Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Successioni numeriche

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2022/23

MA 27 SET 2022

MOTIVAZIONI:

APPROSSIMARE LA SOLUZIONE DI UN PROBLEMA DIFFICILE, P. ES. AREA DEL CERCHIO, $\sqrt{2}$, ECC.

SE PRENDO UN NUMERO REALE $x>0$, ESSO STESSO ED IL NUMERO $\frac{2}{x}$ HANNO PER MEDIA GEOMETRICA LA $\sqrt{2}$:

LA MEDIA GEOMETRICA DI $a,b>0$ È IL NUMERO $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

ESERCIZIO: VERIFICARE LA DISUGUAGLIANZA

QUINDI LA MEDIA GEOMETRICA TRA x E $\frac{2}{x}$ È IL NUMERO $\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = \sqrt{2}$

PER STIMARE $\sqrt{2}$ SENZA ALTRE RISORSE, PRENDIAMO LA MEDIA ARITMETICA $\frac{x+\frac{2}{x}}{2}$. SE NON SIAMO SODDISFATTI, PONIAMO $y = \frac{x+\frac{2}{x}}{2}$ E RIFACCIAMO LO STESSO CALCOLO USANDO y AL POSTO DI x, E COSÌ VIA.

NOTAZIONE: PER RAPPRESENTARE LE SUCCESSIONI NON POSSIAMO SCRIVERE $x, y, z, \dots$ MA SCRIVIAMO $x_1, x_2, x_3, \dots$

CON QUESTA NOTAZIONE POSSIAMO PRECISARE LA SUCCESSIONE DI CUI SOPRA:

PRENDO A PIACERE $x_0 > 0$ E DEFINISCO

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \quad \text{PER OGNI INTERO } n \geq 0.$$

DEFINIZIONE RICORSIVA

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{2}$ QUALUNQUE SIA $x_0>0$.

PROBLEMA: SE PARTO DA UN $x_0<0$, IL RISULTATO CONTINUA A VALERE? NON È CHE PER CASO $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\sqrt{2}$?

A PROPOSITO: COS'È LA RADICE QUADRATA? INDICHIAMO CON x IL RADICANDO. PER OGNI $x \geq 0$ ESISTE UN UNICO NUMERO REALE NON NEGATIVO IL CUI QUADRATO È x. TALE NUMERO SI INDICA CON $\sqrt{x}$ E SI CHIAMA RADICE QUADRATA DI x.

PRENDIAMO, AD ESEMPIO, $x=4$. L'UNICO NUMERO NON NEGATIVO IL CUI QUADRATO È x È 2, QUINDI $\sqrt{4} = 2$.

SE, INVECE, PRENDO $x=-1$, NON CI SONO NUMERI REALI IL CUI QUADRATO È x.

DIGRESSIONE SULLE SUCCESSIONI DOPPIAMENTE INFINITE, COME AD ESEMPIO I NUMERI INTERI RELATIVI:

$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

ESSE SI DENOTANO CON $(x_z)_{z\in\mathbb{Z}}$

E SI PUÒ STUDIARE IL $\lim_{z\to-\infty} x_z$.

NORMALMENTE, SI CHIAMA SUCCESSIONE NUMERICA UNA FUNZIONE $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ AVENTE PER DOMINIO L'INSIEME $\mathbb{N}$ DEI NUMERI NATURALI, OPPURE, PIÙ IN GENERALE, L'INSIEME $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \dots\}$, E PER CODOMINIO L'INSIEME $\mathbb{R}$.

MA COSA SIGNIFICA, ESATTAMENTE, LA FORMULA $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{2}$?

SIGNIFICA CHE LA DIFFERENZA $x_n - \sqrt{2}$ DIVENTA PICCOLA, TENDE A ZERO, CIOÈ SODDISFA LE DISUGUAGLIANZE

$$-\varepsilon < x_n - \sqrt{2} < \varepsilon$$

ε EPSILON TOLLERANZA POSITIVA

QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$, PUR DI PRENDERE n SUFFICIENTEMENTE GRANDE.

CIÒ CHE È GRATIS, LO PRENDIAMO!

ESERCIZIO: SE PARTO DA $x_0 > 0$, AVRÒ $x_n - \sqrt{2} > 0$ PER OGNI $n \geq 1$?

QUINDI RESTA DA VEDERE SE

$$-\varepsilon < 0 < x_n - \sqrt{2} < \varepsilon$$

VEDIAMO LA DEFINIZIONE DI CONVERGENZA DI UNA SUCCESSIONE (x_n) AD UN LIMITE $\ell \in \mathbb{R}$:

SI DICE CHE x_n CONVERGE AD ℓ OPPURE CHE TENDE AD ℓ E SI SCRIVE

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \quad \text{OPPURE} \quad x_n \to \ell$$

SE, COMUNQUE SI PRENDA IL NUMERO REALE $\varepsilon > 0$, LE DISUGUAGLIANZE

$$-\varepsilon < x_n - \ell < \varepsilon$$

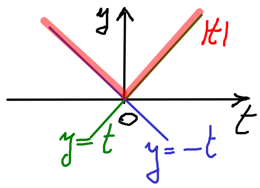
VALGONO DEFINITIVAMENTE, CIOÈ ESISISTE UN VALORE n_0, ANCHE INDICATO CON ν (NI) OPPURE n_ε, DELL'INDICE n TALE CHE ESSE VALGANO (ALMENO) PER OGNI $n \geq n_0$.

VOLENDO, SI PUÒ ANCHE SCRIVERE

$$\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon$$

OPPURE SI PUÒ USARE IL VALORE ASSOLUTO DI $t \in \mathbb{R}$, DATO DA $|t| = \max\{t, -t\}$

$$= \begin{cases} t, & \text{SE } t \geq 0 \\ -t, & \text{SE } t < 0 \end{cases}$$



IL MOTIVO È CHE LE DISUGUAGLIANZE $-\varepsilon < t < \varepsilon$ EQUIVALGONO A $|t| < \varepsilon$

E PERCIÒ SI PUÒ DIRE CHE $x_n \to \ell$ SE PER OGNI $\varepsilon > 0$ SI HA $|x_n - \ell| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE.

ESERCIZIO: $x_n \to 0$ SE E SOLO SE $|x_n| \to 0$. VERO O FALSO ?

 GI 29 SET 2022

LA STESSA DEFINIZIONE SI PUÒ RIFORMULARE USANDO GLI INTERVALLI, DETTI IMPROPRIAMENTE FORCHETTE o FORBICI.

PRESI $a, b \in \mathbb{R}$ CON $a < b$, L'INSIEME DI TUTTI GLI $x \in \mathbb{R}$ TALI CHE $a < x < b$ SI DICE INTERVALLO APERTO DI ESTREMI a E b, E SI DENOTA CON (a,b).

ELENCO COMPLETO DEI TIPI DI INTERVALLO:

LIMITATI:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ APERTO

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ CHIUSO

NOTA: $a, b \in [a,b] \setminus (a,b)$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

ILLIMITATI:

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ APERTO

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ CHIUSO

NOTA: $a \in [a, +\infty) \setminus (a, +\infty)$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ APERTO

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ CHIUSO

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

TALVOLTA SI TROVA SCRITTO $]a,b[$ ANZICHÉ (a,b), ECCETERA.

IL MOTIVO DELL'USO DEGLI INTERVALLI STA NEL FATTO CHE LA DISUGUAGLIANZA $|t| < \varepsilon$ EQUIVALE ALLA RELAZIONE $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

SI PUÒ, QUINDI, DIRE CHE $x_n \to \ell$ SE RISULTA $x_n - \ell \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, OVVERO $x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ DEFINITIVAMENTE, QUALUNQUE SIA $\varepsilon \in (0, +\infty)$.

PER INIZIARE, VERIFICHIAMO CHE $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

CIOÈ CHE $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE.

OVVIAMENTE $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n}$ PER OGNI n,

QUINDI MI CONCENTRO SU $\frac{1}{n} < \varepsilon$ E OSSERVO CHE ESSA VALE PER OGNI $n > \frac{1}{\varepsilon}$ DUNQUE VALE DEFINITIVAMENTE.

COSA VUOL DIRE CHE $x_n \not\to \ell$?

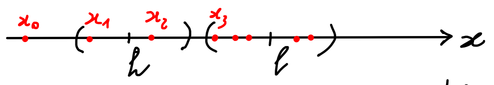
NON È VERO CHE PER OGNI ε SI ABBIA $x_n - \ell \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ DEFINITIVAMENTE:

ESISTE ALMENO UN ε ECCEZIONALE, CHE INDICO CON ε_0, TALE CHE LA RELAZIONE $x_n - \ell \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ NON VALE DEFINITIVAMENTE

E CIOÈ RISULTA $x_n - \ell \notin (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ OVVERO $x_n \notin (\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0)$ PER INFINITI TERMINI.

VE 30 SET 2022

TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE: SE $x_n \to \ell$ ALLORA $x_n \not\to h \neq \ell$. LA TESI SEGUE DALLA PROPRIETÀ DI HAUSDORFF CHE ESISTONO (a,b) E (a',b') DISGIUNTI CONTENENTI h ED ℓ.



AD ESEMPIO PRENDO $\varepsilon = \frac{|h - \ell|}{2}$

E DEFINISCO $(a,b) = (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$ E $(a', b') = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: SO PER IPOTESI CHE $x_n \to \ell$ QUINDI $x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ DEFINITIVAMENTE

MA ALLORA $x_n \notin (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$ PER INFINITI n

DUNQUE $x_n \not\to h$.

PROPRIETÀ NOTEVOLI DELLA CONVERGENZA.

1. SE UNA SUCCESSIONE $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$, POSSO SCEGLIERE UN $n_0 \in \mathbb{N}$ E RIMPIAZZARE IL TERMINE x_{n_0} CON 0, OPPURE CON y PRESO A PIACERE. LA SUCCESSIONE MODIFICATA:

$$y_n = \begin{cases} x_n, & \text{SE } n \neq n_0 \\ y, & \text{SE } n = n_0 \end{cases}$$

CONVERGE?

SÌ. INFATTI, PRESO $\varepsilon \in (0, +\infty)$, VOGLIO VEDERE CHE $y_n - \ell \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ DEFINITIVAMENTE. SO CHE $x_n - \ell \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ VALE PER OGNI $n \geq \nu$ OPPORTUNO. PRENDO ALLORA $n_\varepsilon = \max\{\nu, n_0 + 1\}$ ED HO CHE, PER OGNI $n \geq n_\varepsilon$, $y_n - \ell = x_n - \ell \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

ESEMPIO: SO CHE $\frac{1}{n} \to 0$. SCELGO $n_0 = 100$.

QUINDI LE y_n SONO:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, y, \frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \dots$$

2. DATA $x_n \to \ell$, MODIFICO k TERMINI METTENDOCI VALORI ARBITRARI $a_1, \dots, a_k$ AL POSTO DEI TERMINI $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$

ESEMPIO: DATA $x_n = \frac{1}{n}$, MODIFICO x_{100} E x_{1000} METTENDOCI 3 E 4. OTTENGO:

$$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{99}, 3, \frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \dots, \frac{1}{999}, 4, \frac{1}{1001}, \dots$$

IL LIMITE NON CAMBIA!

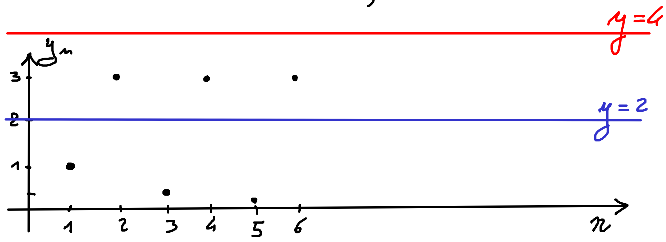
GI 29 SET 2022

COSA DEVO FARE PER INCIDERE SUL LIMITE? DATA $x_n \to \ell$, QUANTI TERMINI DEVO CAMBIARE? INFINITI TERMINI!

ESEMPIO:

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{SE } n \text{ È DISPARI}, \\ 3, & \text{SE } n \text{ È PARI}. \end{cases}$$

VERIFICHIAMO CHE $y_n \not\to 0$. NON È VERO CHE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ SI ABBIA $y_n < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE. ESISTONO VALORI DI ε ECCEZIONALI, COME $\varepsilon_0 = 2$



TALI CHE RISULTA $y_n > \varepsilon_0$ PER INFINITI TERMINI.

LU 03 OTT 2022

3. DATA $x_n \to \ell$, ELIMINO k TERMINI $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$ E OTTENGO UNA $y_n \to \ell$.

IL PIÙ DELLE VOLTE CAPITA DI PORRE $y_n = x_{n+1}$ PER OGNI n, IL CHE EQUIVALE ALL'ELIMINAZIONE DEL TERMINE x_0. PUÒ BENISSIMO AVVENIRE CHE $y_n \neq x_n$ PER OGNI n. ESEMPIO:

PRENDO $x_n = \frac{1}{n}$ PER $n \geq 1$ E DEFINISCO $y_n = x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. PASSO DA $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ A $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ED HO CHE $y_n \neq x_n$ PER OGNI n.

 VE 30 SET 2022

IL GIOCO DEL CALCIO CONTRAPPONE DUE SQUADRE DI 11 GIOCATORI. NEL CALCETTO I GIOCATORI SONO 5. NEL CALCISSIMO, OGNI SQUADRA HA UNA SUCCESSIONE DI GIOCATORI, LE CUI MAGLIE RECANO I NUMERI 1, 2, 3, ...
IL REGOLAMENTO IMPONE CHE I GIOCATORI SIANO DEFINITIVAMENTE ITALIANI.

1. QUANTI STRANIERI CI POSSONO ESSERE IN UNA SQUADRA ?

2. POSSO METTERE IN CAMPO INFINITI STRANIERI ?

3. SE METTO IN CAMPO INFINITI ITALIANI, LA SQUADRA È REGOLARE ?

LIMITI INFINITI

LA SUCCESSIONE DEI NUMERI NATURALI TENDE A $+\infty$

DEFINIZIONE: SI DICE CHE x_n TENDE A $+\infty$ E SI SCRIVE $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, OPPURE $x_n \to +\infty$ SE PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ RISULTA $x_n \geq M$ DEFINITIVAMENTE, OVVERO SE $x_n \in [M, +\infty)$ DEFINITIVAMENTE.

NOTA: È SUFFICIENTE USARE TUTTI GLI $M \in (0, +\infty)$. NON È NECESSARIO VERIFICARE PER $M \leq 0$: PERCHÉ ?

DEFINIZIONE: SI DICE CHE x_n TENDE A $-\infty$ E SI SCRIVE $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, OPPURE $x_n \to -\infty$ SE PER OGNI $m \in \mathbb{R}$ RISULTA $x_n \leq m$ DEFINITIVAMENTE, OVVERO SE $x_n \in (-\infty, m]$ DEFINITIVAMENTE.

ESEMPIO: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. STIAMO PARLANDO DELLA SUCCESSIONE I CUI TERMINI SONO

$0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots$

VERIFICA: PRENDO $M \in (0, +\infty)$ E STUDIO LA DISUGUAGLIANZA $\sqrt{n} \geq M$ PER $n \in \mathbb{N}$. ESSA È SODDISFATTA PER OGNI $n \geq M^2$, DUNQUE DEFINITIVAMENTE.

IN PARTICOLARE, PRENDO $M = 6$ E VEDO SE RISULTA $\sqrt{n} \geq 6$. SÌ, SE $n \geq 36$.

VE 30 SET 2022

SUCCESSIONI IRREGOLARI

SONO QUELLE CHE NON HANNO LIMITE, NÉ FINITO NÉ INFINITO.

ESEMPIO:
$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{SE } n \text{ È DISPARI,} \\ 3, & \text{SE } n \text{ È PARI.} \end{cases}$$

SAPPIAMO CHE $y_n \not\to 0$. POSSIAMO VERIFICARE ANALOGAMENTE CHE $y_n \not\to 3$: ESERCIZIO. RESTA DA VEDERE CHE, PER OGNI $\ell \in \mathbb{R}$ SI HA $y_n \not\to \ell$. PRENDO ℓ QUALUNQUE E $\varepsilon_0 = 1$. ESCLUDO CHE $y_n \in (\ell-1, \ell+1)$ DEFINITIVAMENTE. INFATTI, SE FOSSE

$\ell - 1 < y_n < \ell+1$ DEFINITIVAMENTE, IN CORRISPONDENZA DI n PARI AVREI

$\ell - 1 < 3 < \ell+1$ QUINDI $2 < \ell < 4$.

D'ALTRO CANTO, PER n DISPARI AVREI

$\ell - 1 < \frac{1}{n} < \ell+1$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI

$\frac{1}{n} - 1 < \ell < \frac{1}{n} + 1 \leq 1 + 1 = 2$ MA LA DISUGUAGLIANZA $\ell < 2$ CONTRASTA CON $2 < \ell$.

PER FINIRE, VERIFICHIAMO CHE $y_n \not\to +\infty$: PRESO $M \in (0,+\infty)$ RISULTA

$y_n < M$ PER OGNI n DISPARI MAGGIORE DI $\frac{1}{M}$.

ESERCIZIO: $y_n \not\to -\infty$.

DISUGUAGLIANZA ARITMETICO-GEOMETRICA

VEDI HARDY, LITTLEWOOD, PÓLYA: INEQUALITIES

VERIFICHIAMO CHE PER OGNI $a, b \in (0, +\infty)$ RISULTA $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, E L'UGUAGLIANZA SUSSISTE SE E SOLO SE $a = b$. SICCOME AMBO I MEMBRI SONO POSITIVI, ELEVANDO AL QUADRATO OTTENIAMO LA DISUGUAGLIANZA EQUIVALENTE

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

TALVOLTA DETTA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY, LA QUALE A SUA VOLTA SI PUÒ RISCRIVERE NELLA FORMA $(a-b)^2 \geq 0$, E QUESTA È VERA PER OGNI a, b E L'UGUAGLIANZA SUSSISTE SE E SOLO SE $a = b$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE. IN GENERALE, PRESI $a_1, \dots, a_n \in (0, +\infty)$ RISULTA

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

E L'UGUAGLIANZA SUSSISTE SE E SOLO SE $a_1 = \ldots = a_n$.

VE 30 SET 2022

PROPRIETÀ QUALITATIVE DELLE SUCCESSIONI

1. LIMITATEZZA INFERIORE: x_n È LIMITATA INFERIORMENTE SE ESISTE ALMENO UN MINORANTE, CIOÈ UN $m \in \mathbb{R}$ TALE CHE $x_n \geq m$ PER OGNI n.

ESEMPIO: PRENDIAMO $x_0 \in (0, +\infty)$ E

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}$$

PER OGNI $n \in \mathbb{N}$. QUINDI È INFERIORMENTE LIMITATA PERCHÉ $x_n \geq m = 0$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}$. N.B. $\sqrt{2}$ È UN MINORANTE DEFINITIVO. DIMOSTRARE CHE SE UNA SUCCESSIONE HA UN MINORANTE DEFINITIVO ALLORA È LIMITATA INFERIORMENTE.

2. LIMITATEZZA SUPERIORE: x_n È LIMITATA SUPERIORMENTE SE ESISTE ALMENO UN MAGGIORANTE, CIOÈ UN $M \in \mathbb{R}$ TALE CHE $x_n \leq M$ PER OGNI n.

ESEMPIO: PRENDO x_n = AREA DEL POLIGONO REGOLARE CON $6 \cdot 2^n$ LATI (CIOÈ 6, 12, 24, ...) INSCRITTO NEL CERCHIO DI RAGGIO 1, LA CUI AREA INDICHIAMO CON π, SI HA $x_n \leq M = \pi$ PER OGNI n QUINDI LA SUCCESSIONE È LIMITATA.

NOTA: LE SUCCESSIONI LIMITATE SIA SUPERIORMENTE CHE INFERIORMENTE POSSONO ANCHE DIRSI LIMITATE.

LU 03 OTT 2022

I DUE OSTACOLI PRINCIPALI

① LE SUCCESSIONI HANNO INFINITI TERMINI, IL SIMBOLO x_n LI PUÒ RAPPRESENTARE TUTTI.

ESEMPIO: UNA SUCCESSIONE (x_n) SI DICE INFERIORMENTE LIMITATA SE ESISTE $m \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$x_n \geq m$ (ERRORE DEL PRINCIPIANTE)

$x_n \geq m$ PER OGNI n (ESATTO!)

② IN MATEMATICA SI FANNO DEI « DISCORSI A PAROLE » CHE ESPRIMONO DEI RAGIONAMENTI RIGOROSI A SUPPORTO DI UN'AFFERMAZIONE DETTA TESI.

MOLTI ASSOCIANO LA DISCIPLINA ALLO SVOLGIMENTO DI LUNGHI CALCOLI.

LU 03 OTT 2022

RELAZIONE FRA CONVERGENZA E LIMITATEZZA

LE SUCCESSIONI $x_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$ SONO LIMITATE.

CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE AFFINCHÉ UNA SUCCESSIONE CONVERGA AD UN LIMITE FINITO È CHE SIA LIMITATA.

DIMOSTRAZIONE. PRENDO $x_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$ E SO CHE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ RISULTA

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \quad \text{DEFINITIVAMENTE.}$$

QUINDI $m = l - \varepsilon$ È UN MINORANTE DEFINITIVO E $M = l + \varepsilon$ È UN MAGGIORANTE DEFINITIVO. QUINDI LA SUCCESSIONE È LIMITATA COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

IN ALTRI TERMINI: CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ UNA SUCCESSIONE CONVERGA AD UN LIMITE FINITO È CHE SIA LIMITATA. IN ITALIANO VUOL DIRE CHE SE UNA SUCCESSIONE NON È LIMITATA, ALLORA NON CONVERGE AD UN LIMITE FINITO.

LA CONDIZIONE DELLA LIMITATEZZA NON È SUFFICIENTE AD ASSICURARE LA CONVERGENZA:

ESEMPIO:

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{SE } n \text{ È DISPARI,} \\ 3, & \text{SE } n \text{ È PARI.} \end{cases}$$

SAPPIAMO CHE NON CONVERGE (30/09) E VEDIAMO CHE $0 \leq y_n \leq 3$ PER OGNI n, QUINDI È LIMITATA.

DIGRESSIONE: SI PUÒ DEFINIRE LA CONVERGENZA DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI COMPLESSI $z_n = a_n + i\, b_n \in \mathbb{C}$ E LA CONVERGENZA DI UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $f_n(x)$. LA RELAZIONE TRA CONVERGENZA E LIMITATEZZA CONTINUA A SUSSISTERE IN TUTTI GLI SPAZI METRICI.

DIGRESSIONE: LE FUNZIONI CIRCOLARI $\operatorname{sen} x$ E $\cos x$ SONO LIMITATE IN QUANTO $\operatorname{sen} x$, $\cos x \in [-1, 1]$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, MA, NON ESSENDO SUCCESSIONI, L'ESEMPIO NON È APPROPRIATO.

ESEMPIO: LA SUCCESSIONE $x_n = (-1)^n$, I CUI TERMINI SONO $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ È LIMITATA IN QUANTO $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, MA NON AMMETTE LIMITE: LO SI VEDE RAGIONANDO COME PER LA y_n DEL 30/09.

LU 03 OTT 2022

PROPRIETÀ QUALITATIVE DELLE SUCCESSIONI

3. MONOTONIA: UNA SUCCESSIONE (x_n) SI DICE CRESCENTE IN SENSO LATO SE $x_{n+1} \geq x_n$ PER OGNI n. SE RISULTA $x_{n+1} \geq x_n$ PER OGNI $n \geq n_0$ LA SUCCESSIONE SI PUÒ DIRE CRESCENTE DEFINITIVAMENTE. CRESCENTE IN SENSO STRETTO VUOL DIRE $x_{n+1} > x_n$ PER OGNI n. SIMILMENTE SI DEFINISCONO LE SUCCESSIONI DECRESCENTI.

ESEMPI: ① LA SUCCESSIONE $x_n = n$ DEI NUMERI NATURALI È STRETTAMENTE CRESCENTE.

② $\sqrt{n}$ È CRESCENTE? VEDIAMO SE $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ PER OGNI n: SÌ, SICCOME AMBO I MEMBRI SONO NON NEGATIVI, POSSIAMO ELEVARE AL QUADRATO E OTTENERE $n+1 > n$ CHE È EVIDENTE.

③ $y_n = n+1$ I CUI TERMINI SONO: $1, 2, 3, 4, \dots$ (LADDOVE I TERMINI DI $x_n = n$ SONO $0, 1, 2, 3, \dots$) È STRETTAMENTE CRESCENTE. IN GENERALE, DATA UNA SUCCESSIONE $x_0, x_1, x_2, \dots$ LA SUCCESSIONE $y_n = x_{n+1}$, I CUI TERMINI SONO $y_0, y_1, y_2, \dots$ E CIOÈ $x_1, x_2, \dots$ SI OTTIENE DA (x_n) ELIMINANDO x_0.

④ LE SUCCESSIONI $x_n = (-1)^n$ E

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{SE } n \text{ È DISPARI,} \\ 3, & \text{SE } n \text{ È PARI} \end{cases}$$

ESERCIZIO: VEDERE y_n

NON SONO CRESCENTI: $x_{n+1} = -1 < x_n$ PER OGNI n PARI. NON SONO NEANCHE DECRESCENTI: $x_{n+1} = 1 > x_n$ PER n DISPARI.

⑤ PRESO $x_0 \in (0, +\infty)$ PONIAMO $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$ PER OGNI n. VOGLIAMO SAPERE SE $x_{n+1} \leq x_n$ PER OGNI $n \geq 1$. LA STRATEGIA PIÙ OVVIA È QUELLA DI STUDIARE LA DISUGUAGLIANZA $\dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \leq x_n$.

LA STRATEGIA DI PÓLYA:

① CAPIRE LA DOMANDA

② SCEGLIERE UNA STRADA

③ PERCORRERLA

④ VOLTARSI INDIETRO: SI È DATA RISPOSTA ALLA DOMANDA? LA RISPOSTA È PLAUSIBILE?

SVOLGENDO LA DISUGUAGLIANZA $\dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \leq x_n$ OTTENIAMO $\dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n} \leq x_n$: QUESTA È VERA PER OGNI $n \geq 1$? MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI PER $2x_n \geq 2\sqrt{2} > 0$ LA TRASFORMO IN $x_n^2 + 2 \leq 2x_n^2$, OVVERO $\boxed{x_n^2 \geq 2,}$ LA QUALE SUSSISTE PER OGNI $n \geq 1$, COME SAPPIAMO DAL 30/09.

QUINDI LA SUCCESSIONE DATA È DEFINITIVAMENTE DECRESCENTE IN SENSO LATO.

ESERCIZIO: LA SUCCESSIONE DATA È DEFINITIVAMENTE DECRESCENTE IN SENSO STRETTO?

MA 04 OTT 2022

LA PROPRIETÀ PIÙ IMPORTANTE DELL'INSIEME DEI NUMERI REALI: LA COMPLETEZZA

ABBIAMO OSSERVATO IERI CHE LA LIMITATEZZA, DA SOLA, NON ASSICURA LA CONVERGENZA.
SI PUÒ DIMOSTRARE CHE TUTTE LE SUCCESSIONI MONOTONE E LIMITATE CONVERGONO AD UN LIMITE FINITO: È UNO DEI VARI MODI PER ESPRIMERE LA COMPLETEZZA DELL'INSIEME DEI REALI.

LA COMPLETEZZA DELL'INSIEME DEI REALI CONSISTE NEL FATTO CHE:

1. TUTTE LE SUCCESSIONI MONOTONE E LIMITATE CONVERGONO AD UN LIMITE FINITO
2. TUTTE LE SUCCESSIONI MONOTONE AMMETTONO LIMITE (FINITO O INFINITO)
3. TUTTE LE SUCCESSIONI FONDAMENTALI CONVERGONO AD UN LIMITE FINITO

   DEFINIZIONE: UNA SUCCESSIONE (x_n) SI DICE FONDAMENTALE SE PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE n_0 TALE CHE PER OGNI $n, k \geq n_0$ RISULTA $|x_n - x_k| < \varepsilon$. IN TAL CASO SI PUÒ SCRIVERE $\lim_{n,k\to+\infty} |x_n - x_k| = 0$.

   È SUFFICIENTE LIMITARSI A $n < k$

4. LA PROPRIETÀ DELL'ESTREMO SUPERIORE: OGNI SOTTOINSIEME NON VUOTO $S \subset \mathbb{R}$ AMMETTE ESTREMO SUPERIORE (FINITO O INFINITO). DEFINIZIONE: S SI DICE LIMITATO SUPERIORMENTE SE ESISTE $M \in \mathbb{R}$ TALE CHE OGNI $x \in S$ SODDISFI $x \leq M$.

DEFINIZIONE DELL'ESTREMO SUPERIORE: SE UN SOTTOINSIEME NON VUOTO $S \subset \mathbb{R}$ È ILLIMITATO SUPERIORMENTE, SI PONE $\sup S = +\infty$. SE, INVECE, S AMMETTE ALMENO UN MAGGIORANTE, ALLORA (COMPLETEZZA) NE ESISTE UNO CHE È PIÙ PICCOLO DEGLI ALTRI, E LO SI INDICA CON $\sup S$.

ESEMPI. $S = (0, +\infty)$ È ILLIMITATO SUPERIORMENTE, DUNQUE $\sup S = +\infty$.

$S = (0,1)$ È LIMITATO, E IL NUMERO $b = 1$ È IL MAGGIORANTE PIÙ PICCOLO, QUINDI $\sup S = 1$.

STESSO DISCORSO PER $S = [0,1]$.

5. OGNI SEZIONE DI DEDEKIND DELL'INSIEME $\mathbb{R}$ HA UN ELEMENTO SEPARATORE: VEDERE IL CORSO DI ALGEBRA 1. SI DIMOSTRA FACILMENTE CHE L'ELEMENTO SEPARATORE È UNICO.

MA 04 OTT 2022

COSA SONO I NUMERI REALI

CI SONO ALCUNE DEFINIZIONI, EQUIVALENTI FRA LORO.

Ⓐ I NUMERI REALI SONO LE SEZIONI DI DEDEKIND DELL'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI: VEDERE IL CORSO DI ALGEBRA 1.

Ⓑ I NUMERI REALI SONO I LIMITI DELLE SUCCESSIONI FONDAMENTALI DI NUMERI RAZIONALI.

Ⓒ L'INSIEME $\mathbb{R}$ È L'UNICO CAMPO ORDINATO E COMPLETO: VEDERE IL CORSO DI ALGEBRA 1.

Ⓓ I NUMERI REALI SONO ALLINEAMENTI DECIMALI CON SEGNO: $\pm a_1 \dots a_n, c_1 c_2 c_3 \dots$

DOVE $a_k, c_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$

OSSERVAZIONI. 1) CHE SEGNO PUÒ AVERE UN NUMERO REALE? O +, O −! SI NOTI CHE $+0 = -0$. 2) QUANTE CIFRE a_k PUÒ AVERE PRIMA DELLA VIRGOLA? UN QUALUNQUE NUMERO! 3) QUANTE CIFRE c_k PUÒ AVERE DOPO LA VIRGOLA? INFINITE!

GLI ALLINEAMENTI CHE FINISCONO PER 9999... SI È SOLITI SCRIVERLI METTENDO 0 AL POSTO DEI 9 E AUMENTANDO DI 1 LA CIFRA A SINISTRA. ESEMPIO:

39,9999... SI SCRIVE 40

−0,89999... SI SCRIVE −0,9

ADOTTANDO QUEST'ULTIMA DEFINIZIONE, VERIFICHIAMO LA COMPLETEZZA NELLA FORMULAZIONE N. 1.

OSSERVIAMO, INNANZITUTTO, CHE OGNI SUCCESSIONE MONOTONA E LIMITATA DI INTERI z_n CONVERGE AD UN LIMITE FINITO. PER FISSARE LE IDEE, SUPPONIAMO CHE $z_{n+1} \leq z_n$ PER OGNI n, E CHE ESISTA UN $m \in \mathbb{Z}$ TALE CHE $m \leq z_n$ PER OGNI n.

DEFINENDO $k_n = z_n - m \geq 0$ OTTENIAMO UNA SUCCESSIONE DECRESCENTE DI NUMERI NATURALI. DICO CHE LA DIFFERENZA $k_{n+1} - k_n = z_{n+1} - z_n$ È DEFINITIVAMENTE NULLA. INFATTI

$$\underbrace{0 \leq}_{\text{LIMITATEZZA}} k_n = k_n - k_{n-1} + k_{n-1} - k_{n-2} + k_{n-2} - k_{n-3} + \dots + k_0$$

MONOTONIA: $k_i - k_{i-1} \leq 0$

QUANTI TERMINI $k_i - k_{i-1}$ QUI SOPRA POSSONO ESSERE NEGATIVI, CIOÈ ≤ -1?

INDICATO CON N IL NUMERO DEI TERMINI $k_i - k_{i-1} \leq -1$, SI HA

$0 \leq k_n \leq -N + k_0$, DUNQUE $N \leq k_0$.

ESSENDO N UN NUMERO FINITO, POSSIAMO DIRE CHE $k_i - k_{i-1} = 0$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI k_n AMMETTE LIMITE FINITO PERCHÈ È DEFINITIVAMENTE COSTANTE, E SI HA CHE $\lim_{n \to \infty} k_n = \inf \{ k_n : n \in \mathbb{N} \}$.

ESEMPI. PRENDO $z_n = 1$ PER OGNI n: QUESTA È LIMITATA INFERIORMENTE DA $m = 0$, È DECRESCENTE IN SENSO LATO E CONVERGE AD 1. UN ALTRO ESEMPIO È DATO DALLA SUCCESSIONE I CUI TERMINI SONO 6, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2...

GI 06 OTT 2022

PRENDIAMO UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI $x_{n+1} \le x_n$ LIMITATA INFERIORMENTE. DIMOSTRIAMO CHE CONVERGE A UN LIMITE FINITO.

SEGUIAMO L'IDEA DI EMILIO GAGLIARDO.

PASSO 0.

INDICHIAMO CON Z_n LA PARTE DI x_n PRIMA DELLA VIRGOLA. ALLORA $Z_{n+1} \le Z_n$ PER OGNI n, GLI INTERI Z_n SONO LIMITATI INFERIORMENTE, E PERCIÒ SI HA $Z_n = Z$ PER OGNI $n \ge n_0$

PASSO 1.

PER $n \ge n_0$ GUARDO LA PRIMA CIFRA DECIMALE DI x_n E LA INDICO CON $c_1(x_n) \in \{0, \dots, 9\}$.

LE $c_1(x_n)$ COSTITUISCONO UNA SUCCESSIONE MONOTONA E LIMITATA DI INTERI, QUINDI RISULTA $c_1(x_n) = \ell_1 \in \{0, \dots, 9\}$ PER OGNI $n \ge n_1$.

PASSO 2.

PER $n \ge n_1$ GUARDO LA SECONDA CIFRA DECIMALE $c_2(x_n) \in \{0, \dots, 9\}$

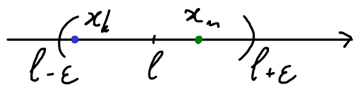
ESSA DEFINISCE UNA SUCCESSIONE MONOTONA E LIMITATA DI INTERI, QUINDI RISULTA $c_2(x_n) = \ell_2 \in \{0, \dots, 9\}$ PER OGNI $n \ge n_2$.

PROSEGUENDO IN QUESTO MODO SI DETERMINA, OLTRE ALL'INTERO Z ANCHE LA SUCCESSIONE DELLE CIFRE $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$

CONCLUSIONE: IL NUMERO REALE (ALLINEAMENTO DECIMALE) $Z, \ell_1 \ell_2 \ell_3 \dots = x$ RISULTA, PER DEFINIZIONE DI LIMITE, IL LIMITE DI x_n. INFATTI PER $n \ge n_k$ LA DIFFERENZA $x - x_n$ APPARE DOPO LA k-ESIMA CIFRA DECIMALE, QUINDI $|x - x_n| \le \frac{1}{10^k} < \varepsilon$.

APPLICAZIONE: PRESO $x_0 \in (0, +\infty)$ E POSTO $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$ PER $n \in \mathbb{N}$, SI OTTIENE UNA SUCCESSIONE MONOTONA (03/10) E LIMITATA (30/09). QUINDI AMMETTE LIMITE FINITO! RESTA DA VERIFICARE CHE $x_n \to \sqrt{2}$. PER FARLO, OSSERVIAMO CHE TUTTE LE SUCCESSIONI CONVERGENTI AD UN LIMITE FINITO SONO FONDAMENTALI.

INFATTI SE $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ALLORA PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ RISULTA $x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ PER OGNI $n \ge n_0$. SE PRENDO $k \ge n_0$ HO CHE $x_k \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ E SICCOME LA LUNGHEZZA DELL'INTERVALLO $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ È 2ε,



SI HA CHE $|x_n - x_k| < 2\varepsilon$. SICCOME ε È ARBITRARIO, LA SUCCESSIONE È FONDAMENTALE COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

CASO PARTICOLARE: PONENDO $k = n+1$ SI TROVA CHE « SE $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ALLORA LA DIFFERENZA PRIMA $x'_n = x_{n+1} - x_n$ TENDE A ZERO ».

APPLICAZIONE: PRESO $x_0 \in (0, +\infty)$ E POSTO $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$ PER $n \in \mathbb{N}$, SO CHE $x_{n+1} - x_n$ TENDE A ZERO. VERIFICHIAMO CHE $x_n \to \sqrt{2}$.

SI HA CHE $|x_{n+1} - x_n| = x_n - x_{n+1} =$

$$= x_n - \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} = x_n - \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} =$$

$$= \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = (x_n - \sqrt{2}) \frac{x_n + \sqrt{2}}{2x_n} \ge \frac{x_n - \sqrt{2}}{2}$$

OSSERVIAMO CHE $\dfrac{x_n + \sqrt{2}}{2x_n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}\, x_n} > \dfrac{1}{2}$

QUINDI $x_n - \sqrt{2} \le 2 \, |x_{n+1} - x_n| \longrightarrow 0$

GI 06 OTT 2022

NELL'ULTIMO PASSAGGIO ABBIAMO UTILIZZATO IL TEOREMA DEL CONFRONTO: DATE DUE SUCCESSIONI (a_n), (b_n) TALI CHE

$$0 \le a_n \le b_n \quad \text{DEFINITIVAMENTE,}$$

SE $b_n \to 0$ ALLORA $a_n \to 0$.

DIMOSTRAZIONE: PRESO $\varepsilon \in (0,+\infty)$ SAPPIAMO CHE $-\varepsilon < 0 \le b_n < \varepsilon$ PER $n \ge n_0$.

MA ALLORA $-\varepsilon < 0 \le a_n \le b_n < \varepsilon$

QUINDI $a_n \to 0$.

GENERALIZZAZIONE: SE $c_n \le a_n \le b_n$ DEFINITIVAMENTE, E SE $c_n, b_n \to L$ ALLORA $a_n \to L$. CERCATE LA DIMOSTRAZIONE

OSSERVAZIONE: NULLA VIETA DI PRENDERE SUCCESSIONI COSTANTI. AD ESEMPIO PRENDO $c_n = 0$ PER OGNI n. IL TEOREMA MI DICE CHE SE $0 \le a_n \le b_n$, E SE $\lim_{n\to+\infty} b_n = L = 0 = \lim_{n\to+\infty} c_n$

ALLORA $a_n \to L = 0$.

OSSERVAZIONE: SE $c_n \to +\infty$ E SE $c_n \le a_n$ DEFINITIVAMENTE, ALLORA $a_n \to +\infty$ SEGUE SENZA BISOGNO DELLA SUCCESSIONE (b_n).

INFATTI, PRESO $M \in \mathbb{R}$ SO PER IPOTESI CHE

$M \le c_n \le a_n$ DEFINITIVAMENTE.

VE 07 OTT 2022

SAPPIAMO DAL 06/10 CHE

« SE $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ALLORA LA DIFFERENZA PRIMA $x'_n = x_{n+1} - x_n$ TENDE A ZERO ».

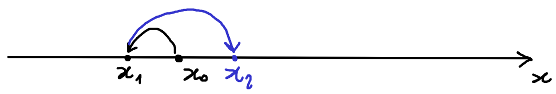
CI DOMANDIAMO SE È SUFFICIENTE CHE $x'_n \to 0$ AFFINCHÉ x_n CONVERGA AD UN LIMITE FINITO.

LA RISPOSTA È NEGATIVA PERCHÉ POSSO PRENDERE $x_n = \sqrt{n} \to +\infty$ (30/09) ED HO CHE

$x'_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$.

OSSERVAZIONE: DATA (x_n) E POSTO $x'_n = x_{n+1} - x_n$ SI PUÒ SCRIVERE $x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + x_{n-2} - \dots + (x_1 - x_0) + x_0 =$

$$= x_0 + x'_0 + x'_1 + \dots + x'_{n-1} = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} x'_k$$



DATI $x'_0, \dots, x'_{n-1}$ TROVO x_n. ESEMPIO INVENTATO: $x'_0 = -1$, $x'_1 = 2$. ESEMPIO CON $x'_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$:

$$x_n = \sqrt{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

VERIFICHIAMO CHE $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$.

SI HA CHE $0 \le \sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$

$$= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$< \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{M}$ DEFINITIVAMENTE, QUALUNQUE SIA $M > 0$, QUINDI $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

VE 07 OTT 2022

UN'ALTRO IMPORTANTE LEGAME FRA LIMITI E DISUGUAGLIANZE È DATO DAL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO: SE $x_n \to L > 0$ ALLORA $x_n > 0$ DEFINITIVAMENTE.

ESEMPIO: PRESO $x_0 \in (0,+\infty)$ E POSTO $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$ PER $n \in \mathbb{N}$, SAPPIAMO CHE $x_n \to L = \sqrt{2} > 0$. IL TEOREMA ASSERISCE CHE $x_n > 0$ DEFINITIVAMENTE, COME INFATTI SAPPIAMO.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: SE $x_n \to \ell \in (0,+\infty)$ ALLORA $x_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ DEFINITIVAMENTE.

BASTA SCEGLIERE ε IN MODO CHE $0 \notin (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$

AD ESEMPIO $\varepsilon = \ell$ COSICCHÉ $x_n \in (0, 2\ell)$ DEFINITIVAMENTE. ESERCIZIO: STUDIARE IL CASO IN CUI $x_n \to +\infty$ E COMPLETARE LA DIMOSTRAZIONE.

COROLLARIO: SE $x_n < 0$ PER INFINITI VALORI DI n, E SE x_n CONVERGE AD $\ell \in \mathbb{R}$, ALLORA $\ell \leq 0$.

PER PROSEGUIRE, È ESSENZIALE CONOSCERE:

1) LIMITI DI SUCCESSIONI IMPORTANTI

2) « ALGEBRA DEI LIMITI » CIOÈ IL LEGAME FRA IL LIMITE E LE OPERAZIONI ALGEBRICHE.

---

1) LIMITI DI SUCCESSIONI IMPORTANTI:

(n^α), $\alpha \in \mathbb{R}$ POTENZE DI n

b^n, $b \in \mathbb{R}$ PROGRESSIONE GEOMETRICA

2) « ALGEBRA DEI LIMITI »

SE $a_n \to a$ E $b_n \to b$ CON $a, b \in \mathbb{R}$, ALLORA

LA SUCCESSIONE $c_n = a_n \pm b_n$ CONVERGE AD $a \pm b$,

LA SUCCESSIONE $d_n = a_n b_n$ CONVERGE AD ab,

E, SE $b \neq 0$, RISULTA $b_n \neq 0$ DEFINITIVAMENTE

E LA SUCCESSIONE $q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ CONVERGE AD $\dfrac{a}{b}$

---

1) LIMITI DI SUCCESSIONI IMPORTANTI:

(n^α), $\alpha \in \mathbb{R}$ POTENZE DI n

GLI ESEMPI DA AVERE IN MENTE SONO n^2 $(\alpha = 2)$ E $\sqrt{n}$ $(\alpha = \frac{1}{2})$. SI VEDE CHE PER OGNI $\alpha \geq 1$ RISULTA $n^\alpha \geq n > M$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$. IL RISULTATO CONTINUA A VALERE PER n^β CON $\beta \in (0,1)$ MA LA DIMOSTRAZIONE È DIVERSA: PRESO $M \in (0,+\infty)$ RISULTA $n^\beta > M$ PER OGNI $n > M^{\frac{1}{\beta}}$, E LA CONCLUSIONE SEGUE DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE.

PER COMPLETARE LA TRATTAZIONE OSSERVIAMO CHE $n^0 = 1$ PER DEFINIZIONE, PER OGNI n, E CHE $n^{-\alpha} = \dfrac{1}{n^\alpha} < \dfrac{1}{M}$ DEFINITIVAMENTE SE $\alpha \in (0,+\infty)$. IN CONCLUSIONE:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha \in (0,+\infty) \\ 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

1) LIMITI DI SUCCESSIONI IMPORTANTI:

b^n, $b \in \mathbb{R}$ PROGRESSIONE GEOMETRICA

CASI NOTEVOLI: SE $b=2$ DIVENTA 2^n, CIOÈ $1, 2, 4, 8, 16, \ldots \longrightarrow +\infty$; SE $b=\frac{1}{2}$ SI HA $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ QUINDI $\frac{1}{2^n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots \longrightarrow 0$;

CON $b=0$ SI HA $b^n = 0$ PER OGNI n;

CON $b \in (-\infty, -1)$ L'ESEMPIO È $b=-2$: IN TAL CASO b^n ASSUME I VALORI $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$ E NON AMMETTE LIMITE ED È ILLIMITATA, MENTRE $(-1)^n$ GIÀ VISTA (03/10).

CON $b \in (-1, 0)$ L'ESEMPIO È $b = -\frac{1}{2}$, COSICCHÉ $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ ASSUME I VALORI $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \longrightarrow 0$. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$\lim_{n \to +\infty} b^n = \begin{cases} +\infty, & b \in (1, +\infty) \\ 1, & b = 1 \\ 0, & b \in (-1, 1) \end{cases}$$

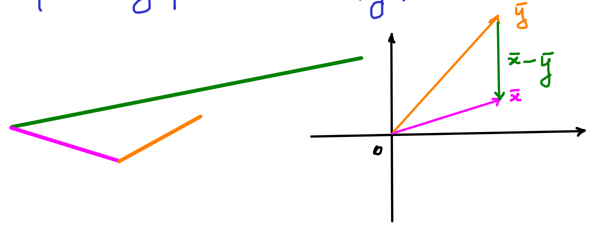
VE 07 OTT 2022

2) « ALGEBRA DEI LIMITI »

SE $a_n \to a$ E $b_n \to b$ CON $a, b \in \mathbb{R}$, ALLORA LA SUCCESSIONE $c_n = a_n \pm b_n$ CONVERGE AD $a \pm b$, LA SUCCESSIONE $d_n = a_n b_n$ CONVERGE AD ab, E, SE $b \neq 0$, RISULTA $b_n \neq 0$ DEFINITIVAMENTE E LA SUCCESSIONE $q_n = \frac{a_n}{b_n}$ CONVERGE AD $\frac{a}{b}$

IL RISULTATO SI PUÒ DIMOSTRARE USANDO LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|$$



DIMOSTRAZIONE ALGEBRICA: ELEVARE AL QUADRATO AMBO I MEMBRI (ESERCIZIO)

PER PROCEDERE, SUPPONIAMO CHE $a_n \to a \in \mathbb{R}$ E $b_n \to b \in \mathbb{R}$. SI HA CHE

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.

SIMILMENTE SI DIMOSTRA CHE $a_n - b_n \to a - b$ (ESERCIZIO). STUDIAMO ADESSO IL PRODOTTO $a_n b_n$. SI HA CHE $|a_n b_n - ab| =$

$$|a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \leq$$

$$\leq |a_n - a| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\text{È LIMITATA!}} + |a| \cdot |b_n - b| <$$

$$< \varepsilon \cdot M + |a| \cdot \varepsilon$$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI $a_n b_n \longrightarrow ab$.

 LU 10 OTT 2022

ESEMPIO TRATTO DAL TEST DEL 18/01/2022:

LA SUCCESSIONE $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} =$
$= (-1)^n\left(1 + (-1)\right) = 0$ PER OGNI n È COSTANTE E CONVERGE BANALMENTE A ZERO.

ALTRO ESEMPIO: OSSERVIAMO CHE PER OGNI $b \in \mathbb{R}$ ED OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA

$$\sum_{k=0}^{n} b^k = 1 + b + b^2 + \dots + b^n =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{b^{n+1} - 1}{b-1}, & \text{se } b \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ n+1, & \text{se } b = 1 \end{cases}$$

IL RISULTATO SI TROVA SUGLI ELEMENTI DI EUCLIDE. LO POSSIAMO VERIFICARE COME SEGUE:

$$(b-1)(1 + b + b^2 + \dots + b^n) =$$
$$= b + b^2 + b^3 + \dots + b^{n+1} +$$
$$-(1 + b + b^2 + \dots + b^n) = b^{n+1} - 1.$$

SAPENDO QUESTO, SI DEDUCE CHE $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k =$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$< \frac{3}{2} = 1,5 < 4 + \pi$$

VOGLIAMO ADESSO DIMOSTRARE CHE:

SE $a_n \to a$ E $b_n \to b$ CON $a, b \in \mathbb{R}$, ALLORA SE $b \neq 0$, RISULTA $b_n \neq 0$ DEFINITIVAMENTE E LA SUCCESSIONE $q_n = \frac{a_n}{b_n}$ CONVERGE AD $\frac{a}{b}$

IL FATTO CHE $b_n \neq 0$ DEFINITIVAMENTE SEGUE DAL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. ANZI, SUPPONENDO $b > 0$, POSSO PRENDERE $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ E DIRE CHE $b_n \in \left(b - \frac{|b|}{2}, \; b + \frac{|b|}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}, \; \frac{3}{2}b\right)$ QUINDI $b_n > \frac{b}{2} > 0$ DEFINITIVAMENTE. CIÒ PREMESSO, SI HA

$$\left|q_n - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_n b - a b_n|}{b_n b}$$

NOI SAPPIAMO CHE $a_n b \longrightarrow ab$ PER IL TEOREMA SUL PRODOTTO, E CHE $a b_n \longrightarrow ab$. MA ALLORA $a_n b - a b_n \longrightarrow 0$ PER IL TEOREMA SULLA DIFFERENZA, DUNQUE $|a_n b - a b_n| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE, E PERCIÒ

$$\left|q_n - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon}{\frac{b}{2} b} = \frac{2\varepsilon}{b^2}$$ E LA TESI

SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI ε.

 LU 10 OTT 2022

I CAPISALDI DEL CALCOLO SCOLASTICO DEI LIMITI:

1) LIMITI DI SUCCESSIONI IMPORTANTI

2) « ALGEBRA DEI LIMITI » CIOÈ IL LEGAME FRA IL LIMITE E LE OPERAZIONI ALGEBRICHE.

ESTENDIAMO L'ALGEBRA DEI LIMITI A SUCCESSIONI DIVERGENTI A $\pm\infty$.

1) SE a_n È INFERIORMENTE LIMITATA, E SE $b_n \to +\infty$, ALLORA $a_n + b_n \to +\infty$.

APPLICAZIONE: $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n + n = +\infty$;

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} + 2^n = +\infty$, ECCETERA.

DIMOSTRAZIONE: PER IPOTESI, $a_n \geq m$ PER OGNI n. INOLTRE RISULTA $b_n > M$ DEFINITIVAMENTE QUALUNQUE SIA $M \in \mathbb{R}$. QUINDI $a_n + b_n > m + M$ DEFINITIVAMENTE E LA TESI SEGUE.

OSSERVAZIONE: SE $a_n \to -\infty$ E $b_n \to +\infty$, LA SOMMA $a_n + b_n$ PUÒ:

Ⓐ DIVERGERE A $+\infty$;

Ⓑ CONVERGERE AD UN QUALUNQUE $\ell \in \mathbb{R}$;

Ⓒ DIVERGERE A $-\infty$;

Ⓓ NON AVERE LIMITE,

A SECONDA DI COME SONO FATTE (a_n) E (b_n).

INFATTI, SE $a_n = -n \to -\infty$ E $b_n = 2n \geq n \to +\infty$ SI HA $a_n + b_n = n \to +\infty$ Ⓐ;

SE $a_n = -n \to -\infty$ E $b_n = \ell + n \to +\infty$ SI HA $a_n + b_n = \ell \to \ell \in \mathbb{R}$ Ⓑ;

SE $a_n = -2n \to -\infty$ E $b_n = n \to +\infty$ SI HA $a_n + b_n \to -\infty$ Ⓒ;

INFINE, SE $a_n = -n \to -\infty$ E $b_n = (-1)^n + n$ SI TROVA $a_n + b_n = (-1)^n$ CHE NON HA LIMITE Ⓓ.

L'OSSERVAZIONE PRECEDENTE SI SUOLE ESPRIMERE BREVEMENTE DICENDO « $\infty - \infty$ È INDETERMINATO », OPPURE « $\infty - \infty$ È UNA FORMA INDETERMINATA ».

2) SE $a_n \to a \in (0, +\infty)$, E SE $b_n \to +\infty$ ALLORA $a_n b_n \to +\infty$

ESEMPI: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \cdot n = +\infty$;

PRESO $x_0 \in (0, +\infty)$ E POSTO $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$,

SAPPIAMO CHE $x_n \to \sqrt{2} \in (0, +\infty)$, QUINDI

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} \cdot n = +\infty$.

25^h TOTALI 

IL CFU (CREDITO FORMATIVO UNIVERSITARIO)

PER DIMOSTRARE L'ENUNCIATO, OSSERVIAMO CHE $a_n > \frac{a}{2}$ DEFINITIVAMENTE (PRENDO $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$ E SO CHE $a_n \in \left(a - \frac{a}{2}, a + \frac{a}{2}\right)$ DEFINITIVAMENTE). INOLTRE SI HA $b_n > M > 0$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI

$a_n b_n > \frac{a}{2} b_n > \frac{a}{2} M$ E LA TESI SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI M.

SI DIMOSTRA SIMILMENTE CHE SE $a_n \to a \in (-\infty, 0)$ E $b_n \to +\infty$ ALLORA $a_n b_n \to -\infty$.

CHE SUCCEDE SE $a = 0$? IL PRODOTTO $a_n b_n$ PUÒ:

Ⓐ DIVERGERE A $+\infty$;

Ⓑ CONVERGERE AD UN QUALUNQUE $\ell \in \mathbb{R}$;

Ⓒ DIVERGERE A $-\infty$;

Ⓓ NON AVERE LIMITE.

LU 10 OTT 2022

PRENDIAMO, AD ESEMPIO, $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ E $b_n = n^2 \longrightarrow +\infty$. ALLORA $a_n b_n = n \longrightarrow +\infty$ Ⓐ.

PRENDIAMO INVECE $a_n = \frac{1}{n}$ E $b_n = \ell n$ CON $\ell > 0$, COSICCHÉ $b_n \to +\infty$. ALLORA $a_n b_n = \ell \to \ell$. Ⓑ

PONENDO $a_n = -\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ RISULTA $a_n b_n = = -\ell \to -\ell \in (-\infty, 0)$. Ⓑ

RESTA DA TROVARE a_n, b_n TALI CHE $a_n b_n \to 0$, $a_n b_n \to -\infty$, E $a_n b_n$ NON ABBIA LIMITE.

IL FATTO CHE SI POSSANO VERIFICARE I CASI Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ SI ESPRIME DICENDO CHE « $0 \cdot \infty$ È INDETERMINATO ».

MA 11 OTT 2022

3) SE (a_n) È LIMITATA, E $|b_n| \to +\infty$, ALLORA $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.

ESEMPIO: $a_n = (-1)^n$ È LIMITATA, $b_n = n \longrightarrow +\infty$ E $\frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$. ESEMPIO: SE $b_n = (-1)^n n$ ALLORA $|b_n| = n \to +\infty$ E $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0$.

DIMOSTRAZIONE DELL'ENUNCIATO: PER IPOTESI HO CHE $|a_n| \le M_0$ PER OGNI n. PRESO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ SO CHE $|b_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \le M_0 \varepsilon$ E LA TESI SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI ε.

SI SUOLE DIRE CHE « $\frac{1}{\infty} = 0$ ».

4) SE RISULTA $a_n \ge \varepsilon_0 > 0$ DEFINITIVAMENTE, E SE $b_n > 0$ DEFINITIVAMENTE E $b_n \to 0$, ALLORA $\frac{a_n}{b_n} \ge \frac{\varepsilon_0}{b_n} \longrightarrow +\infty$

MA 11 OTT 2022

PER LA DIMOSTRAZIONE, PRENDO $M \in (0, +\infty)$ E SO PER IPOTESI CHE $0 < b_n < \frac{1}{M}$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI $\frac{a_n}{b_n} > \varepsilon_0 M$ E LA TESI SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI M.

OSSERVAZIONE: SE $a_n, b_n \to 0$ IL RAPPORTO $\frac{a_n}{b_n}$ PUÒ:

Ⓐ DIVERGERE A $+\infty$;

Ⓑ CONVERGERE AD UN QUALUNQUE $\ell \in \mathbb{R}$;

Ⓒ DIVERGERE A $-\infty$;

Ⓓ NON AVERE LIMITE,

IL CHE SI ESPRIME DICENDO CHE « $\frac{0}{0}$ È INDETERMINATO ». L'ASSERTO SI DIMOSTRA COSTRUENDO QUATTRO ESEMPI A PIACERE.

ESEMPIO Ⓐ: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, $b_n = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$, $\frac{a_n}{b_n} = n \longrightarrow +\infty$.

ESEMPIO Ⓑ: $a_n = \frac{\ell}{n} \longrightarrow 0$ COMUNQUE SI SCELGA $\ell \in \mathbb{R}$, $b_n = \frac{1}{n} \to 0$, $\frac{a_n}{b_n} = \ell \to \ell$.

ESEMPIO Ⓒ: $a_n = -\frac{1}{n} \to 0$, $b_n = \frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{a_n}{b_n} = -n \longrightarrow -\infty$.

ESEMPIO Ⓓ: $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$, $b_n = \frac{1}{n} \to 0$, $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$ NON HA LIMITE.

STESSA SITUAZIONE QUANDO $a_n, b_n \to \pm\infty$: VERIFICA PER ESERCIZIO. SI DICE CHE « $\frac{\infty}{\infty}$ È INDETERMINATO ».

 MA 11 OTT 2022

TEOREMA SUL LIMITE DI UNA POTENZA: DATE $a_n \to a \in \mathbb{R}$ E $b_n \to b \in (0,+\infty)$, SI HA CHE $b_n^{a_n} \longrightarrow b^a$.

ESEMPIO: $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 2^0 = 1$

ESEMPIO: $\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 1^{\frac{1}{2}} = 1$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. **SEMPLIFICAZIONE N. 1.** USANDO LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI, SCRIVIAMO $b_n^{a_n} = e^{a_n \log b_n}$ COSICCHÉ FISSIAMO LA BASE. RESTA DA DIMOSTRARE CHE SE $b \in (1,+\infty)$ E SE $a_n \to a \in \mathbb{R}$ ALLORA $b^{a_n} \to b^a$.

SEMPLIFICAZIONE N. 2. SCRIVIAMO

$$b^{a_n} - b^a = b^a\left(b^{a_n - a} - 1\right).$$

POSTO $\alpha_n = a_n - a$, CI RIDUCIAMO A DIMOSTRARE CHE SE $\alpha_n \to 0$ ALLORA $b^{\alpha_n} \to 1$.

SEMPLIFICAZIONE N. 3. SICCOME $\alpha_n \to 0$, POSSO FISSARE ARBITRARIAMENTE $k = 1, 2, 3, \dots$ ED HO CHE $-\frac{1}{k} < \alpha_n < \frac{1}{k}$ DEFINITIVAMENTE

QUINDI $b^{-\frac{1}{k}} < b^{\alpha_n} < b^{\frac{1}{k}}$ DEFINITIVAMENTE,

DUNQUE BASTA DIMOSTRARE CHE $b^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$.

CONCLUSIONE: PRENDO $\varepsilon \in (0,+\infty)$ E MI CHIEDO SE $1-\varepsilon < 1 < b^{\frac{1}{k}} < 1+\varepsilon$ DEFINITIVAMENTE. CIÒ EQUIVALE A $b < (1+\varepsilon)^k$, CHE VALE DEFINITIVAMENTE COME DETTO VENERDÌ 07/10.

NOTA: SE $b_n \to b$ ALLORA $\log b_n \to \log b$ (CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE LOGARITMICA)

DAL TEOREMA RESTA ESCLUSO IL CASO IN CUI $b_n \to 1$ E $a_n \to \pm\infty$: SI DICE CHE « 1^∞ È INDETERMINATO ». IDEM SE $a_n, b_n \to 0$: « 0^0 È INDETERMINATO »

AD ESEMPIO PRENDIAMO $b_n = 1+\frac{1}{n} \to 1$ E $a_n = n \to +\infty$. LA SUCCESSIONE $b_n^{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ È STRETTAMENTE CRESCENTE E LIMITATA, QUINDI (COMPLETEZZA) CONVERGE A UN LIMITE FINITO, CHE SI È SOLITI INDICARE CON e (EULERO) E SI CHIAMA NUMERO DI NEPERO (EULER'S NUMBER).

SI TROVA NUMERICAMENTE $e = 2{,}71828\dots$

CIÒ PREMESSO, PONIAMO $b_n = 1+\frac{x}{n} \to 1$, CON $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ E $a_n = n$. STUDIAMO $b_n^{a_n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n =$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x \longrightarrow e^x \in (0,+\infty).$$

CONCLUSIONE: QUALUNQUE $\ell \in (0,+\infty)$ SI OTTIENE COME $\ell = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\log \ell}{n}\right)^n$, PERCIÒ SI PUÒ DIRE CHE 1^∞ È INDETERMINATO. ESERCIZIO: PROVARE A OTTENERE $-\ell \in (-\infty, 0)$; PROVARE A OTTENERE 0; PROVARE A OTTENERE $\pm\infty$; PROVARE A RENDERE $b_n^{a_n}$ IRREGOLARE PRENDENDO $b_n \to 1$ E $a_n \to +\infty$.

MA 11 OTT 2022

STUDIAMO ADESSO IL LIMITE $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n^{a_n}$ CON $a_n, b_n \to 0$, $b_n > 0$.

SI NOTI CHE $b_n^{a_n} > 0$ PER OGNI n, QUINDI, PER IL COROLLARIO DEL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO, OGNI EVENTUALE LIMITE L SARÀ NON NEGATIVO (POSSIBILMENTE ANCHE $L = +\infty$).

FISSIAMO $c \in (0,1)$ COSICCHÉ $b_n = c^n \to 0$ (07/10). SE $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ TROVO $b_n^{a_n} = (c^n)^{\frac{1}{n}} = c \to c \in (0,1)$. SE, INVECE, PRENDO $a_n = -\frac{1}{n} \to 0$, HO $b_n^{a_n} \to \frac{1}{c} \in (1,+\infty)$.

ESERCIZIO: TROVARE $a_n, b_n \to 0$ IN MODO TALE CHE $b_n^{a_n} \to +\infty$, $\to 1$, $\to 0$, SIA IRREGOLARE.

GI 13 OTT 2022

LA CONCLUSIONE È CHE, SE $a_n, b_n \to 0$ CON $b_n > 0$ DEFINITIVAMENTE, LA POTENZA $b_n^{a_n}$ PUÒ:

- (A) DIVERGERE A $+\infty$;
- (B) CONVERGERE AD UN QUALUNQUE $\ell \in [0,\infty)$;
- (D) NON AVERE LIMITE.

CIÒ SI ESPRIME BREVEMENTE DICENDO CHE « 0^0 È INDETERMINATO » PRENDENDO A PRESTITO LA NOTAZIONE ALGEBRICA.

MA 11 OTT 2022

LA FORMA INDETERMINATA ∞^0: SE $b_n \to +\infty$ E SE $a_n \to 0$, POSSO TROVARE IL $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n^{a_n}$?

PER ESEMPIO, SE $b_n = n^n \geq n \to +\infty$ E $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, ALLORA $b_n^{a_n} = n \to +\infty$. SE, INVECE, $b_n = 2^n \to +\infty$ ALLORA $b_n^{\frac{1}{n}} = 2 \to 2$.

GI 13 OTT 2022

PIÙ IN GENERALE, PRENDO $\ell \in (1,+\infty)$ E DEFINISCO $b_n = \ell^n \to +\infty$ (07/10) SI VEDE CHE $b_n^{\frac{1}{n}} = \ell \to \ell$.

PROBLEMA: SE SCELGO $\ell \in (0,1)$, POSSO TROVARE $b_n \to +\infty$ IN MODO TALE CHE $b_n^{\frac{1}{n}} \to \ell$?

NO PERCHÉ $b_n > 1$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI $b_n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b_n} > 1$, CIOÈ $b_n^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$. DUNQUE SE $b_n^{\frac{1}{n}} \to \ell$ AVRÒ $\ell - 1 \geq 0$.

POSSO PERÒ PRENDERE $\ell \in (0,1)$ E DEFINIRE $b_n = \left(\frac{1}{\ell}\right)^n \to +\infty$ E $a_n = -\frac{1}{n} \to 0$ COSICCHÉ $b_n^{a_n} = \ell \to \ell \in (0,1)$. IN GENERALE, SE $b_n \to +\infty$ E $a_n \to 0$, LA POTENZA $b_n^{a_n}$ PUÒ

- (A) DIVERGERE A $+\infty$;
- (B) CONVERGERE AD UN QUALUNQUE $\ell \in [0,\infty)$;
- (D) NON AVERE LIMITE.

CIÒ SI ABBREVIA DICENDO CHE « ∞^0 È UNA FORMA INDETERMINATA » PRENDENDO A PRESTITO LA NOTAZIONE DELL'ALGEBRA.

GI 13 OTT 2022

UN LIMITE INTERESSANTE: SE $b_n = n \to +\infty$, E $a_n = \frac{1}{n}$, TROVO $b_n^{a_n} = n^{\frac{1}{n}} =$

$= \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$: COME LO VEDO?

DEVO VERIFICARE CHE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ SI HA

$1-\varepsilon < 1 \leq \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$ DEFINITIVAMENTE

OVVERO CHE $n < (1+\varepsilon)^n$. PER LA FORMULA DI NEWTON (CORSO DI ALGEBRA 1) SI HA $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \underbrace{\dots}_{\text{TERMINI POSITIVI}} + \varepsilon^n$. PER $n=2$ ESSA SI RIDUCE A $(1+\varepsilon)^2 =$
$= 1 + 2\varepsilon + \frac{2\cdot(2-1)}{2}\varepsilon^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$.

QUINDI $(1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$. È FACILE VERIFICARE CHE $\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n$ DEFINITIVAMENTE, INFATTI QUESTA EQUIVALE A $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$. LA TESI SEGUE: $\sqrt[n]{n} \to 1$.

L'ALGEBRA DEI LIMITI SI PUÒ ARTICOLARE IN TRE SITUAZIONI:

1) L'ESPRESSIONE DATA È LA SOMMA, DIFFERENZA, PRODOTTO, RAPPORTO, POTENZA DI $a_n \to a$ E $b_n \to b$ CON $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ SE STA AL DENOMINATORE, $b > 0$ SE STA ALLA BASE.

2) ALCUNE ESTENSIONI AI CASI IN CUI a_n, $b_n \to \pm\infty$, OPPURE b_n STA AL DENOMINATORE OPPURE ALLA BASE E TENDE A 0.

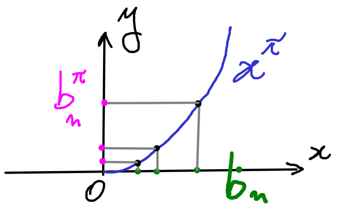
3) I RESTANTI CASI, IN CUI IL CARATTERE DELLA SUCCESSIONE DATA DIPENDE DALLE SUCCESSIONI (a_n) E (b_n) E NON SOLO DA a E b. QUESTI CASI VENGONO DETTI « FORME INDETERMINATE ».

OSSERVAZIONE: PER OGNI $b \in (0,+\infty)$ SI HA $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}} \longrightarrow b^0 = 1$ PER IL TEOREMA SUL LIMITE DI UNA POTENZA.

OSSERVAZIONE: DALL'ENUNCIATO RESTA ESCLUSO IL CASO b_n^{α} CON $\alpha > 0$ E $b_n \longrightarrow 0$. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n^{\alpha} = 0$.

SI BADI CHE $b_n^0 = 1 \longrightarrow 1$, MENTRE $b_n^{-\alpha} = \dfrac{1}{b_n^{\alpha}} \longrightarrow +\infty$ PERCHÉ $b_n > 0$.

PER VERIFICARE CHE $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n^{\alpha} = 0$ VEDIAMO SE $0 < b_n^{\alpha} < \varepsilon \in (0,+\infty)$ DEFINITIVAMENTE. SÌ PERCHÉ, ESSENDO $\alpha > 0$, ESSA EQUIVALE A $b_n < \varepsilon^{1/\alpha}$ E QUESTA È VERA DEFINITIVAMENTE PERCHÉ $b_n \to 0$. ESPRIME LA CONTINUITÀ DI $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in (0,+\infty)$, NELL'ORIGINE.



GI 13 OTT 2022

NELLO STESSO ORDINE DI IDEE, VERIFICHIAMO LA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE LOGARITMICA:
PRESA $b_n \to b \in (0,+\infty)$, SI HA CHE $\log b_n \to \log b$. DEVO VERIFICARE CHE $\log b_n - \log b = \log \dfrac{b_n}{b} \to 0$.

SICCOME $\beta_n = \dfrac{b_n}{b} \to 1$ PER IL TEOREMA SUL RAPPORTO, MI BASTA VERIFICARE CHE $\log \beta_n \to 0$ QUANDO $\beta_n \to 1$.

POSSO ANCHE INTRODURRE $\delta_n = \beta_n - 1 \to 0$ QUINDI RAPPRESENTARE $\beta_n = 1 + \delta_n$.
COSÌ FACENDO, RESTA DA VERIFICARE CHE $\log(1+\delta_n) \to 0$ QUANDO $\delta_n \to 0$.
PRENDO $\varepsilon \in (0,+\infty)$ E VEDO SE $-\varepsilon < \log(1+\delta_n) < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE.
CIÒ EQUIVALE A $e^{-\varepsilon} < 1 + \delta_n < e^{\varepsilon}$
CHE È VERO DEFINITIVAMENTE PERCHÉ $\varepsilon > 0$ QUINDI $e^{-\varepsilon} < 1 < e^{\varepsilon}$ E $\delta_n \to 0$.

OSSERVAZIONE: LA DIFFICOLTÀ TEORICA RISIEDE NELLA DEFINIZIONE (NELLA ESISTENZA) DELLE POTENZE b^{α}, CON $b > 0$ E $\alpha \in \mathbb{R}$, E DEI LOGARITMI. IN SINTESI, b^n SI DEFINISCE $= \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ VOLTE}}$. $b^{\frac{1}{k}} = x$ SI DEFINISCE DA $b = x^k$. POI $b^{\frac{n}{k}}$ SI DEFINISCE $= \left(b^{\frac{1}{k}}\right)^n$.
INFINE, $b^{\alpha} = \lim\limits_{n\to+\infty} b^{q_n}$ CON $\mathbb{Q} \ni q_n \to \alpha$.

PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI UN INSIEME S (SET = INSIEME) DI NUMERI REALI

CONCETTO INTRODOTTO DA GEORG CANTOR NELL'OTTOCENTO, IN RELAZIONE AI SUOI STUDI SULLE SERIE TRIGONOMETRICHE (SERIE DI FOURIER) CHE CONSENTONO DI ESPRIMERE UNA FUNZIONE PERIODICA $f(x)$ NELLA FORMA

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

(PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA 3).

IN SINTESI, DATO $S \subset \mathbb{R}$, CIASCUN PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$ PUÒ DIRSI PUNTO DI ACCUMULAZIONE SE OGNI INTERVALLO $(a,b) \ni x_0$, CON $a, b \in \mathbb{R}$, CONTIENE INFINITI ELEMENTI DI S.

CONDIZIONE NECESSARIA È CHE S ABBIA INFINITI ELEMENTI! ESEMPIO: L'INSIEME $S = \{0, 1\}$ NON HA PUNTI DI ACCUMULAZIONE PERCHÉ HA SOLO DUE ELEMENTI!

ESEMPIO: L'INSIEME $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ HA PUNTI DI ACCUMULAZIONE? DISTINGUIAMO LA DOMANDA IN DUE CASI:

1) UN $n \in \mathbb{N}$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $\mathbb{N}$?

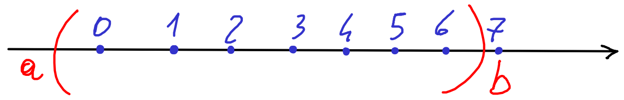
2) UN $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE?

LA RISPOSTA È COMUNQUE NEGATIVA PERCHÉ NESSUN INTERVALLO (a,b) CONTIENE INFINITI NUMERI NATURALI.

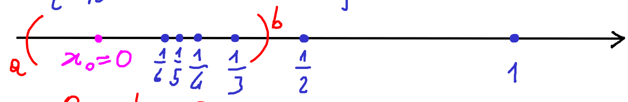
L'ESEMPIO PIÙ SEMPLICE SI OTTIENE PRENDENDO $x_0 = 0$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE DELL'INSIEME $S = \left\{ \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

VE 14 OTT 2022

$S = \mathbb{N}$



$S = \left\{ \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \dots \right\}$



$a < 0,\ b > 0$ $\qquad \frac{1}{n} < b$ DEFINITIVAMENTE, PER $n > \frac{1}{b}$

L'INSIEME DS DI TUTTI I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI UN INSIEME S SI DICE DERIVATO DI S. ESEMPI: $D\mathbb{N} = \emptyset$, $D\left\{ \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \dots \right\} = \{0\}$: INFATTI L'INSIEME $S = \left\{ \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ NON HA ALTRI PUNTI DI ACCUMULAZIONE ALL'INFUORI DI $x_0 = 0$. PRENDIAMO, AD ESEMPIO, UN $x_0 < 0$. L'INTERVALLO $(a,b) = (x_0 - 1,\ 0) \ni x_0$ È DEL TUTTO PRIVO DI ELEMENTI DI S, QUINDI LA DEFINIZIONE NON È SODDISFATTA. OSSERVAZIONE: L'INTERVALLO $(x_0 - 1,\ 1) \ni x_0$ CONTIENE INFINITI PUNTI DI S, MA CIÒ NON BASTA PER SODDISFARE LA DEFINIZIONE! PRENDIAMO ALLORA UN $x_0 > 0$. L'INTERVALLO $\left(\frac{x_0}{2},\ x_0 + 1\right) \ni x_0$

CONTIENE SOLTANTO UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI DI S IN QUANTO $\frac{1}{n} < \frac{x_0}{2}$ DEFINITIVAMENTE.

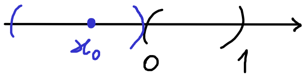
ESEMPIO BANALE: $D\mathbb{R} = \mathbb{R}$. OGNI $x_0 \in \mathbb{R}$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER L'INSIEME $\mathbb{R}$. INFATTI OGNI (a, b) CONTIENE OVVIAMENTE INFINITI ELEMENTI DI $\mathbb{R}$.

 VE 14 OTT 2022

ESEMPIO: $D\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ IN QUANTO OGNI INTERVALLO (a,b) CONTIENE INFINITI NUMERI RAZIONALI (DENSITÀ DELL'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI, CORSO DI ALGEBRA 1).

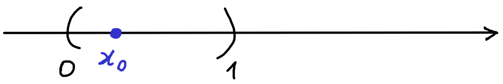
ESEMPIO: $D(0,1) = [0,1]$. VERIFICA:

PRENDO $x_0 < 0$, PRENDO $(a,b) = (x_0 - 1, 0) \ni x_0$ E VEDO CHE $(a,b) \cap S = (a,b) \cap (0,1) = \emptyset$. SIMILMENTE SI ESCLUDONO DA DS I PUNTI $x_0 > 1$.



PRENDIAMO ADESSO $x_0 \in [0,1)$ ED UN QUALUNQUE $(a,b) \ni x_0$. SI VEDE CHE

$$(a,b) \cap (0,1) \supset (x_0, \min\{b,1\}) \neq \emptyset$$



VERIFICHIAMO, INFINE, CHE $x_0 = 1$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $S = (0,1)$.

PRENDO UN QUALUNQUE $(a,b) \ni 1$ ED OSSERVO CHE $(a,b) \cap (0,1) \supset (\max\{a,0\}, 1)$

LA VERIFICA È SIMILE (ESERCIZIO!).

ABBIAMO VISTO CHE UN $S \subset \mathbb{R}$ DEVE NECESSARIAMENTE AVERE INFINITI ELEMENTI AFFINCHÉ ESISTA IN $\mathbb{R}$ ALMENO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER S.

D'ALTRO CANTO, L'INSIEME $S = \mathbb{N}$ MOSTRA CHE L'AVERE INFINITI ELEMENTI NON ASSICURA, DI PER SÉ, L'ESISTENZA DI UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE UN $S \subset \mathbb{R}$ HA INFINITI ELEMENTI, ED È LIMITATO (CIOÈ $S \subset [m, M]$, $m, M \in \mathbb{R}$) ALLORA ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ CHE È PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI S (TEOREMA DI BOLZANO–WEIERSTRASS).

ESEMPI: $S = \left\{ \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \dots \right\} \subset [0,1]$ SODDISFA LE IPOTESI, COME PURE $S = (0,1)$.

$S = \mathbb{R}$ E $S = \mathbb{Q}$ NON SONO LIMITATI.

DIMOSTRAZIONE. AVENDO S INFINITI ELEMENTI, ESISTE UNA SUCCESSIONE DI $x_n \in S$ A DUE A DUE DISTINTI: $x_n \neq x_k$ SE $n \neq k$.

ESSA HA UNA SOTTOSUCCESSIONE MONOTONA (CRESCENTE O DECRESCENTE DIPENDE DA (x_n)).

PER VEDERLO, DICO CHE UN x_n È UN PICCO SE $x_n \geq x_k$ PER OGNI $k > n$. ESEMPIO: SE $x_n = \frac{1}{n}$, TUTTI I TERMINI SONO PICCHI. SE, INVECE, $x_n = n$, NESSUN TERMINE È UN PICCO.

QUANTI SONO I PICCHI? DISTINGUIAMO DUE CASI:

1) CI SONO INFINITI PICCHI NELLA SUCCESSIONE (x_n). LI INDICO CON $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$

IN GENERALE LA SUCCESSIONE $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ È DECRESCENTE PERCHÉ $x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}}$.

2) I PICCHI SONO IN NUMERO FINITO, EVENTUALMENTE NON CE NE SONO. DUNQUE NESSUN x_n È UN PICCO PER $n \geq n_0$ OPPORTUNO. PRENDO ALLORA x_{n_0}, CHE NON È UN PICCO, QUINDI

ESISTE $n_1 > n_0$ TALE CHE $x_{n_1} > x_{n_0}$.

VE 14 OTT 2022

ANCHE x_{n_1} NON È UN PICCO, QUINDI ESISTE $n_2 > n_1$ TALE CHE $x_{n_2} > x_{n_1}$, ECCETERA, DUNQUE ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE (x_{n_k}) STRETTAMENTE CRESCENTE.

MA ALLORA, ESSENDO $x_{n_k} \in [m, M]$, PER LA COMPLETEZZA DELL'INSIEME $\mathbb{R}$ SI HA $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \ell \in \mathbb{R}$.

PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE, SI HA CHE $x_{n_k} \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI ℓ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE.

LU 17 OTT 2022

OSSERVAZIONE: I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI UN INSIEME $S \subset \mathbb{R}$ SI POSSONO EQUIVALENTEMENTE DEFINIRE COME SEGUE: UN PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$ SI DICE PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER L'INSIEME $S \subset \mathbb{R}$ SE AD OGNI INTORNO BUCATO $(a,b) \setminus \{x_0\}$ DEL PUNTO $x_0 \in (a,b)$ APPARTIENE ALMENO UN PUNTO DI S.

SI VEDE FACILMENTE CHE SE UN x_0 SODDISFA LA DEFINIZIONE DATA VENERDÌ, ALLORA L'INTERVALLO (a,b) CONTIENE INFINITI PUNTI DI S, QUINDI ANCHE $(a,b) \setminus \{x_0\}$ NE CONTIENE INFINITI, E LA DEFINIZIONE SOVRASTANTE È SODDISFATTA.

VICEVERSA, SE AD OGNI $(a,b) \setminus \{x_0\}$ APPARTIENE ALMENO UN PUNTO DI S, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LA DEFINIZIONE DATA VENERDÌ È SODDISFATTA. VEDIAMO COME. PRENDO $(a,b) \ni x_0$. MI CHIEDO SE CONTIENE INFINITI PUNTI DI S.

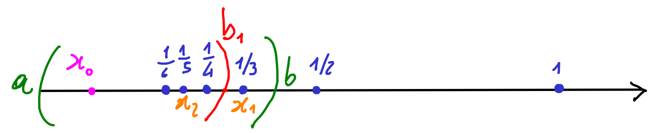
PER IPOTESI, ESISTE $x_1 \in S \cap (a,b) \setminus \{x_0\}$.

PRENDO ALLORA UN INTERVALLO $(a_1, b_1) \subset (a,b)$ TALE CHE $x_0 \in (a_1, b_1)$ E $x_1 \notin (a_1, b_1)$.

PER IPOTESI, ESISTE $x_2 \in S \cap (a_1, b_1) \setminus \{x_0\}$

PRENDO ALLORA UN INTERVALLO $(a_2, b_2) \subset (a_1, b_1)$ TALE CHE $x_0 \in (a_2, b_2)$ E $x_2 \notin (a_2, b_2)$.

PER IPOTESI, ESISTE $x_3 \in S$... ECCETERA, DUNQUE (a,b) CONTIENE INFINITI ELEMENTI DI S, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.



$$S = \left\{ \frac{1}{n}, \; n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$