Esercizio 1

a) v_1, v_2 lin. indip. $\Rightarrow$ $\{v_1, v_2\}$ base di U $\Rightarrow$ $\dim U = 2$

v_3, v_4 lin. indip. $\Rightarrow$ $\{v_3, v_4\}$ base di V $\Rightarrow$ $\dim V = 2$

Dalla teoria generale abbiamo che

$$U + V = L(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

Si noti che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{I RIGA} \to \text{I}-\text{III}}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3, v_4 sono lin. dipendenti.

Poiché v_1, v_2 sono lin. indip. e $v_3 \notin L(v_1, v_2)$ $\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 sono lin. indip. e costituiscono base di $U+V$. $\Rightarrow$ $\dim(U+V) = 3$.

Dalla formula di Grassmann abbiamo che $\dim(U \cap V) = 1$.

Si noti che

$$v_4 = v_1 - v_2 + v_3$$

da cui

$$\underset{\substack{\parallel \\ (1,0,0,-1)}}{v_1 - v_2} = v_4 - v_3$$

e quindi $(1,0,0,-1) \in U \cap V$ costituisce base di $U \cap V$.

b) Basta scegliere $W = L(w)$ con $w \notin U+V$

Per trovare w possiamo provare con ciascuno dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Iniziamo con $e_1 = (1,0,0,0)$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ prendiamo $W = L(1,0,0,0)$. A quel punto avremo

$$(U+V)+W = L(v_1, v_2, v_3, e_1) \underset{\text{lin. indip.}}{=} \mathbb{R}^4$$

e inoltre $W \cap (U+V) = \{(0,0,0,0)\}$

poiché $e_1 \notin U+V = L(v_1, v_2, v_3)$.

ESERCIZIO 2

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & \boxed{0 \quad -1} & 0 \\ 2 & k-1 \quad 1 & k-1 \\ k+1 & \boxed{1 \quad 0} & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ abbiamo che $\rho(A) \geq 2$.

Considero i suoi orlati.

$$\det \begin{pmatrix} k-1 & 0 & -1 \\ 2 & k-1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{I RIGA} \to \text{I}+\text{II}}{=} \det \begin{pmatrix} k+1 & k-1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} k+1 & k-1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -(k+1-(k+1)(k-1)) = (k+1)(k-1-1)$$

$$= (k+1)(k-2)$$

Si noti che l'altro orlato ha $\det = 0$ perché vi sono 2 colonne uguali.

Quindi se $k \neq -1$ e $k \neq 2$ $\rho(A) = 3 = \rho(A|B) \Longrightarrow$ sistema compatibile e ammette ∞^1 soluzioni. Troviamole.

Il sistema è equivalente a

$$x_4 = t$$

$$\begin{cases} (k-1)x_1 - x_3 = k-1 \\ 2x_1 + (k-1)x_2 + x_3 = -(k-1)t \\ (k+1)x_1 + x_2 = -t+1 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di Cramer con soluzione $(0, 1-t, 1-k)$:

$$x_1 = \frac{1}{(k+1)(k-2)} \det\begin{pmatrix} k-1 & 0 & -1 \\ 0 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{k-1-(k-1)}{(k+1)(k-2)} = 0$$

$$x_3 = 1-k$$

$$x_2 = 1-t$$

Per $k=-1$ $\rho(A)=2$. Controlliamo $\rho(A|B)$. In questo caso

$$A|B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2-2=0 \Rightarrow \rho(A) = 2 = \rho(A|B) \Rightarrow$$

sistema compatibile con ∞^2 soluzioni. Risolviamolo. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x_3 = 2s-2 \\ x_2 = -t+1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = s \\ x_4 = t \end{matrix}$$

L'insieme delle soluzioni è dunque

$$\{(s, 1-t, 2-2s, t) : s,t \in \mathbb{R}\}$$

Per $k=2$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0 \quad -1} & 0 & 1 \\ 2 & 1 \quad 1 & 1 & 0 \\ 3 & \boxed{1 \quad 0} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$ dato che l'ultima riga è la somma delle prime due

$\Rightarrow \rho(A|B) = 2 = \rho(A) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x_3 = 1 - s \\ x_2 = 1 - 3s + t \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = s \\ x_4 = t \end{matrix}$$

L'insieme delle soluzioni è $\{(s, 1-3s+t, 1-s, t) : s,t \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 3

a) $$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}h & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & h\\ h & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta h & \beta+\gamma h\\ \beta+\gamma h & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases}\alpha+h\beta = 0\\ \beta+h\gamma = 0\\ \gamma = 0\end{cases}$$

Tale sistema lineare omogeneo ammette come unica soluzione quella nulla se e solo se

$$\det\begin{pmatrix}1 & h & 0\\ 0 & 1 & h\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\neq 0.$$

Effettivamente $\det = 1 \neq 0$.

Troviamo $M_{BB}(f)$ dove $B=\left\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}h & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}0 & h\\ h & 1\end{pmatrix}}\right\}$

$$f(v_1)=f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2h & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=2h\,v_1$$

$$f(v_2)=f\begin{pmatrix}h & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2h-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}= \alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}h & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+\gamma\begin{pmatrix}0 & h\\ h & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta h & \beta+\gamma h\\ \beta+\gamma h & \gamma\end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta h = 2h-1\\ \beta+\gamma h = 1\\ \gamma = 0\end{cases} \qquad \beta = 1 \qquad \alpha = 2h-1-h = h-1$$

$$\Rightarrow f(v_2) = (h-1)\,v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v_3$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2h+1 \\ 2h+1 & 2 \end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{pmatrix} \alpha+\beta h & \beta+\gamma h \\ \beta+\gamma h & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta h = 1 \\ \beta+\gamma h = 2h+1 \\ \gamma = 2 \end{cases} \qquad \beta = 2h+1-2h = 1 \qquad \alpha = 1-h$$

$$\Rightarrow f(v_3) = (1-h)\, v_1 + 1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3$$

Quindi $$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2h & h-1 & 1-h \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2h-\lambda & h-1 & 1-h \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2h-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

Abbiamo dunque i seguenti autovalori al variare di $h \in \mathbb{R}$:

h	AUTOVALORI	MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA	MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA
$h \neq 1$ e $h \neq \frac{1}{2}$	1	1	1
	2	1	1
	$2h$	1	1
$h = 1$	1	1	1
	2	2	?
$h = \frac{1}{2}$	1	2	?
	2	1	1

- Per $h \neq 1$ e $h \neq \frac{1}{2}$ f ha 3 autovalori reali e distinti e dunque è diagonalizzabile.

- Per $h=1$, f ha 2 autovalori: $\lambda=1$ con molteplicità algebrica 1 (e quindi anche molteplicità geometrica 1) e $\lambda=2$ con molteplicità algebrica 2. Ci resta da controllare la molteplicità geometrica.

$$m_g(2) \overset{h=1}{=} \rho\begin{pmatrix} 2\cdot 1-2 & 1-1 & 1-1 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix}$$

$$= \rho\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq m_a(2)$$

$\Rightarrow$ f NON è diagonalizzabile

- Per $h=\frac{1}{2}$, f ha 2 autovalori: $\lambda=1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda=2$ con molteplicità algebrica 1 (e quindi anche $m_g = 1$).

Ci resta da controllare

$$m_g(1) \overset{h=\frac{1}{2}}{=} \rho\begin{pmatrix} 2\cdot\frac{1}{2}-1 & \frac{1}{2}-1 & 1-\frac{1}{2} \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$= m_a(1) \Rightarrow f$ è diagonalizzabile.