FORME DIFFERENZIALI

prof. Antonio Greco
http://people.unica.it/antoniogreco

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari

18-9-2022

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

Indice

Introduzione

RICHIAMI SUL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

coinvolge, come sappiamo, una funzione integranda f ed una sua primitiva F.

Osserviamo che la (1) coinvolge anche l'intervallo di integrazione (a, b) ed il suo bordo, che è costituito dai due estremi a e b che figurano al secondo membro.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale può essere esteso a funzioni di più variabili in diversi modi.

Discendono dal teorema fondamentale del calcolo integrale, ad esempio, le formule di Gauss-Green nel piano:

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} f(x,y)\,dy$$

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = -\int_{\partial\Omega} f(x,y)\,dx$$

come pure il teorema della divergenza:

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,d\sigma$$

ed il teorema di Stokes:

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

MOTIVAZIONI

Fra le diverse motivazioni della teoria delle forme differenziali citiamo le seguenti tre.

A. La nozione di forma differenziale offre uno dei possibili modi di intendere rigorosamente il simbolo dx che si scrive sotto il segno di integrale.

Si rammenti, a questo proposito, che nell'analisi standard (quella normalmente insegnata nelle scuole ed all'università) non esistono numeri reali infinitesimi.

B. La teoria delle forme differenziali consente di scrivere tutti gli enunciati richiamati a lato come un unico teorema, detto ancora teorema di Stokes ed espresso dalla formula

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega. \qquad (2)$$

Questa notevole sintesi avviene tuttavia al prezzo di qualche fatica, che questa dispensa descrive brevemente.

Per comprendere la (2) cercheremo di capire:

1) che cos'è una forma differenziale ω;

2) che cos'è il differenziale $d\omega$ di una forma.

C. La simmetria della formula (2) motiva anche la scelta del simbolo ∂ per denotare il contorno $\partial\Omega$ di una figura Ω.

LE ORIGINI

Le origini dei teoremi di Stokes e della divergenza sono illustrate nell'articolo [12].

L'idea del prodotto esterno si attribuisce a Hermann Grassman, un insegnante di un istituto scolastico di Stettino, che ne trattò nel libro [11], del 1844.

La città di Stettino è sede di un porto nel nord della odierna Polonia, in un territorio che era prussiano ai tempi di Grassmann.

In estrema sintesi, Grassmann concepì il parallelogramma come un prodotto di due vettori uscenti da uno stesso punto: vedere l'appendice (pag. 45).

Élie Cartan

L'ideazione delle forme differenziali è invece attribuita a Élie Cartan [5], in relazione allo studio di certe equazioni differenziali.

Si veda a tal proposito l'articolo [25].

PROPAGAZIONE DELLA TEORIA NEI TESTI

Sono diversi gli autori che, da alcuni anni, cercano di dare maggiore diffusione alle nozioni accennate nella presente dispensa.

In particolare mi sono liberamente ispirato (stravolgendoli) ai corsi tenuti a Cagliari dal prof. Francesco Mercuri della Universidade Estadual de Campinas (Brasile).

prof. Francesco Mercuri

Il prof. Mercuri è coautore del testo [4].

Il crescente interesse verso la materia è testimoniato anche dalle dispense [19] e [20].

La presente dispensa dovrebbe aiutare il Lettore a riconoscere il disegno complessivo dell'argomento.

Per una trattazione più dettagliata si rimanda ai testi citati sopra ed in bibliografia. Esaminiamone ora qualcuno più da vicino.

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS

Il trattato [6] di R. Courant (1937) non fa riferimento al concetto di forma differenziale, ma si limita ai campi vettoriali nel piano e nello spazio.

In particolare in [6, pag. 405, riga 1] si afferma erroneamente che qualunque campo solenoidale in una regione chiusa $R \subset \mathbb{R}^3$ ammette un potenziale vettore.

La tesi equivale ad affermare che qualunque 2-forma chiusa ω definita nella regione R è esatta.

L'affermazione è vera se la regione R è fortemente connessa (priva di cavità): v. [18, proposizione 3.7, pag. 507].

Equivalentemente, l'affermazione è vera se $H_2(R) = \{\, 0 \,\}$: v. pag. 41.

In effetti la dimostrazione di [6] è svolta nel caso particolare in cui $R =$ parallelepipedo.

IL RUDIN

Il capitolo 10 di [24] è dedicato all'integrazione delle forme. Il teorema di Stokes si trova a pag. 277 (teorema 10.33). Si dimostra che le forme chiuse sono esatte negli aperti convessi (teorema 10.39).

L'AMERIO

Il testo [1] di L. Amerio, del 1982, tratta l'argomento limitatamente alle 1-forme (vol. 1, cap. 10, e vol. 2, pag. 599 e segg.).

IL PAGANI-SALSA

Una trattazione delle 1-forme si trova anche nel testo [18] di C. D. Pagani e S. Salsa, del 1998 (capitolo 1).

La caratterizzazione delle 2-forme esatte è svolta nel capitolo 6, paragrafo 3.4 di [18] con il linguaggio dei campi vettoriali (dunque senza parlare direttamente di 2-forme).

In particolare in [18, pag. 505] si trova un esempio di campo solenoidale privo di potenziale vettore (vedere anche [3, pag. 341]).

La nozione di aperto fortemente connesso si trova in [18, pag. 507], e interviene nella proposizione 3.7 sull'esistenza del potenziale vettore.

BRAMANTI-PAGANI-SALSA

Il testo [3] di M. Bramanti, C. D. Pagani e S. Salsa (2009) riporta a pag. 314 uno specchietto intitolato "Il linguaggio delle forme differenziali". Alla stessa pagina si definisce il concetto di forte connessione, che interviene nell'enunciato del teorema 6.5.

BARUTELLO ET AL.

Il testo [2] di V. Barutello, M. Conti, D. L. Ferrario, S. Terracini e G. Verzini fa riferimento alle forme differenziali in una nota a margine a pag. 481.

FUSCO-MARCELLINI-SBORDONE

Un ampio capitolo sulle k-forme, comprendente il teorema di Stokes generalizzato (2) si può trovare nel testo [10] di N. Fusco, P. Marcellini e C. Sbordone (1996).

IL SINGER-THORPE

Un classico testo che tratta gli argomenti di questa dispensa è [23], la cui edizione originale, del 1967, ha avuto un notevole successo internazionale.

Le difficoltà di lettura dovute allo stile decontestualizzato ed ai frequenti refusi possono forse essere attenuate leggendo le spiegazioni che seguono.

Definizioni ed esempi

SEMPLICI ESEMPI DI FORME

Per comprendere la definizione di forma differenziale, consideriamo una funzione differenziabile $f(x, y, z)$ ed un campo vettoriale $\boldsymbol{F}$, costante (nel tempo) ed uniforme (nello spazio), come ad esempio $\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{\imath}}$.

ESEMPIO N. 1. Se interpretiamo $\boldsymbol{F}$ come una forza, ad ogni vettore spostamento $\boldsymbol{r}$ resta associato il lavoro

$$\omega(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}. \tag{3}$$

ESEMPIO N. 2. Per la formula del gradiente, la derivata direzionale di f rispetto al vettore $\boldsymbol{r}$ nel punto (x, y, z) è data da

$$\begin{aligned} \omega(\boldsymbol{r}) &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}(x, y, z) \\ &= \boldsymbol{r} \cdot \nabla f(x, y, z). \end{aligned} \tag{4}$$

ESEMPIO N. 3. Ricordiamo che due vettori $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \neq \mathbf{0}$, uscenti da uno stesso punto, individuano un parallelogramma.

Per quanto riguarda la normale al parallelogramma, fra le due possibili orientazioni si suole scegliere quella del vettore $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$.

Ebbene, il flusso del campo $\boldsymbol{F}$ attraverso il parallelogramma così orientato è dato da

$$\omega(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2. \tag{5}$$

FORME MULTILINEARI ALTERNANTI

Il concetto teorico che inquadra e generalizza gli esempi 1 e 2 è quello di “forma multilineare alternante”, o “forma esterna”.

Una forma multilineare alternante ω prende come argomento k vettori $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_k$ e dà come risultato un numero reale.

“Forma” vuol dire che i valori di tale applicazione sono scalari.

“Multilineare” vuol dire che, comunque si fissino $k - 1$ dei suddetti vettori, l’applicazione ω risulta lineare rispetto al vettore rimanente, considerato come una variabile.

“Alternante” vuol dire che se si scambiano tra loro due qualunque vettori dell’argomento di ω, il valore numerico della forma cambia segno. Questo si vede, ad esempio, nella forma (5).

Il numero degli argomenti di una forma viene detto grado. Ad esempio, le forme (3) e (4) sono di grado 1, cioè, in altri termini, sono delle 1-forme, mentre la (5) è una 2-forma.

L’insieme di tutte le forme multilineari alternanti che prendono come argomento k vettori dello spazio $\mathbb{R}^3$ si denota con $\Lambda^k(\mathbb{R}^3)$. Si dimostra che per $k > 3$ l’unica forma n-lineare alternante definita su $\mathbb{R}^3$ è la forma banale $\omega(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_k) = 0$.

FORME DIFFERENZIALI

La forma (4) cambia al variare del punto (x, y, z): ciò suggerisce il concetto di campo di forme, o forma differenziale:

Definizione. Una forma differenziale, o campo di forme, di grado n è un'applicazione avente per dominio lo spazio $\mathbb{R}^3$ che ad ogni punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associa una n-forma.

Si richiede inoltre che la forma vari con una certa regolarità rispetto al punto (x, y, z). Per precisare ciò dovremo esprimere il campo di forme in termini di opportune forme di base.

Il dominio di una forma non è necessariamente tutto lo spazio, ma può essere un aperto tridimensionale, oppure una curva o una superficie.

L'insieme di tutte le forme di grado n aventi per dominio uno stesso aperto U si denota con $\Omega^n(U)$. Non si confonda tale simbolo con quello sovente utilizzato per denotare i domini di integrazione, come ad esempio avviene nella (2).

Ad esempio, la (4) definisce una forma differenziale di grado 1 definita sul dominio della funzione f.

Le funzioni di classe $C^\infty(U)$ ($C^0(U)$ secondo [24, pag. 258, ultima riga]) si considerano forme di grado 0.

LA DEFINIZIONE ORIGINALE

Nella definizione originale data da Cartan nel lavoro [5], le forme differenziali vengono definite come "espressioni" anziché come funzioni.

A questo proposito si veda anche la biografia di Cartan sul sito [16].

La stessa definizione "formale" si ritrova nel testo [1, vol. 1, pag. 556], ed è quella che il prof. Porru dava a lezione quando ero studente.

prof. Giovanni Porru

La definizione delle forme differenziali come opportune applicazioni deve dunque considerarsi frutto di una rielaborazione successiva.

Le forme di base

Forme di base e loro utilità

Qualunque forma multilineare alternante si può esprimere mediante forme particolari, perciò dette forme di base.

Le forme di base si denotano con $dx_1, \ldots, dx_n$ e prendono come argomento singoli vettori, dunque sono 1-forme.

Limitiamoci, per semplicità, a rappresentare le forme $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^3)$. In questo caso le forme di base dx_1, dx_2, dx_3 si possono anche indicare con dx, dy, dz. La forma dx è definita ponendo

$$dx(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}}$$

dunque $dx(\boldsymbol{r})$ è la prima componente del vettore $\boldsymbol{r}$, e perciò coincide con $\pi_1(\boldsymbol{r})$, essendo π_1 la prima proiezione di $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$.

Analogamente si definiscono le forme dy e dz:

$$dy(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \qquad dz(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{k}}.$$

Con la stessa notazione dx, dy e dz si indicano anche i tre campi di forme che, ad ogni punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, associano le forme lineari alternanti date sopra.

Espressione delle 1-forme

Per la linearità, qualunque 1-forma $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$, funzione di un vettore $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$, si può scrivere in termini delle tre componenti di $\boldsymbol{r}$ come segue:

$$\omega(\boldsymbol{r}) \;=\; a\,\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} + b\,\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} + c\,\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{k}}$$

dove a, b e c sono tre scalari fissati, detti componenti della forma ω.

Dunque, vista la definizione delle forme di base, possiamo scrivere

$$\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz. \tag{6}$$

Nel caso dell'esempio 1 (pag. 9) gli scalari a, b, c sono le componenti del campo $\boldsymbol{F}$.

La rappresentazione (6) permette anche di precisare la regolarità di un campo di forme: si dice che la forma

$$\begin{aligned}\omega = a(x, y, z)\,dx + b(x, y, z)\,dy \\ + c(x, y, z)\,dz\end{aligned}$$

è di classe C^k in un aperto $U \subset \mathbb{R}^3$ se le tre funzioni scalari $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$ e $c(x, y, z)$ sono di classe $C^k(U)$.

Nel caso dell'esempio 2 (pag. 9), gli scalari a, b, c sono le derivate parziali f_x, f_y e f_z. Lo stesso esempio permette anche di interpretare il differenziale di f

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$$

come la forma ω data dalla (4).

Espressione delle 2-forme

Le forme bilineari alternanti prendono come argomento, per definizione, una coppia di vettori $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$.

Se consideriamo vettori $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \in \mathbb{R}^3$, vi sono tre particolari forme bilineari alternanti alle quali si possono ricondurre tutte le altre: esse sono i determinanti appresso riportati.

Per capire come sono fatte tali forme, indichiamo con (X_1, Y_1, Z_1) le componenti del vettore $\boldsymbol{r}_1$, e con (X_2, Y_2, Z_2) quelle di $\boldsymbol{r}_2$. Si scrive:

$$(dx \wedge dy)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$(dy \wedge dz)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$(dz \wedge dx)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

In sintesi, la forma $dx \wedge dy$, la forma $dy \wedge dz$ e la forma $dx \wedge dz$ sono i tre minori 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{pmatrix}.$$

Qualunque forma bilineare alternante $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ si può scrivere come combinazione lineare

$$\omega = a\, dx \wedge dy + b\, dy \wedge dz + c\, dz \wedge dx$$

con opportuni coefficienti a, b, c. Se tali coefficienti, a loro volta, sono funzioni di classe C^k, si dirà che la forma ω è di classe C^k.

Ciascuna delle tre forme (7), (8) e (9) si può scrivere in termini delle forme dx, dy e dz.

Ad esempio, osservando la (7) si constata che la 2-forma $dx \wedge dy$ è data da

$$\begin{aligned}(dx \wedge dy)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) &= dx(\boldsymbol{r}_1)\, dy(\boldsymbol{r}_2) \\ &- dy(\boldsymbol{r}_1)\, dx(\boldsymbol{r}_2).\end{aligned}$$

Analogamente, dalla (8) e dalla (9) discende che

$$\begin{aligned}(dy \wedge dz)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) &= dy(\boldsymbol{r}_1)\, dz(\boldsymbol{r}_2) \\ &- dz(\boldsymbol{r}_1)\, dy(\boldsymbol{r}_2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(dz \wedge dx)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) &= dz(\boldsymbol{r}_1)\, dx(\boldsymbol{r}_2) \\ &- dx(\boldsymbol{r}_1)\, dz(\boldsymbol{r}_2).\end{aligned}$$

Il simbolo $\wedge$ denota un'operazione tra forme, detta prodotto esterno o prodotto wedge, di cui parleremo a pag. 14. Possiamo subito constatare che

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx,$$

e similmente

$$\begin{aligned} dy \wedge dz &= -dz \wedge dy, \\ dz \wedge dx &= -dx \wedge dz. \end{aligned}$$

Tuttavia, se ω e ψ sono due forme qualunque, non è detto che $\omega \wedge \psi = -\psi \wedge \omega$ (v. pag. 14).

ESPRESSIONE DELLE 3-FORME

Le forme trilineari alternanti prendono come argomento, per definizione, una terna di vettori $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$.

Se $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3 \in \mathbb{R}^3$, allora qualunque applicazione del genere si ottiene moltiplicando per uno scalare opportuno una sola di esse: il determinante.

Più esattamente, indicate con (X_i, Y_i, Z_i) le componenti del vettore $\boldsymbol{r}_i$ per $i = 1, 2, 3$, si pone

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = \\ = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} . \qquad (10)$$

Dunque le 3-forme sono del tipo $f(x, y, x)\, dx \wedge dy \wedge dz$, e si dicono di classe C^k quando lo è la funzione $f(x, y, z)$.

Anche la forma $dx \wedge dy \wedge dz$ si può esprimere in termini delle forme di base dx, dy, dz.

Infatti, sviluppando il determinante nella (10) rispetto alla terza riga, si constata che

$$\begin{aligned} &(dx \wedge dy \wedge dz)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = \\ &\qquad = \ ((dx \wedge dy)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2))\, dz(\boldsymbol{r}_3) \\ &\qquad + \ ((dy \wedge dz)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2))\, dx(\boldsymbol{r}_3) \\ &\qquad + \ ((dz \wedge dx)(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2))\, dy(\boldsymbol{r}_3). \end{aligned}$$

A loro volta le 2-forme $dx \wedge dy$, $dy \wedge dz$ e $dz \wedge dx$ si esprimono in termini di dx, dy e dz come a pag. 13.

IL PRODOTTO ESTERNO

Per rappresentare le applicazioni multilineari alternanti in termini di dx, dy e dz, come appena visto, si utilizza il cosiddetto prodotto esterno.

Il prodotto esterno, detto anche prodotto wedge, si indica con il simbolo $\wedge$ (wedge = cuneo).

Non si confonda il prodotto wedge di due forme con il prodotto vettoriale di due vettori, talvolta indicato con lo stesso simbolo.

Le principali proprietà del prodotto esterno sono:

1) se una forma ω prende n argomenti, ed una forma ψ ne prende m, allora il prodotto esterno $\omega \wedge \psi$ prende $n + m$ argomenti;

2) il prodotto esterno è associativo. Esso è anche distributivo rispetto alla somma di forme;

3) il prodotto esterno di una forma ω, ad n argomenti, con sé stessa è la forma nulla (a $2n$ argomenti).

In generale, date due forme ω e ψ, per determinare il prodotto $\omega \wedge \psi$ basta esprimere ω e ψ in termini delle forme di base dx_i e poi moltiplicare usando le suddette proprietà ed il fatto che $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$.

Si noti che può benissimo risultare $\omega \wedge \psi = +\psi \wedge \omega$, come ad esempio accade nel caso $\omega = dx \wedge dy$ e $\psi = dz$.

Integrazione delle forme

INTEGRAZIONE DI UNA 1-FORMA LUNGO UNA CURVA

Si tratta di una riformulazione dell'integrale curvilineo di seconda specie.

Data una curva regolare γ, di equazioni parametriche $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $t \in [a, b]$, ed una 1-forma

$$\omega = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz$$

si definisce

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b a(\boldsymbol{r}(t))\,\boldsymbol{r}'(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\imath}}\;dt + \int_a^b b(\boldsymbol{r}(t))\,\boldsymbol{r}'(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\jmath}}\;dt + \int_a^b c(\boldsymbol{r}(t))\,\boldsymbol{r}'(t)\cdot\hat{\boldsymbol{k}}\;dt.$$

ESEMPIO N. 1 BIS. Nel caso della forma (3) le funzioni a, b, c sono le tre componenti del campo $\boldsymbol{F}$, e risulta

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

ESEMPIO N. 2 BIS. Nel caso della forma (4) le funzioni a, b, c sono le derivate parziali di f, e risulta $\omega = df$. Dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\boldsymbol{r}(b)) - f(\boldsymbol{r}(a)).$$

Come caso particolare, anche l'integrale definito

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

si può intendere come l'integrale della forma $f(x)\,dx$ lungo il segmento $[a, b]$, orientato da a verso b.

INTEGRAZIONE DI UNA 2-FORMA SU DI UNA SUPERFICIE

Si tratta di una riformulazione della nozione di flusso.

Consideriamo una superficie regolare Σ, data in forma parametrica da $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, con $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Consideriamo, inoltre, una 2-forma

$$\begin{aligned} \omega &= a(x,y,z)\,dy \wedge dz \\ &+ b(x,y,z)\,dz \wedge dx \\ &+ c(x,y,z)\,dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Usando le definizioni (7)–(9), si applicano le forme $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ e $dx \wedge dy$ alla coppia $(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)$ dei campi coordinati, e si definisce

$$\begin{aligned} &\int_\Sigma \omega = \\ &= \iint_D a(x,y,z)\,((dy \wedge dz)(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v))\,du\,dv \\ &+ \iint_D b(x,y,z)\,((dz \wedge dx)(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v))\,du\,dv \\ &+ \iint_D c(x,y,z)\,((dx \wedge dy)(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v))\,du\,dv. \end{aligned}$$

ESEMPIO N. 3 BIS. Se le funzioni a, b, c denotano le componenti di un campo $\boldsymbol{F}$, allora, sostituendo nella definizione sopra, si constata che

$$\int_\Sigma \omega = \iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\; d\sigma \tag{11}$$

essendo $\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|}$ il versore normale a Σ.

NOTAZIONE. Applicando le definizioni (7), (8) e (9) si trova

$$\begin{aligned} (dx \wedge dy)(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) &= \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \\ (dy \wedge dz)(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) &= \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \\ (dz \wedge dx)(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) &= \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

dove $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ denotano le componenti di $\boldsymbol{r}(u,v)$.

I determinanti al secondo membro vengono indicati, rispettivamente, con le notazioni

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|, \quad \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|, \quad \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|,$$

e di conseguenza si scrive

$$\begin{aligned} &\iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,d\sigma = \\ &= \iint_D a(x,y,z)\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \\ &+ \iint_D b(x,y,z)\left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \\ &+ \iint_D c(x,y,z)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \end{aligned}$$

come ad esempio in [10, pagina 581, formula (99.15)]

INTEGRAZIONE DI UNA 3-FORMA SU DI UN DOMINIO TRIDIMENSIONALE

Si tratta di una riformulazione dell'integrale triplo.

Si rammenti che le 3-forme prendono come argomento una terna $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ di vettori di $\mathbb{R}^3$.

La più generale 3-forma $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ si ottiene moltiplicando un'opportuna funzione scalare $f(x, y, z)$ per la forma $dx \wedge dy \wedge dz$ data dalla (10). Si definisce

$$\int_\Omega \omega = \iiint_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

dunque il consueto integrale triplo si può intendere come l'integrale della forma $f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ esteso al dominio orientato Ω.

Anche il solido Ω ha un'orientazione: infatti, una volta immerso nello spazio quadridimensionale $\mathbb{R}^4$, anch'esso ha due normali, che sono $(0, 0, 0, -1)$ e $(0, 0, 0, 1)$.

Di solito si prende tacitamente quest'ultimo vettore per orientare qualunque solido.

Il differenziale esterno

DIFFERENZIALE DI UNA 0-FORMA

Abbiamo osservato a pag. 10 che le funzioni scalari $f(x, y, z)$ si considerano 0-forme, e a pag. 12 che il loro differenziale è la 1-forma df data da

$$df = f_x \, dx + f_y \, dy + f_z \, dz.$$

DIFFERENZIALE DI UNA 1-FORMA

Il differenziale di una 1-forma $\omega = a\,dx + b\,dy + b\,dz$ è la 2-forma data da

$$d\omega = da \wedge dx + db \wedge dy + dc \wedge dz.$$

Siccome

$$\begin{aligned} da &= a_x \, dx + a_y \, dy + a_z \, dz, \\ db &= b_x \, dx + b_y \, dy + b_z \, dz, \\ dc &= c_x \, dx + c_y \, dy + c_z \, dz, \end{aligned}$$

applicando le proprietà indicate a pag. 14 si trova

$$\begin{aligned} d\omega &= (c_y - b_z)(dy \wedge dz) \\ &+ (a_z - c_x)(dz \wedge dx) \\ &+ (b_x - a_y)(dx \wedge dy). \end{aligned} \qquad (12)$$

Perciò, posto $\boldsymbol{F} = (a, b, c)$, le componenti della 2-forma $d\omega$ rispetto alle forme $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ e $dx \wedge dy$ coincidono con le componenti del vettore

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = (c_y - b_z)\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + (a_z - c_x)\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} \\ + (b_x - a_y)\, \hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned}$$

rispetto ai versori degli assi. Osserviamo inoltre che, presi presi a piacere due vettori $\boldsymbol{r}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$, $i = 1, 2$, per la (12) e per le (7)–(9) possiamo scrivere

$$d\omega(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \begin{vmatrix} c_y - b_z & a_z - c_x & b_x - a_y \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

D'altro canto i vettori $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ individuano un parallelogramma Σ che possiamo orientare con il versore $\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\|}$.

Il flusso $\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ del vettore $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ attraverso il parallelogramma Σ così orientato è dato da

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2.$$

Si constata dunque che sussiste l'uguaglianza

$$d\omega(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2).$$

Tale uguaglianza, oltre a fornire un'interpretazione della 2-forma $d\omega$, motiva la definizione del differenziale di una forma mostrando che essa consente di esprimere un flusso.

DIFFERENZIALE DI UNA 2-FORMA

Il differenziale una 2-forma

$$\begin{aligned} \omega &= a(x, y, z)\, dy \wedge dz \\ &+ b(x, y, z)\, dz \wedge dx \\ &+ c(x, y, z)\, dx \wedge dy \end{aligned} \tag{13}$$

si definisce come la 3-forma

$$d\omega = da \wedge dy \wedge dz + db \wedge dz \wedge dx \\ + dc \wedge dx \wedge dy.$$

Procedendo come a pag. 20, e siccome $dx \wedge dy \wedge dz = dy \wedge dz \wedge dx = dz \wedge dx \wedge dy$, si deduce che

$$d\omega = (a_x + b_y + c_z)\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Perciò, se indichiamo con $\boldsymbol{F}$ è il vettore di componenti (a, b, c), la componente di $d\omega$ rispetto alla forma $dx \wedge dy \wedge dz$ coincide con $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$.

Di conseguenza, presi a piacere tre vettori $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ formanti una terna destra, e indicato con Ω il parallelepipedo da essi individuato, si ha

$$d\omega(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = |\Omega| \operatorname{div} \boldsymbol{F},$$

dove con $|\Omega|$ si indica il volume di Ω.

Tale uguaglianza, oltre a fornire un'interpretazione della forma $d\omega$, consente di esprimere il teorema della divergenza in termini di forme differenziali.

DIFFERENZIALE DI UNA 3-FORMA

Il differenziale una 3-forma

$$\omega = f(x, y, x)\, dx \wedge dy \wedge dz$$

si definisce come la 4-forma

$$d\omega = df \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

Procedendo come a pag. 20, e siccome i prodotti $dx \wedge dx$, $dy \wedge dy$ e $dz \wedge dz$ danno la 2-forma nulla, si deduce che $d\omega$ è la 4-forma nulla.

Peraltro, come già osservato a pag. 9, l'unica 4-forma nello spazio tridimensionale è proprio la forma nulla.

IL DIFFERENZIALE SECONDO

Abbiamo appena visto che, se ω è una qualunque 3-forma, risulta $d\omega = 0$ e perciò

$$d^2\omega = 0, \tag{14}$$

dove si è posto $d^2\omega = d(d\omega)$. Applicando le definizioni precedenti, e usando il teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione, di trova che la (14) continua a valere qualunque sia il grado della forma ω.

Si intende che, se il grado della forma ω è k, allora lo zero al secondo membro della (14) denota la $k+2$-forma banale, cioè la forma identicamente nulla con $k+2$ argomenti.

Se ω è una 0-forma, cioè una funzione f, il differenziale nella (14) non va confuso col differenziale secondo $d^2 f$ che compare nella formula di Taylor.

FORME CHIUSE

Si dice che una k-forma differenziale ω è chiusa quando il differenziale $d\omega$ è la $k+1$-forma nulla, cioè quando

$$d\omega = 0. \tag{15}$$

La scelta del termine "chiusa" è dovuta all'analogia, detta dualità, tra forme e superfici messa in luce dal teorema di de Rham.

Nell'ambito di tale analogia, le forme dette chiuse corrispondono alle superfici chiuse come ad esempio la superficie sferica.

Per quanto visto a pag. 21, dalla definizione discende che tutte le 3 forme $\omega = f(x, y, z)\, dx \wedge dy \wedge dz$ sono chiuse.

Per quanto visto a pag. 21, la 2-forma ω data dalla (13) è chiusa se e solo se il campo vettoriale

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = a(x, y, z)\, \hat{\boldsymbol{\imath}} \\ + b(x, y, z)\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} + c(x, y, z)\, \hat{\boldsymbol{k}} \tag{16}$$

è solenoidale, cioè se risulta $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ in tutto lo spazio.

Per quanto visto a pag. 20, la 1-forma $\omega = a\, dx + b\, dy + c\, dz$ è chiusa se e solo se il campo vettoriale (16) è irrotazionale.

Infine, per quanto visto a pag. 20, la 0-forma $\omega = f(x, y, z)$ è chiusa se e solo se la funzione f ha le tre derivate parziali identicamente nulle.

FORME ESATTE

Si dice che una $k+1$-forma ω è esatta quando esiste una k-forma ψ tale che

$$d\psi = \omega. \tag{17}$$

Per quanto visto a pag. 20, la 2-forma ω data dalla (13) è esatta se e solo se, indicato con $\boldsymbol{F}$ il campo (16), esiste un opportuno campo vettoriale $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ tale che

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}(x, y, z) = \boldsymbol{F}(x, y, z)$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Per quanto visto a pag. 20, la 1-forma $\omega = a\, dx + b\, dy + c\, dz$ è esatta se e solo se, indicato ancora con $\boldsymbol{F}$ il campo (16), esiste una funzione $f(x, y, z)$ tale che $\nabla f(x, y, z) = \boldsymbol{F}(x, y, x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Infine, per quanto visto a pagina 21, la 3-forma $\omega = f(x, y, z)\, dx \wedge dy \wedge dz$ è esatta se e solo se esiste un campo $F(x, y, z)$ tale che

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x, y, z) = f(x, y, z) \tag{18}$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

CONDIZIONE NECESSARIA

Dalla definizione discende che se ω è una forma esatta di grado $k+1$, allora il suo differenziale si può scrivere come $d\omega = d^2\psi$ con un'opportuna k-forma ψ.

Ricordando la (14), si deduce che condizione necessaria affinché ω sia esatta è che sia chiusa.

Teorema di Stokes generalizzato

TEOREMA DI STOKES GENERALIZZATO

Il teorema di Stokes generalizzato, espresso dalla formula (2), comprende come casi particolari diversi notevoli teoremi.

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Il teorema della divergenza afferma che sotto convenienti ipotesi si ha

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, d\sigma.$$

Se denotiamo con ω la forma differenziale $\boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, d\sigma$, allora per quanto visto a pag. 21 si ha $d\omega = \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, dx \, dy \, dz$ e perciò il teorema della divergenza si può esprimere con la formula (2).

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Per scrivere il teorema fondamentale del calcolo integrale (1) nella forma (2) si pone $\Omega = [a, b]$.

Il bordo $\partial\Omega$ è la coppia ordinata (a, b), i cui elementi sono i due estremi dell'intervallo $[a, b]$.

Si definisce l'integrale della 0-forma $\omega = F(x)$ sull'insieme (a, b), che ha solo due elementi, ponendo

$$\int_{\partial\Omega} \omega = F(b) - F(a).$$

Poiché $d\omega = f(x) \, dx$, il teorema fondamentale del calcolo integrale (1) assume la forma (2).

TEOREMA DI STOKES

Il teorema di Stokes afferma che sotto convenienti ipotesi si ha

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, d\sigma = \int_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{19}$$

Apportiamo i seguenti cambiamenti di notazione:

1. Denotiamo la superficie Σ con la lettera Ω;

2. Denotiamo la curva γ col simbolo $\partial\Omega$;

3. Denotiamo con ω la forma differenziale $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.

Allora, per quanto visto a pag. 20, il differenziale $d\omega$ è la 2-forma $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, d\sigma$. Tenendo conto della (11) possiamo scrivere

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, d\sigma = \int_{\Omega} d\omega.$$

Poiché il secondo membro della (19) diventa

$$\int_{\partial\Omega} \omega,$$

il teorema di Stokes si può esprimere mediante la (2).

FORMULE DI GAUSS-GREEN

La formula di Gauss-Green

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f(x, y) \, dy$$

assume la forma (2) ponendo $\omega = f(x, y) \, dy$. Infatti applicando la definizione vista a pag. 20 si trova

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dx \, dy.$$

Similmente si procede per l'altra formula.

Elementi di teoria dell'omologia

omologia

La nozione di omologia è attribuita a Poincaré [21, pag. 79]. Secondo [15, pag. 928], Poincaré pervenne a tale concetto nel tentativo di classificare le varietà (figure geometriche).

In breve, due curve chiuse e orientate si dicono omologhe se si possono trasformare l'una nell'altra senza uscire da una data regione del piano o dello spazio.

Ad esempio, tutte le curve chiuse del piano, percorse in verso antiorario, sono omologhe fra loro.

Invece, non tutte le curve chiuse del piano bucato $\mathbb{R}^2_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$ sono omologhe fra loro.

Più precisamente, due curve chiuse $\gamma_1, \gamma_2 \subset \mathbb{R}^2_0$ sono omologhe fra loro se e solo se girano intorno all'origine nello stesso senso lo stesso numero di volte.

L'impossibilità di trasformare, senza uscire da $\mathbb{R}^2_0$, una curva γ_1 che gira intorno all'origine in un'altra curva γ_2 che non gira intorno all'origine è dovuta al fatto che l'origine non appartiene ad $\mathbb{R}^2_0$.

Tale impossibilità dota lo spazio delle curve chiuse e orientate di una struttura non banale, usata per rilevare la geometria non banale del dominio $\mathbb{R}^2_0$.

Henri Poincaré

In sintesi, la teoria dell'omologia studia la forma di una figura $\mathcal{U}$, di dimensione N, tramite le proprietà delle curve chiuse $\gamma \subset \mathcal{U}$, ma anche tramite le superfici chiuse $\Sigma \subset \mathcal{U}$ ed il loro analogo k-dimensionale per ogni $k < N$.

Secondo [13, pag. 1375], l'idea di esprimere tali proprietà mediante strutture algebriche (gruppi di omologia) fu forse suggerita da Emmy Noether.

Si badi che lo studio dell'omologia di superfici apparentemente semplici può rivelarsi estremamente difficoltoso.

Un esempio notevole è dato dalla sfera k-dimensionale S^k intesa come il luogo dei punti $(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ soddisfacenti l'equazione

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i^2 = 1.$$

La celebre congettura di Poincaré riguardante tale superficie ha richiesto molti anni ed il contributo di matematici eccellenti per essere dimostrata.

L'OMOLOGIA DEL PIANO BUCATO

Consideriamo il piano bucato $\mathbb{R}^2_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$. Una curva chiusa $\gamma \subset \mathbb{R}^2_0$ è omologa ad un punto se e solo se γ non gira intorno all'origine.

Infatti, se γ gira intorno all'origine, non può essere trasformata in un punto senza uscire da $\mathbb{R}^2_0$: si intende che si esce da $\mathbb{R}^2_0$ non appena si tocca l'origine $(0,0) \notin \mathbb{R}^2_0$.

Le curve chiuse γ nel piano bucato $\mathbb{R}^2_0$ costituiscono dunque due classi: una è la classe banale, o classe nulla, quella delle curve omologhe ad un punto.

Per descrivere l'altra classe di curve, indichiamo con γ_1 la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario.

Le curve chiuse γ nel piano bucato $\mathbb{R}^2_0$, non banali, sono del tipo $z\,\gamma_1$ con $z \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \}$, cioè girano una o più volte intorno all'origine, nello stesso verso di γ_1 o in verso opposto.

Si concepisce quindi il primo gruppo di omologia $H_1(\mathbb{R}^2_0)$ del piano bucato $\mathbb{R}^2_0$, che è isomorfo al gruppo $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

Nel gruppo $H_1(\mathbb{R}^2_0) \equiv \mathbb{Z}$ lo zero rappresenta le curve banali, mentre l'intero $z \neq 0$ rappresenta le curve che girano $|z|$ volte intorno all'origine, in senso antiorario se $z > 0$, in senso orario se $z < 0$.

Poiché gli elementi di tale gruppo sono tutti multipli di un elemento particolare (il numero 1, ovvero la curva γ_1), si dice che esso ha rango 1, o dimensione 1.

Per definire $H_0(\mathbb{R}^2_0)$ si prendono, invece delle curve chiuse, uno o più punti di $\mathbb{R}^2_0$.

Essendo $\mathbb{R}^2_0$ connesso, ciascun punto di $\mathbb{R}^2_0$ è omologo ad un particolare punto $x_0 \in \mathbb{R}^2_0$, fissato a piacere, che eventualmente si può prendere z volte, con $z \in \mathbb{Z}$.

In definitiva, anche il gruppo $H_0(\mathbb{R}^2_0)$ del piano bucato $\mathbb{R}^2_0$ è isomorfo al gruppo commutativo $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

Invece risulta $H_2(\mathbb{R}^2_0) = \{ 0 \}$ perché qualunque superficie chiusa $\Sigma \subset \mathbb{R}^2_0$ deve stare schiacciata nel piano, e in tal modo ogni sua parte si sovrappone con una parte avente orientazione opposta, e così le due parti si elidono a vicenda.

Si noti che un singolo punto di $\mathbb{R}^2_0$, se pensato come elemento di $H_1(\mathbb{R}^2_0)$ o di $H_2(\mathbb{R}^2_0)$ rappresenta una curva o una superficie degenere, e perciò corrisponde allo zero.

Invece, un singolo punto di $\mathbb{R}^2_0$ rappresenta un elemento non degenere di $H_0(\mathbb{R}^2_0)$.

Spesso si parla di "omologia" del piano bucato $\mathbb{R}^2_0$ intendendo con questo termine la successione dei suoi gruppi di omologia:

$$\mathbb{Z},\ \mathbb{Z},\ \{ 0 \},\ \ldots$$

L'OMOLOGIA DEL PIANO CON n BUCHI

Indichiamo ora con $\mathbb{R}^2_{01}$ il piano $\mathbb{R}^2$ privato di due punti: $\mathbb{R}^2_{01} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0,0),\ (1,0)\,\}$.

Le curve chiuse $\gamma \subset \mathbb{R}^2_{01}$, se non sono omologhe ad un punto, girano z_0 volte intorno al punto $(0,0)$ e z_1 volte intorno al punto $(1,0)$.

Dunque il primo gruppo di omologia del piano $\mathbb{R}^2_{01}$ con due buchi è $H_1(\mathbb{R}^2_{01}) \equiv \mathbb{Z}^2$, i cui elementi sono coppie di interi (z_0, z_1).

Ad esempio, la circonferenza $x^2 + y^2 = 1/4$, percorsa in senso antiorario, corrisponde alla coppia $(1,0)$.

Invece la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$, percorsa in senso antiorario, corrisponde alla coppia $(1,1)$ perché gira una volta intorno ad entrambi i punti $(0,0)$ e $(1,0)$.

La circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ non interviene nel gruppo $H_1(\mathbb{R}^2_{01})$ perché passa per il punto $(1,0)$ e perciò non è inclusa in $\mathbb{R}^2_{01}$.

In generale, l'omologia del piano con n buchi è

$$\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}^n,\ \{\,0\,\},\ \ldots$$

CICLI

Per definire in modo rigoroso i gruppi di omologia $H_k(\mathcal{U})$ di un aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ si usa il concetto di gruppo quoziente.

Si comincia con il considerare l'insieme $Z_k(\mathcal{U})$ dei cicli orientati k-dimensionali inclusi in $\mathcal{U}$.

Un ciclo è un dominio k-dimensionale il cui bordo è vuoto.

Ad esempio, gli elementi di $Z_1(\mathcal{U})$ sono le curve chiuse e orientate $\gamma \subset \mathcal{U}$.

È lecito chiamare ciclo un sistema costituito da un numero finito di curve chiuse e orientate: si veda a pag. 30 a proposito della somma di cicli.

È lecito anche prendere la stessa curva più volte: si veda a pag. 30 a proposito dei multipli di un ciclo.

Gli elementi di $Z_2(\mathcal{U})$ sono, invece, le superfici chiuse e orientate $\Sigma \subset \mathcal{U}$, o, più in generale, sistemi costituiti da un numero finito di tali superfici, prese una o più volte.

Infine, un ciclo 0-dimensionale è una sequenza di un numero finito di punti di $\mathcal{U}$, presi una o più volte (ciascuno di essi ha bordo vuoto).

Si ammette, sul piano puramente concettuale, che, come per le curve e le superfici, abbia senso l'opposto $-P$ di ciascun punto $P \in \mathcal{U}$.

IL CICLO NULLO

Un elemento importante di $Z_k(\mathcal{U})$ è il ciclo nullo.

Se la dimensione k è positiva, si può concepire il ciclo nullo come un punto di $\mathcal{U}$, ma questa interpretazione può essere fuorviante.

Infatti un singolo punto $P \in \mathcal{U}$ si considera come un elemento non nullo di $Z_0(\mathcal{U})$.

Più esattamente, dunque, il ciclo nullo va concepito sul piano concettuale, un po' come l'insieme vuoto per la teoria degli insiemi, e non va rappresentato come un luogo geometrico.

NOTAZIONE

Per denotare un generico ciclo $c \in Z_k(\mathcal{U})$, senza riguardo per la sua dimensione k, si usa la lettera c (anziché γ, Σ, Ω, ecc.).

MULTIPLI DI UN CICLO

Si intende che l'opposto $-c$ di un ciclo k-dimensionale $c \in Z_k(\mathcal{U})$ è lo stesso ciclo orientato al contrario.

Il multiplo zc di una curva $c \in Z_1(\mathcal{U})$, con un coefficiente intero $z \in \mathbb{Z}$, non è altro che la stessa curva c percorsa z volte, se $z > 0$.

In dimensione $k \geq 2$ si intende con zc il ciclo k-dimensionale $c \in Z_k(\mathcal{U})$ contato z volte, o preso z volte, se $z > 0$.

Se, invece, $z < 0$, allora zc si ottiene contando $|z|$ volte il ciclo k-dimensionale $c \in Z_k(\mathcal{U})$ e invertendone l'orientazione.

Se $k = 1$ e $z < 0$, la curva zc è la curva orientata c percorsa $|z|$ volte al contrario.

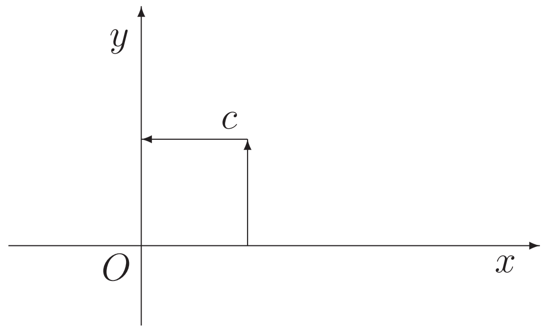
Se $k = 0$, e c è un singolo punto di $\mathcal{U}$, allora zc è lo stesso punto pensato z volte, se $z > 0$. Se, invece, $z < 0$, allora zc è lo stesso punto pensato $|z|$ volte e con l'orientazione opposta.

Si rammenti che anche un singolo punto si può orientare: vedere a pag. 29.

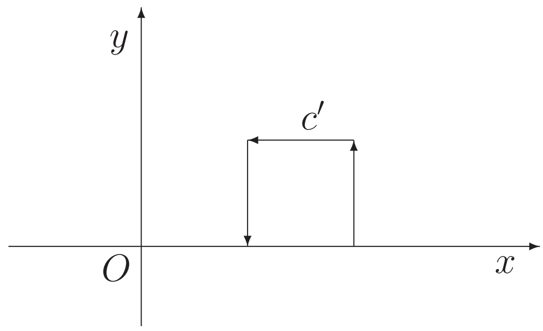
SOMMA DI CICLI

La somma di due cicli $c, c' \in Z_k(\mathcal{U})$ è il ciclo $c + c' \in Z_k(\mathcal{U})$ ottenuto considerando congiuntamente c e c' con la loro orientazione.

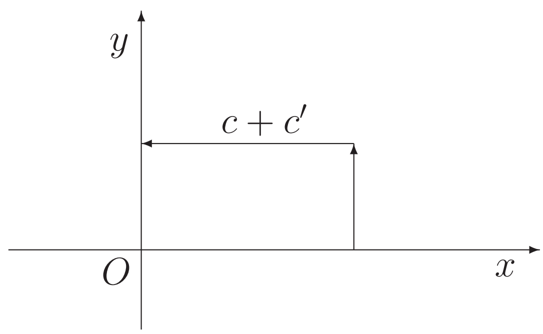
Ad esempio, sia $c \in Z_1(\mathbb{R}^2)$ il quadrato di lato unitario e vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, percorso in senso antiorario.



Indichiamo con c' il quadrato ottenuto spostando c di una unità nel verso dell'asse x.



Allora il ciclo $c + c'$ è il rettangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$, percorso in senso antiorario.



BORDI

Il cuore dell'omologia consiste nel fatto che alcuni cicli, ma in generale non tutti, sono anche bordi.

Un ciclo k-dimensionale $c \in Z_k(\mathcal{U})$ si dice bordo se esiste un dominio $(k+1)$-dimensionale $\Omega \subset \mathcal{U}$ di cui c è il bordo, cioè tale che

$$\partial\Omega = c.$$

L'insieme dei bordi k-dimensionali si denota con $B_k(\mathcal{U}) \subset Z_k(\mathcal{U})$.

Ad esempio, indichiamo con c la circonferenza centrata nell'origine e di raggio unitario, percorsa nel senso antiorario. Essa è un ciclo unidimensionale sia nel piano $\mathbb{R}^2$ che nel piano bucato $\mathbb{R}^2_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$.

La circonferenza c è un bordo in $\mathbb{R}^2$ perché esiste un dominio bidimensionale Ω (il disco centrato nell'origine e di raggio 1) incluso in $\mathbb{R}^2$ e tale che $\partial\Omega = c$, dunque

$$c \in B_1(\mathbb{R}^2).$$

La stessa circonferenza c, invece, non è un bordo in $\mathbb{R}^2_0$ perché il disco Ω non è incluso in $\mathbb{R}^2_0$, dunque

$$c \notin B_1(\mathbb{R}^2_0).$$

Poiché il bordo $\partial\Omega$ di un dominio qualunque Ω ha a sua volta bordo vuoto, tutti i bordi sono cicli.

L'esempio appena visto mostra che, in generale, non tutti i cicli sono bordi, ed è proprio questa la proprietà che in omologia si usa per studiare la forma di $\mathcal{U}$.

BORDI 0-DIMENSIONALI

Consideriamo una curva orientata $\gamma \subset \mathcal{U}$, e indichiamo con P il suo primo estremo, e con Q il secondo estremo.

Allora il bordo di γ è costituito dai due punti suddetti, o meglio, dal punto Q e dal punto P orientato al contrario:

$$\partial\gamma = Q - P.$$

In generale, un elemento di $B_0(\mathcal{U})$ ha la seguente espressione:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i\,(Q_i - P_i),$$

dove per ciascun valore di $i = 1, \ldots, n$ i due punti P_i e Q_i appartengono ad una stessa componente connessa di $\mathcal{U}$, e z_i è un coefficiente intero (o reale).

Per fare un esempio, si consideri l'aperto $\mathcal{U} = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \neq 1 \}$. In questo caso risulta

$$(1/2,\ 0) - (0,0) \in B_0(\mathcal{U})$$

come pure

$$(3,0) - (2,0) \in B_0(\mathcal{U})$$

mentre invece il ciclo 0-dimensionale

$$(2,0) - (0,0)$$

non è un bordo di $\mathcal{U}$ perché i punti $P = (0,0)$ e $Q = (2,0)$ non possono essere collegati con una curva inclusa in $\mathcal{U}$.

Si rammenti che il bordo di una figura 0-dimensionale (un numero finito di punti) è sempre l'insieme vuoto.

GRUPPI DI OMOLOGIA

Il gruppo di omologia $H_k(\mathcal{U})$ si ottiene estrapolando la struttura del gruppo dei cicli $Z_k(\mathcal{U})$.

Più precisamente, tutti i cicli di $Z_k(\mathcal{U})$ che sono anche bordi si assimilano fra loro e si rappresentano con l'elemento nullo di $H_k(\mathcal{U})$.

Poi, per ogni eventuale ciclo $c \in Z_k(\mathcal{U})$ che non sia un bordo, si assimilano ad esso i cicli omologhi.

Due cicli $c, c' \in Z_k(\mathcal{U})$ si dicono omologhi se e solo se il ciclo $c - c'$ (la somma di c con il ciclo c' orientato al contrario) è un bordo.

Ad esempio, siano c e c' le circonferenze centrate nell'origine e di raggi rispettivamente 1 e $1/2$, percorse nel senso antiorario.

La differenza $c - c'$ è il bordo orientato della corona circolare $\Omega \subset \mathbb{R}^2_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$.

Pertanto c e c' appartengono alla stessa classe di omologia del piano bucato $\mathbb{R}^2_0$, e rappresentano lo stesso elemento del gruppo $H_1(\mathbb{R}^2_0)$.

I NUMERI DI BETTI

Nella definizione dei gruppi di omologia H_n è possibile prendere i coefficienti nel campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ anziché nel gruppo dei numeri interi $\mathbb{Z}$.

In tal caso, l'omologia del piano con n buchi è

$$\mathbb{R},\ \mathbb{R}^n,\ \{0\},\ \ldots$$

Quello che conta è solo la successione delle dimensioni di tali spazi, che è in ogni caso $1, n, 0, \ldots$

Si definisce i-esimo numero di Betti b_i dell'aperto $\mathcal{U}$ la dimensione di $H_i(\mathcal{U})$, in onore del matematico Enrico Betti.

Esempio: se $\mathcal{U}$ è il piano con n buchi, si ha $b_0 = 1$, $b_1 = n$, e tutti gli altri numeri di Betti sono nulli.

In particolare, ponendo $n = 0$ si ottengono i numeri di Betti del piano $\mathbb{R}^2$: $1, 0, 0, \ldots$

In generale, b_0 è il numero delle componenti connesse di $\mathcal{U}$.

Se poi $\mathcal{U}$ è un aperto del piano, allora b_1 è il numero di buchi, e $b_i = 0$ per ogni $i \geq 2$.

Se, invece, $\mathcal{U}$ è un aperto tridimensionale, allora si deve distinguere tra cavità (contate da b_2) e tunnel (contati da b_1). Risulta $b_i = 0$ per ogni $i \geq 3$.

La coomologia di de Rham

Coomologia algebrica

Il gruppo di coomologia algebrica $(H_k(\mathcal{U}))^*$ è costituito dalle applicazioni lineari $L\colon H_k(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ il cui dominio è il gruppo di omologia $H_k(\mathcal{U})$.

Si dice che il gruppo di coomologia $(H_k(\mathcal{U}))^*$ è il duale di $H_k(\mathcal{U})$. L'esponente * si usa, in generale, per denotare il duale di uno spazio dato.

Relazione tra omologia e coomologia algebrica

È noto che se il k-esimo numero di Betti b_k è finito, cioè se il gruppo di omologia $H_k(\mathcal{U})$ ha rango finito (dimensione finita), i gruppi $H_k(\mathcal{U})$ e $(H_k(\mathcal{U}))^*$ sono isomorfi.

Inoltre si possono costruire delle figure $\mathcal{U}$ per le quali un certo numero di Betti b_k è infinito, e i gruppi $H_k(\mathcal{U})$ e $(H_k(\mathcal{U}))^*$ hanno una diversa struttura.

Uno di questi esempi è dato dal piano $\mathbb{R}^2$ nel quale si pratichino infiniti buchi: vedere a pag. 39.

Il teorema di de Rham (1/2)

In questa sede ci concentriamo sulla coomologia di de Rham, cioè sull'uso delle forme differenziali chiuse, al posto dei cicli, per rilevare la forma di un aperto $\mathcal{U}$ dello spazio $\mathbb{R}^N$.

A tale uso delle forme differenziali si deve presumibilmente attribuire la denominazione di forme "chiuse" per quelle forme ω tali che $d\omega = 0$.

Secondo [21, pag. 79], la coomologia differenziale è stata introdotta da Cartan (1928-29) e de Rham (1929-31).

Georges de Rham

Il teorema di de Rham asserisce che i gruppi di coomologia di de Rham, indicati con $H^k(\mathcal{U})$, sono isomorfi ai gruppi di coomologia algebrica $(H_k(\mathcal{U}))^*$. Più precisamente, ogni $L\colon H_k(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ si può rappresentare come

$$L(c) = \int_c \omega \qquad (20)$$

prendendo una forma chiusa ω opportuna.

FORME CHIUSE CHE NON SONO ESATTE

Sappiamo che una qualunque 1-forma chiusa ω, avente per dominio un aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso, è esatta.

Se, invece, l'aperto $\mathcal{U}$ non è semplicemente connesso, esistono 1-forme chiuse in $\mathcal{U}$ che non sono esatte.

L'esempio più semplice è dato dal piano bucato $\mathbb{R}^2_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0,0)\,\}$ con la forma ω_1 data da

$$\omega_1 = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}. \tag{21}$$

Questa forma è chiusa: lo si vede applicando la definizione.

Inoltre, indicata con γ_1 la circonferenza unitaria centrata nell'origine, percorsa nel verso antiorario, si trova

$$\int_{\gamma_1} \omega_1 = 2\pi,$$

dunque la forma ω_1 non è esatta: non esiste, cioè, alcuna funzione regolare $f(x, y)$ tale che $df = \omega$ in $\mathbb{R}^2_0$.

Altrimenti l'integrale di linea della forma ω si potrebbe scrivere come $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$, essendo (x_0, y_0) e (x_1, y_1) gli estremi della linea.

Ma siccome γ_1 è una linea chiusa, risulta $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$. Quindi l'integrale di ω, se fosse una forma esatta, sarebbe nullo.

La forma ω_1 è, sostanzialmente, l'unica forma chiusa non esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0,0)\,\}$, nel senso precisato dal seguente

Teorema. Ogni forma chiusa ω del piano bucato si può scrivere come

$$\omega = \frac{L_\omega(\gamma_1)}{2\pi}\,\omega_1 + \psi$$

prendendo una forma esatta ψ opportuna.

Dimostrazione. Indicata con ω una qualunque forma chiusa in $\mathbb{R}^2_0$, consideriamo l'integrale

$$L_\omega(\gamma_1) = \int_{\gamma_1} \omega,$$

dove γ_1 è la circonferenza unitaria centrata nell'origine, percorsa in senso antiorario. Allora la forma ψ data da

$$\psi = \omega - \frac{L_\omega(\gamma_1)}{2\pi}\,\omega_1$$

ha integrale nullo lungo qualunque curva chiusa $\gamma \subset \mathbb{R}^2_0$, dunque è esatta.

Infatti la forma ψ è il differenziale della funzione $f(x, y)$ definita ponendo

$$f(x, y) = \int_\gamma \left(\omega - \frac{L_\omega(\gamma_1)}{2\pi}\,\omega_1 \right)$$

dove γ è una qualunque curva inclusa in $\mathbb{R}^2_0$ ed avente primo estremo in un punto fissato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_0$ e secondo estremo nel punto variabile (x, y).

LA COOMOLOGIA DI DE RHAM DEL PIANO BUCATO

Il teorema precedente consente di trovare il gruppo di coomologia $H^1(\mathbb{R}^2_0)$ del piano bucato $\mathbb{R}^2_0$.

Infatti $H^1(\mathbb{R}^2_0)$ è uno spazio quoziente in cui due forme si considerano equivalenti se differiscono per una forma esatta.

Il generico elemento di $H^1(\mathbb{R}^2_0)$ si rappresenta con $\lambda\,\omega_1$, intendendo che l'elemento nullo rappresenta tutte le 1-forme esatte, mentre il prodotto $\lambda\,\omega_1$ con $\lambda \neq 0$ rappresenta tutte le forme chiuse ω tali che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 2\pi\,\lambda.$$

Dunque $H^1(\mathbb{R}^2_0)$ ha la stessa struttura dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Gli altri spazi di coomologia di de Rham del piano bucato, che si indicano con $H^k(\mathbb{R}^2_0)$ per $k \neq 1$, sono tutti banali, cioè isomorfi allo spazio $\{\,0\,\}$.

La definizione generale dei gruppi di coomologia di de Rham $H^k(\mathcal{U})$ è richiamata a pag. 38.

COCICLI

Le k-forme chiuse aventi per dominio un dato aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ si dicono cocicli.

Il termine è dovuto all'analogia con i cicli, ed al fatto che le forme agiscono sui cicli mediante integrazione, come precisato dal teorema di de Rham.

L'insieme delle k-forme chiuse aventi per dominio l'aperto $\mathcal{U}$ si indica con $Z^k(\mathcal{U})$.

Una 0-forma, cioè una funzione f, è un cociclo se e solo se $df = 0$, dunque se e solo se f è costante su ciascuna componente connessa di $\mathcal{U}$.

OPERAZIONI SUI COCICLI

È facile definire l'opposto $-\omega$ di un cociclo ω: basta cambiare di segno tutte le componenti di ω.

Similmente, la somma di due cocicli $\omega_1, \omega_2 \in Z^k(\mathcal{U})$ si ottiene sommandone termine a termine le componenti.

Il cociclo nullo in $Z^k(\mathcal{U})$ è la k-forma le cui componenti sono identicamente nulle.

COBORDI

Ancora per analogia con il caso dei bordi, si chiama cobordo una $(k+1)$ forma $\omega \in Z^{k+1}(\mathcal{U})$ esatta, cioè tale che esista una k-forma ψ soddisfacente $d\psi = \omega$.

L'insieme dei cobordi $\omega \in Z^{k+1}(\mathcal{U})$ si denota con $B^{k+1}(\mathcal{U})$.

Si conviene che l'unico cobordo in $Z^0(\mathcal{U})$, cioè fra le funzioni, sia la funzione identicamente nulla. Risulta dunque $B^0(\mathcal{U}) = \{\, 0 \,\}$.

Gruppi di coomologia di de Rham

Il gruppo di coomologia di de Rham $H^k(\mathcal{U})$ si ottiene dal gruppo dei cocicli $Z^k(\mathcal{U})$ procedendo come segue.

Innanzitutto, tutti i cocicli di $Z^k(\mathcal{U})$ che sono anche cobordi si assimilano fra loro e si rappresentano con l'elemento nullo di $H^k(\mathcal{U})$.

Poi, per ogni eventuale cociclo $\omega \in Z^k(\mathcal{U})$ che non sia un cobordo, si assimilano ad esso i cocicli coomologhi.

Due cocicli $\omega, \omega' \in Z^k(\mathcal{U})$ si dicono coomologhi se e solo se la differenza $\omega - \omega'$ è un cobordo (una forma esatta).

Ad esempio, sia $\omega_1 \in Z^1(\mathbb{R}^2_0)$ il cociclo definito nella (21).

Sommando ad ω_1 una qualunque 1-forma esatta ψ si ottiene il cociclo $\omega = \omega_1 + \psi$ coomologo ad ω_1.

Tutti i cocicli ω ottenuti in questo modo costituiscono la classe di coomologia di ω_1, e rappresentano lo stesso elemento del gruppo $H^1(\mathbb{R}^2_0)$.

Il teorema di de Rham (2/2)

Fissata una k-forma differenziale ω in un aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$, resta individuata la funzione $L_\omega \colon H_k(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ data da

$$L_\omega(c) = \int_c \omega.$$

In pratica, si vede l'operazione di integrazione come una funzione in cui la variabile indipendente è il dominio di integrazione

$$c \in H_k(\mathcal{U}).$$

La suddetta condizione significa che in questa teoria si considerano solo domini di integrazione k-dimensionali col bordo vuoto, cioè soddisfacenti la condizione $\partial c = \emptyset$.

Per effetto delle note proprietà di additività e di linearità dell'integrale, la funzione L_ω risulta essere un'applicazione lineare: ebbene, il teorema di de Rham assicura che non ce ne sono altre.

In altri termini, il teorema di de Rham asserisce che ogni applicazione lineare $L \colon H_k(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ si ottiene integrando un'opportuna k-forma ω sul dominio variabile c.

Ma c'è di più: l'applicazione L_ω è identicamente nulla se e solo se la forma ω è esatta.

Dunque l'elemento nullo dello spazio $(H_k(\mathcal{U}))^*$ di tutte le applicazioni lineari $L \colon H_k(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ corrisponde all'elemento nullo dello spazio $H^k(\mathcal{U})$, e cioè alle forme esatte.

CONTROESEMPI

Come accennato a pag. 34, costruiamo ora un esempio in cui il gruppo di omologia $H_1(\mathcal{U})$ ha rango infinito (dimensione infinita) e non è isomorfo al suo duale $(H_1(\mathcal{U}))^* \equiv H^1(\mathcal{U})$. Poniamo

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{ (i, 0) \}.$$

In questo caso il gruppo $H_1(\mathcal{U})$ è generato dalle circonferenze γ_i centrate nei punti $(i, 0)$ e di raggio $1/2$, percorse nel senso antiorario.

Infatti qualunque curva chiusa $\gamma \subset \mathcal{U}$ si avvolge un certo numero di volte (eventualmente zero volte) intorno ad un numero finito dei suddetti punti, dunque possiamo scrivere

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} z_i \, \gamma_i.$$

Alla circonferenza γ_i resta associata la forma ω_i data da

$$\omega_i = \frac{-y \, dx + (x - i) \, dy}{(x - i)^2 + y^2}.$$

Tuttavia le forme ω_i non bastano a generare il gruppo di coomologia di de Rham $H^1(\mathcal{U})$: infatti la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\omega_i}{i},$$

che è chiusa e non è esatta, non è una combinazione lineare (finita) delle forme ω_i.

Un altro esempio si ottiene ponendo

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}^2_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{ (1/i, \, 0) \},$$

dove $\mathbb{R}^2_0$ denota il piano bucato $\mathbb{R}^2_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \}$.

In questo caso il gruppo $H_1(\mathcal{U})$ è generato dalla circonferenza γ_0 centrata nell'origine e di raggio 2 insieme alle circonferenze γ_i centrate nei punti $(1/i, \, 0)$ e di raggio $r_i = 1/(3i^2)$, percorse nel senso antiorario.

Alla circonferenza γ_i resta associata la forma ω_i data da

$$\omega_i = \frac{-y \, dx + (x - x_i) \, dy}{(x - x_i)^2 + y^2},$$

dove x_i è l'ascissa del centro di γ_i. Tali forme non bastano a generare il gruppo di coomologia di de Rham $H^1(\mathcal{U})$: infatti la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\omega_i}{i^2},$$

che è chiusa e non è esatta, non è una combinazione lineare (finita) delle forme ω_i.

In parole povere, la forma ω non corrisponde a nessuna curva chiusa γ perché non esiste una curva che giri intorno a tutti i punti $(1/i, \, 0)$ ma non intorno all'origine.

Caratterizzazione delle forme esatte

Teorema. È sempre nullo l'integrale di una k-forma esatta ω su di un dominio k-dimensionale c senza bordo.

Infatti l'integrale di una funzione f sul dominio 0-dimensionale

$$c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, P_i,$$

con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $P_i \in \mathcal{U}$, è dato da

$$\int_c f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, f(P_i).$$

Ma siccome l'unica 0-forma esatta è la funzione identicamente nulla, si ha

$$\int_c f = 0.$$

Per completare la dimostrazione, consideriamo ora una $(k+1)$-forma esatta ω, che vogliamo integrare su di un dominio $(k+1)$-dimensionale c senza bordo, cioè soddisfacente la condizione $\partial c = \emptyset$.

A titolo di esempio possiamo prendere $k = 0$ e pensare ad un campo vettoriale conservativo $\boldsymbol{F}$, da integrare su di una curva chiusa c.

Siccome la $(k+1)$-forma ω è esatta, per definizione esiste una k-forma ψ tale che $d\psi = \omega$, perciò possiamo scrivere

$$\int_c \omega = \int_c d\psi.$$

Ma allora, per il teorema di Stokes (2) applicato alla forma ψ, risulta

$$\int_c \omega = \int_{\partial c} \psi.$$

Ricordando che $\partial c = \emptyset$, si conclude che

$$\int_c \omega = 0,$$

come volevasi dimostrare.

Come caso particolare, l'integrale di linea di seconda specie di un qualunque campo conservativo, esteso ad una qualunque curva chiusa, è nullo.

Vale il viceversa: se l'integrale una data k-forma chiusa ω su ciascun dominio di integrazione k-dimensionale c, senza bordo, risulta sempre nullo, allora la forma ω è esatta.

Infatti, se risulta

$$\int_c \omega = 0$$

per ogni $c \in H_k(\mathcal{U})$, vuol dire che l'applicazione lineare L_ω associata alla forma ω è l'elemento nullo dello spazio $(H_k(\mathcal{U}))^*$ delle applicazioni lineari $L\colon H_k(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$.

Per il teorema di de Rham, lo spazio $(H_k(\mathcal{U}))^*$ è isomorfo a $H^k(\mathcal{U})$, quindi gli elementi nulli dei due spazi si corrispondono fra loro.

Ne segue che la forma ω deve essere l'elemento nullo di $H^k(\mathcal{U})$, cioè dev'essere una forma esatta.

ESATTEZZA DI UNA FORMA CHIUSA TRAMITE L'OMOLOGIA DEL DOMINIO

Un'altra notevole conseguenza del teorema di de Rham è la seguente.

Consideriamo un aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ il cui k-esimo gruppo di coomologia sia il gruppo banale $\{0\}$.

Allora anche il duale $(H_k(\mathcal{U}))^*$ è il gruppo banale $\{0\}$.

Per il teorema di de Rham sussiste un isomorfismo tra il gruppo di coomologia algebrica $(H_k(\mathcal{U}))^*$ e il gruppo di coomologia di de Rham $H^k(\mathcal{U})$, dunque anche quest'ultimo è il gruppo banale.

Ciò significa che tutti i cocicli di $Z^k(\mathcal{U})$ (le k-forme chiuse) sono cobordi (sono esatte).

Nel caso particolare $k = 1$ si ha che ogni 1-forma chiusa in un aperto $\mathcal{U}$ semplicemente connesso è esatta.

Equivalentemente: ogni campo vettoriale irrotazionale in un aperto $\mathcal{U}$ semplicemente connesso è conservativo.

Nel caso particolare $k = 2$ si ha che ogni campo vettoriale solenoidale in un aperto $\mathcal{U}$ fortemente connesso ammette un potenziale vettore.

GLI ERRORI DEL PRINCIPIANTE

Errore n. 1. L'errore più comune è quello di credere che tutti i campi vettoriali irrotazionali siano conservativi.

Per capire che si tratta di un errore basta vedere anche un solo campo irrotazionale non conservativo, come ad esempio

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \frac{-y\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + x\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{x^2+y^2}.$$

Che questo campo non sia conservativo lo si capisce calcolandone l'integrale di linea di seconda specie lungo una qualunque circonferenza del piano xy centrata nell'origine: il risultato non è zero.

Errore n. 2. Dello stesso genere è l'errore di credere che tutti i campi solenoidali ammettano potenziale vettore.

Un esempio di campo vettoriale solenoidale che non ammette potenziale vettore è

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\hat{\boldsymbol{k}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

A tale proposito si veda [18, esempio 3.6, pag. 505].

Una volta messi in guardia circa i due errori suddetti, e resi edotti della condizione sufficiente illustrata a pag. 41, taluni cadono nell'errore n. 3 descritto qui di seguito.

Errore n. 3. Presumere che se il dominio di un campo irrotazionale non è semplicemente connesso, allora tale campo non possa essere conservativo.

Per capire che si tratta di un errore basta vedere anche un solo campo (irrotazionale e) conservativo il cui dominio non sia semplicemente connesso, come ad esempio il campo

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \frac{x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

UN PROCEDIMENTO MECCANICO

Per stabilire se un dato campo vettoriale $\boldsymbol{F}$ è conservativo o no, si può procedere come segue.

1. Calcolare il rotore del campo dato e vedere se risulta $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ in tutto il dominio di $\boldsymbol{F}$.

Se, in qualche punto, si trova $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} \neq \mathbf{0}$, si può concludere che il campo dato non è conservativo.

Se, invece, risulta $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ in tutto il dominio di $\boldsymbol{F}$, allora bisogna andare avanti.

2. Guardare se il dominio del campo è semplicemente connesso. Se lo è, allora il campo $\boldsymbol{F}$ soddisfacente $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ in tutto il dominio è anche conservativo.

3. Se, infine, il campo dato è irrotazionale, ed il suo dominio non è semplicemente connesso, questo procedimento meccanico non può dare la risposta.

In questo caso si dovrà procedere ad uno studio specifico, il cui successo non è garantito: *Siamo soli* (Vasco Rossi).

Appendice

La teoria dell'estensione lineare

un

nuovo ramo della matematica

esposto e commentato

tramite applicazioni agli altri rami della matematica

come pure

alla statica, alla meccanica, alla teoria del magnetismo

e alla cristallonomia

da

Hermann Grassmann

insegnante dell'istituto Federico Guglielmo a Stettino

Con 1 figura

Lipsia, 1844

Editore Otto Wigand

Prefazione

[omissis] Il primo impulso me lo diede la considerazione del negativo in geometria; mi abituai a considerare i segmenti AB e BA come grandezze opposte; da ciò deducendo che quando A, B, C sono punti di una stessa retta deve aversi $AB + BC = AC$ sia quando AB e BC sono concordemente denotati, sia quando sono denotati discordemente, cioè quando C sta tra A e B. In quest'ultimo caso AB e BC sono intesi non come semplici lunghezze, ma vi si abbina la loro direzione, rispetto alla quale essi sono opposti. Così si impose la differenza fra la somma delle lunghezze e la somma di tali segmenti, nei quali si tiene conto della direzione. Da qui discese la necessità di precisare il concetto di somma non solo nel caso in cui i segmenti hanno orientazione uguale o opposta, ma anche in ogni altro caso. Ciò si poté realizzare in un modo semplicissimo, ponendo che si abbia $AB + BC = AC$ anche quando A, B, C non giacciono sulla stessa retta. Con ciò era compiuto il primo passo che avrebbe in seguito condotto al nuovo ramo della matematica descritto nella presente opera. Ma non immaginavo assolutamente a quale ricco e fruttuoso campo fossi arrivato; anzi questi risultati mi sembravano poco interessanti, finché non li ho combinati con un'altra idea modificata. Più precisamente, mentre studiavo il concetto di prodotto in geometria, così come veniva inteso da mio padre*, mi venne in mente che non solo il rettangolo, ma anche il parallelogramma si doveva intendere come il prodotto di due lati consecutivi, a patto che ancora una volta si tenesse conto non del prodotto delle lunghezze, ma dei due segmenti tenendo conto delle loro direzioni. Se ora metto in combinazione questo concetto di prodotto con quello di somma descritto in precedenza, ne consegue la più evidente armonia [omissis]

* Vedasi la *Teoria dello spazio,* vol. II, pag. 194, di J. G. Grassmann e *Trigonometria,* pag. 10 del medesimo.

SU

CERTE ESPRESSIONI DIFFERENZIALI

ED IL

PROBLEMA DI PFAFF

Del sig. Élie Cartan

[omissis] Il presente lavoro costituisce un'esposizione del problema di Pfaff fondata sulla considerazione di certe espressioni differenziali simboliche, intere ed omogenee rispetto ai differenziali di n variabili, i coefficienti essendo funzioni qualunque di tali variabili. Tali espressioni possono essere assoggettate alle consuete regole del calcolo, a condizione di non cambiare l'ordine dei differenziali in un prodotto. Il calcolo di tali quantità è, in definitiva, quello delle espressioni differenziali che si mettono sotto il segno di integrale multiplo. Tale calcolo presenta inoltre numerose analogie con il calcolo di Grassmann; esso è peraltro identico al calcolo geometrico di cui si serve il sig. Burali-Forti in un recente Libro.

È chiaro che, se si effettua un cambiamento di variabile, un'espressione differenziale di grado p si trasforma in un'espressione differenziale di grado p rispetto ai nuovi differenziali. Nel caso di un'espressione di Pfaff, che è di primo grado*, le si può associare un'altra espressione differenziale di secondo grado, che è un covariante rispetto ai cambiamenti di variabile e che non è altro che il covariante bilineare di Frobenius e del sig. Darboux; io lo chiamo la *derivata* dell'espressione di Pfaff. Ma, grazie alla nozione delle espressioni differenziali simboliche, *tale covariante è il primo termine di una successione di covarianti simbolici del terzo, quarto, ..., grado, che si deducono intuitivamente dall'espressione di Pfaff e dalla sua derivata tramite moltiplicazioni;* esse costituiscono le derivate terza, quarta, ... dell'espressione di Pfaff, essendo la derivata p-esima di grado $p + 1$. [omissis]

---

* È una 1-forma (N.d.T.)

Bibliografia

[1] L. Amerio. Analisi matematica con elementi di analisi funzionale. UTET, 1982.

[2] V. Barutello, M. Conti, D. L. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini. Analisi matematica con elementi di geometria e calcolo vettoriale, vol. 2. Apogeo/Maggioli, 2008.

[3] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa. Analisi Matematica 1. Zanichelli, 2009.

[4] S. Buoncristiano, F. Mercuri, A. Rigas. Differential forms and their integrals. Dispensa.

[5] E. Cartan. *Sur certaines expressions différentielles et le probleme de Pfaff.* Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome **16** (1899), 239–332.

[6] R. Courant. Differential and integral calculus. Interscience, 1937.

[7] M. P. do Carmo. Differential forms and applications. Springer-Verlag, 1994.

[8] H. Federer. Geometric measure theory. Springer-Verlag, 1969. Vedasi in particolare il capitolo 1: *Grassmann algebra.*

[9] W. Fleming. Functions of several variables, 2nd edition. Springer-Verlag, 1977.

[10] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone. Analisi matematica due. Liguori, 1996. Vedasi in particolare il capitolo 12: *Superfici in* $\mathbb{R}^n$ *e* k*-forme.*

[11] H. G. Grassmann. Die lineale Ausdehnungslehre. Verlag von Otto Wigand, 1844.

[12] V. J. Katz. *The history of Stokes' theorem.* Mathematics Magazine **52**(3) (1979), 146–156.

[13] M. Kline. Storia del pensiero matematico. Einaudi.

[14] S. Lang. Introduction to differentiable manifolds, 2nd edition. Springer-Verlag, 2002.

[15] W. Maraschini, M. Palma (a cura di). Matematica. Garzanti, 2014

[16] J. J. O'Connor, E. F. Robertson. Élie Joseph Cartan. MacTutor History of Mathematics, 2014.

[17] J. J. O'Connor, E. F. Robertson. Hermann Günter Grassmann. MacTutor History of Mathematics, 2005.

[18] C. D. Pagani, S. Salsa. Analisi matematica, vol. 2. Masson/Zanichelli, 1998.

[19] P. Pankka. Introduction to de Rham cohomology. 2013.

[20] M. Pérez. The de Rham's theorem. Short note, 2010.

[21] G. de Rham. Differentiable manifolds. Forms, currents, harmonic forms. Springer-Verlag 1984.

[22] G. de Rham. Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, 1931.

[23] I. M. Singer, J. A. Thorpe. Lezioni di topologia elementare e di geometria. Boringhieri, 1980.

[24] W. Rudin. Principi di analisi matematica. McGraw-Hill, 1953.

[25] A. Weil. Formes différentielles extérieures. Séminaire des mathématiques (1936-1937), exposé 4-A.

[26] H. Whitney. Geometric integration theory. Princeton University Press, 1957.