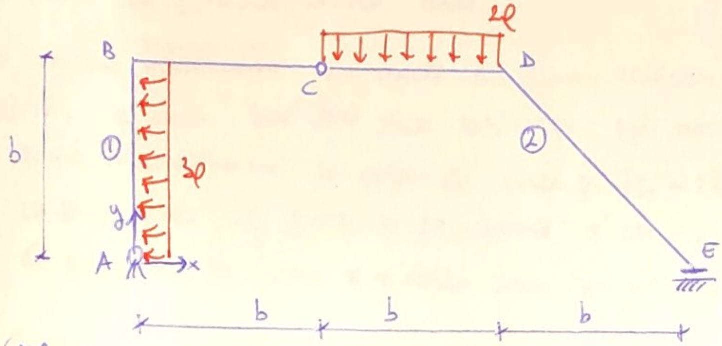
$C_1 \Leftrightarrow C_{12} \Leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{12}$ $\Big\}$ $C_2(2b, 2b)$

$b\delta\varphi_1 = b\delta\varphi_2$

$\boxed{\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2}$



• Esercizio 2



(N.B. origine in A)

Ⓐ Determinare M_E col PLV
- Determinare C_1, C_2, C_{12}
- Tracciare la spostata rigida
- Determinare u_B e u_D

Ⓑ Determinare M_D applicando il PLV
- Tracciare la spostata rigida
- Determinare v_C e u_B

Ⓐ Calcolare una reazione vincolare - M_E - di una struttura isostatica rendendola una catena cinematica - degradando il vincolo "liberando" la componente di spostamento relativa alla reazione che si vuole determinare.

In questo caso: determinare M_E → in M_E c'è un pattino con piano di scorrimento orizzontale. Il pattino in E impedisce M_E e φ, lo modifichiamo a vincolo semplice "liberando" φ (e continuando a impedire u_E)

Sostituiamo il pattino in E con un carrello (sempre con piano di scorrimento orizzontale)

Inizialmente la struttura aveva: 3×2 GDL e 2+2+2 GDV GDL = GDV

Ora la struttura ha: 3×2 GDL e 2+2+1 GDV GDL > GDV struttura labile (1 volta)

$C_1 \equiv A$ (cerniera esterna)

$C_{12} \equiv C$ (cerniera interna)

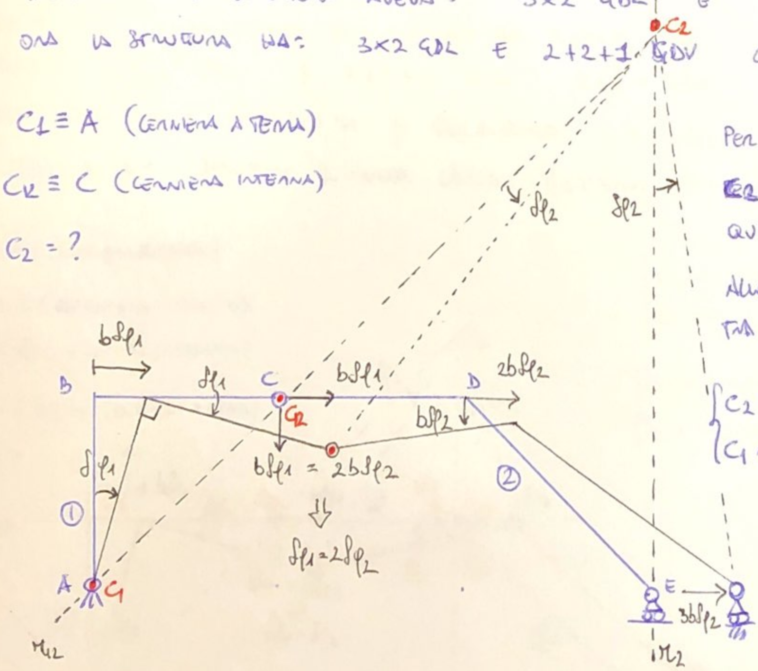
$C_2 = ?$

Per il vincolo in E $C_2 \in r_2$

C_2 deve essere allineato con C_1 e C_{12} quindi $C_2 \in r_{12}$

Allora C_2 si trova all'intersezione tra le rette r_{12} e r_2

$$\begin{cases} C_2 \in r_2 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{12} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_2(3b,3b)}$$



A=(0,0); B=(0,b); C=(b,b); D=(2b,b); E=(3b,0)

$\boxed{u_B = b\delta\varphi_1}$

$\boxed{u_D = 2b\delta\varphi_1}$

$\delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2$

N.B. $u_B = u_D$!

N.B. gli angoli in B e D rimangono uguali a spostamento avvenuto

PER DETERMINARE M_E APPLICHIAMO IL PLV

LE FORZE CHE COMPIONO LAVORO SONO:

- IL CARICO ~~CONCENTRATO~~ DISTRIBUITO SUL TRATTO AB, LA CUI RISULTANTE É $3pb$ APPLICATA A METÁ DEL TRATTO AB. IL LAVORO SARÁ PARI ALLA RISULTANTE $3pb$ MOLTIPLICATA PER LO SPOSTAMENTO DEL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE. IL CORPO ① RUOTA DI $\delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2$ INTORNO A C_1 ($\equiv A$), PERTANTO LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE É PARI A $b/2 \cdot \delta\varphi_1 = b/2 \cdot 2\delta\varphi_2 = b\delta\varphi_2$
LA DIREZIONE DEL CARICO E IL VERSO DELLO SPOSTAMENTO SONO OPPOSTI $\Rightarrow -3pb \cdot b\delta\varphi_2 = -3pb^2\delta\varphi_2$
- IL CARICO ~~CONCENTRATO~~ DISTRIBUITO SUL TRATTO CD, LA CUI RISULTANTE É $2pb$ APPLICATA A METÁ DEL TRATTO CD. LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA RISULTANTE É PARI A $3/2\, b\delta\varphi_2$, IL VERSO É LO STESSO DELLA DIREZIONE DEL CARICO, QUINDI IL LAVORO VALE $\Rightarrow 2pb \cdot 3/2\, \cancel{b}\delta\varphi_2 = +3pb^2\delta\varphi_2$
- LA REAZIONE CHE VOGLIAMO DETERMINARE, M_E, COMPIE LAVORO SULLA ROTAZIONE $\delta\varphi_2$ DEL CORPO 2

QUINDI: PLV: $-3pb^2\delta\varphi_2 + 3pb^2\delta\varphi^2 + M_E\,\delta\varphi_2 = 0 \quad \forall\, \delta\varphi_2 \quad -\cancel{3pb^2} + \cancel{3pb^2} + M_E = 0 \quad \boxed{M_E = 0}$

Ⓑ DETERMINARE IL MOMENTO M_D DEL PUNTO D RIAPPLICANDO IL PLV

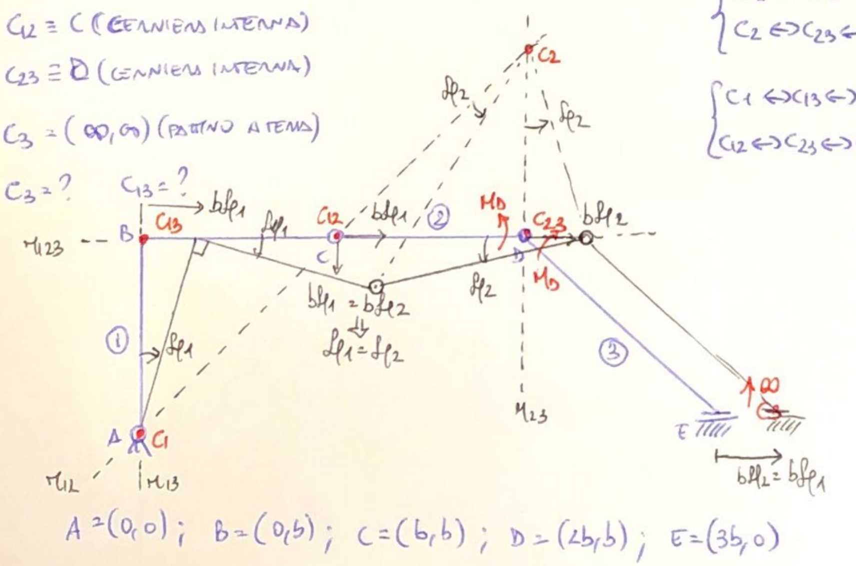
RENDIAMO LA STRUTTURA ISOSTATICA UNA CATENA CINEMATICA INTRODUCENDO UN ARTICOLAZIONE INTERNA CHE "LIBERA" LA COMPONENTE DELL'AZIONE INTERNA CHE VOGLIAMO DETERMINARE

IN QUESTO CASO, $M_D \rightarrow$ CERNIERA IN D

LA STRUTTURA INIZIALMENTE ERA COMPOSTA DA 2 CORPI RIGIDI
AVEVA 3×2 GDL E $2+2+2$ GDV $\quad$ GDL = GDV

ORA LA STRUTTURA É COMPOSTA DA 3 CORPI RIGIDI $\quad 3\times3$ GDL E $2+2+2+2$ GDV
GDL > GDV STRUTTURA 1 VOLTA LABILE (CATENA CINEMATICA)

$C_1 \equiv A$ (CERNIERA ESTERNA)
$C_{12} \equiv C$ (CERNIERA INTERNA)
$C_{23} \equiv D$ (CERNIERA INTERNA)
$C_3 = (\infty, \infty)$ (PATTINO ESTERNO)



$A = (0,0)$; $B = (0,b)$; $C = (b,b)$; $D = (2b,b)$; $E = (3b,0)$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 & C_2 \in R_{12} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 & C_2 \in R_{23} \end{cases} \Rightarrow C_2 = (2b, 2b)$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 & C_{13} \in R_{13} \\ C_{12} \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_{13} & C_{13} \in R_{123} \end{cases} \Rightarrow C_{13} = (0, b)$$

$\boxed{v_C = -b\delta\varphi_1 = -b\delta\varphi_2}$

$\boxed{u_B = b\delta\varphi_1}$ $\quad \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$

N.B. IL CORPO 3 TRASLA ORIZZONTALMENTE

Per determinare M_D applichiamo il PLV

Le forze che compiono lavoro sono:

- il carico distribuito su AB, risultante pari a $3qb$, spostamento del punto di applicazione $b/2\,\delta\varphi_1$ discorde rispetto alla direzione del carico $\Longrightarrow$ $-3qb \cdot b/2\,\delta\varphi_1 = -\frac{3}{2} qb^2 \delta\varphi_1$
- il carico distribuito su CD, risultante pari a $2qb$, spostamento del punto di applicazione $b/2\,\delta\varphi_1$ concorde rispetto alla direzione del carico $\Longrightarrow$ $2qb \cdot b/2\,\delta\varphi_1 = +qb^2 \delta\varphi_1$
- il momento M_D per la rotazione $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1$ del corpo 2

[N.B. il corpo 3 trasla, quindi M_D compie lavoro solo per la rotazione del corpo 2]

• Quindi: PLV: $-\frac{3}{2} qb^2 \delta\varphi_1 + qb^2 \delta\varphi_1 + M_D \delta\varphi_1 = 0 \quad \forall \delta\varphi_1 \qquad M_D - \frac{3}{2} qb^2 + qb^2 = 0 \qquad \boxed{M_D = qb^2/2}$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_E applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1, del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2, del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12};
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto B, u_B, e quella orizzontale dello spostamento del punto D, u_D.

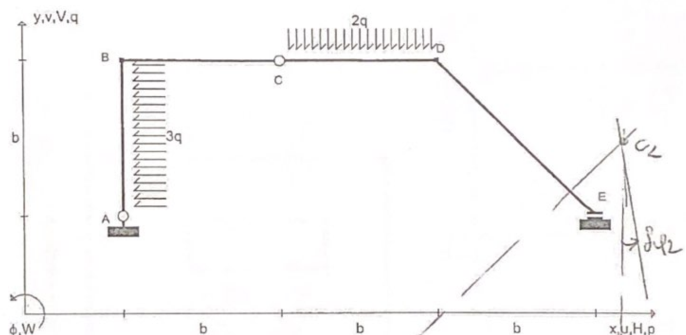
Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto D, M_D.

In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste ABC, CD, DE*) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente verticale dello spostamento virtuale del punto C, v_C, e quella orizzontale dello spostamento del punto B, u_B.

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m), dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Universita' di Cagliari — SdC_SdA 08.01.20*003

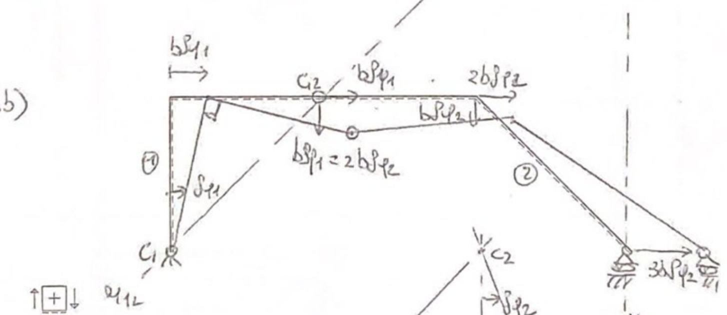


$C_2 \in r_2$

$C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{12}$ $\Big\}$ $C_2(3b, 3b)$

$b\delta\varphi_1 = 2b\delta\varphi_2$

$\boxed{\delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2}$

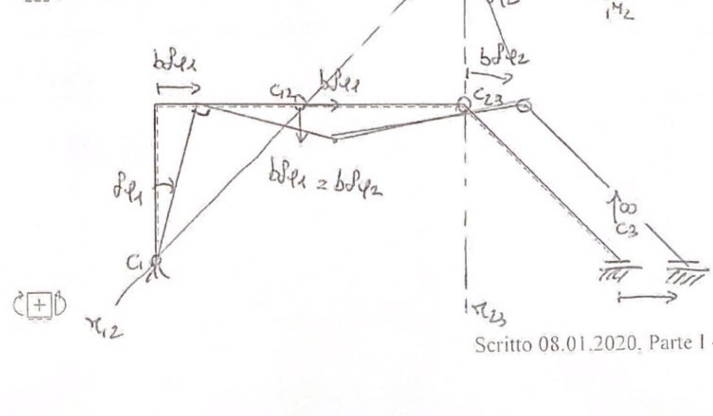


$C_2 \in r_{23}$

$C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in r_{12}$ $\Big\}$ $C_2(2b, 2b)$

$b\delta\varphi_1 = b\delta\varphi_2$

$\boxed{\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2}$



M_E (⇗) = 0; C_1 = (0, 0); C_2 = (3b, 3b); C_{12} = (b, b);

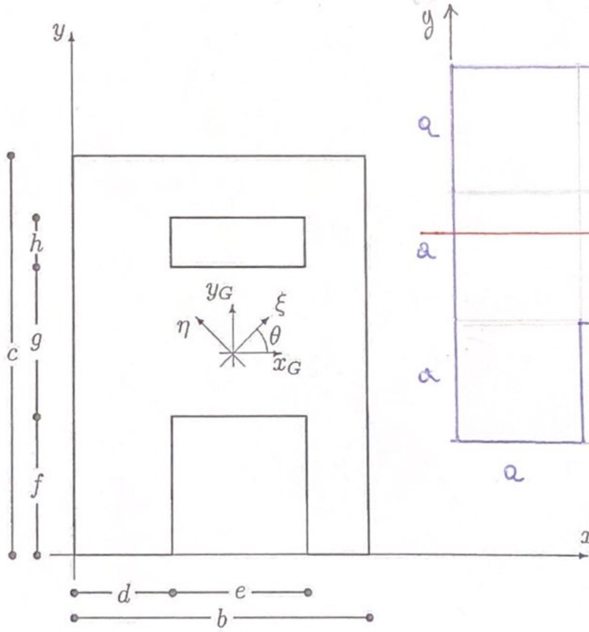
$u_B = b\delta\varphi_1$; $u_D = b\delta\varphi_1 = 2b\delta\varphi_2$;

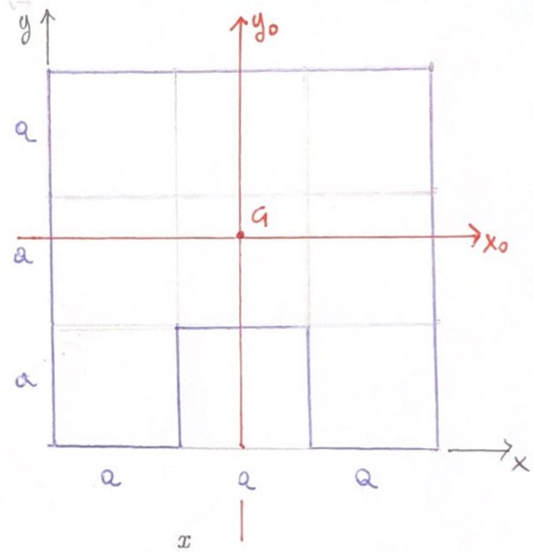
M_D (⇖□⇗) = $qb^2/2$; $v_C = b\delta\varphi_1 = b\delta\varphi_2$; $u_B = b\delta\varphi_1$;

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: _Si noti che il disegno non è in scala!_) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 3a$; $c = 3a$; $d = a$; $e = a$; $f = a$; $g = 2a$; $h = 0$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{max}$ e $J_\eta = J_{min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ, η;
- calcolare la tangente trigonometrica, tan 2θ, del _doppio_ dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ.





$S_x = 13\,a^3$; $S_y = 12\,a^3$;

$x_G = 3/2\,a = 1{,}5\,a$; $y_G = 13/8\,a = 1{,}625\,a$;

$J_{xG} = 133/24\,a^4 = 5{,}5416\,a^4$; $J_{yG} = 20/3\,a^4 = 6{,}6666\,a^4$;

$J_{xGyG} = 0$; tan 2θ = $0 \quad (\vartheta = \pi/2)$;

$J_\xi = J_{max} = 20/3\,a^4 = 6{,}6666\,a^4$; $J_\eta = J_{min} = 133/24\,a^4 = 5{,}5416\,a^4$;