Verifichiamo la disuguaglianza aritmetico-geometrica:

presi $x_1, \dots, x_N \geq 0$, $N \geq 1$, si ha

$$\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i .$$

0) Se almeno uno tra $x_1, \dots, x_N$ è nullo, la disuguaglianza sussiste perché il primo membro è nullo, e il secondo è non negativo.

1) Se $N = 1$ vale evidentemente l'uguaglianza.

2) Se $N = 2$, la tesi segue dalla disuguaglianza di Cauchy: $2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$. Una dimostrazione dettagliata si può trovare a pag. 63 in: Conti, Ferrario, Terracini, Verzini.

3) Per concludere la dimostrazione, procediamo per induzione. Supponiamo che

$$\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

per ogni $x_1, \dots, x_N > 0$ e con un certo valore di $N \geq 2$. Consideriamo $x_1, \dots, x_{N+1} > 0$. Posto $C = \sum_{i=1}^{N+1} x_i$, se risulta $x_i \neq \frac{C}{N+1}$ per almeno un valore di $i$, allora, riordinando se necessario i termini $x_1, \dots, x_{N+1}$ possiamo scrivere

$$x_{N+1} < \frac{C}{N+1} < x_N .$$

Definiamo $x'_i = x_i$ per $i = 1, \dots, N-1$, $x'_N = x_N + x_{N+1} - \frac{C}{N+1}$ e $x'_{N+1} = \frac{C}{N+1}$, cosicché la somma $\sum_{i=1}^{N+1} x'_i = \sum_{i=1}^{N+1} x_i$

resta invariata. Osserviamo che, essendo $x_N > \frac{C}{N+1}$, risulta $x'_N > x_{N+1} > 0$.

Vogliamo verificare che $x'_N x'_{N+1} > x_N x_{N+1}$.

Sostituendo $x'_N = x_N + x_{N+1} - \frac{C}{N+1}$ e $x'_{N+1} = \frac{C}{N+1}$, siamo condotti a verificare che $(x_N + x_{N+1})\frac{C}{N+1} - \left(\frac{C}{N+1}\right)^2 > x_N x_{N+1}$ il che equivale a

$$\left(\frac{C}{N+1} - x_N\right)\left(\frac{C}{N+1} - x_{N+1}\right) < 0,$$

e questo e' vero perche' i due fattori sono discordi. Ma allora $\prod_{i=1}^{N+1} x_i < \prod_{i=1}^{N+1} x'_i = \frac{C}{N+1}\prod_{i=1}^{N} x'_i$. Ora applichiamo l'ipotesi induttiva, cosicché $\prod_{i=1}^{N+1} x_i <$

$$\frac{C}{N+1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x'_i\right)^N.$$ Ma essendo

$$C = \sum_{i=1}^{N+1} x'_i = \sum_{i=1}^{N} x'_i + \frac{C}{N+1},$$

si ricava $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x'_i = \frac{C}{N+1}$, e perciò

possiamo scrivere $\prod_{i=1}^{N+1} x_i < \left(\frac{C}{N+1}\right)^{N+1}$

da cui segue che $\sqrt[N+1]{\prod_{i=1}^{N+1} x_i} < \frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1} x_i$.

Ovviamente, se risulta $x_i = \frac{C}{N+1}$ per ogni $i = 1, \dots, N+1$ allora vale l'uguaglianza, dunque il passo induttivo è dimostrato.

Per il principio di induzione matematica, la tesi vale per ogni $N \geq 2$. $\square$

N.B. L'idea di porre $x'_{N+1} = \frac{C}{N+1}$ si ritroverebbe in una lettera di H.A. Schwarz ad un non meglio precisato « Egregio Direttore », a proposito del problema isoperimetrico nella classe dei triangoli: vedere U. STAMMBACH, A letter of Hermann Amandus Schwarz on isoperimetric problems, The Mathematical Intelligencer (2012), DOI 10.1007/s00283-011-9267-7. In particolare, a pag. 47, si legge: « construct a triangle which is isoperimetric to the given one and which also has a common side with the isoperimetric equilateral triangle ».