Problema 1.

Sia X un insieme. Dimostrare, utilizzando la funzione caratteristica, che l'insieme

$$2^X = \{f : X \to \{0,1\} \colon f \text{ funzione}\}$$

è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $P(X)$.

Problema 2.

Dato un intero $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione

$$n \mapsto \begin{cases} n/p & \text{se } p \text{ divide } n \\ n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire, giustificando la risposta, per quali valori di p f è iniettiva e per quali valori è suriettiva.

Problema 3.

Determinare tutti i numeri complessi z di modulo 1 tali che

$$\left| \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} \right| = 1$$

Problema 4.

Dimostrare che le seguenti definizioni sono equivalenti:

- A è infinito se esiste un sottoinsieme proprio $B \subset A$, $B \neq A$, ed una corrispondenza biunivoca tra A e B
- A è infinito se esiste una applicazione da A in A iniettiva ma non suriettiva

Problema 5.

Sia X un insieme e si definisca su $P(X)$ la seguente relazione ($A, B \in P(X)$):

$$A\,R\,B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$$

- Dimostrare che R è una relazione d'ordine parziale.
- Argomentare se R definisce un ordine totale.

Problema 6.

Siano $a, b, n \in \mathbb{Z}$ con a ed n interi positivi e $(a, n) = 1$. Mostrare che se $x \in \mathbb{Z}$ è la soluzione della congruenza:

$$ax \equiv_n b$$

allora x è anche soluzione della congruenza:

$$rx \equiv_n -bq$$

dove $n = aq + r$ con $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 < r < a$.