Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

7 settembre 2022

Esercizio 1

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

$\mathbf{v}_1 = (1,2,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,2,0,2)$, $\mathbf{v}_3 = (0,0,1,0)$, $\mathbf{v}_4 = (1,0,1,-1)$

Siano $U = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $V = L(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.

a) Determinare la dimensione e una base di U, V, $U + V$, $U \cap V$

b) Trovare un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = (U + V) \oplus W$. Giustificare la risposta

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile e, in caso affermativo, trovare esplicitamente le soluzioni

$$\begin{cases} (k-1)x_1 - x_3 = k-1 \\ 2x_1 + (k-1)x_2 + x_3 + (k-1)x_4 = 0 \\ (k+1)x_1 + x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

Si consideri lo spazio vettoriale V delle matrici simmetriche di ordine 2 ad entrate reali.

a) Verificare che $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di V per ogni $h \in \mathbb{R}$ e, rispetto a questa base, scrivere la matrice associata all'endomorfismo $f: V \longrightarrow V$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2h+1 \\ 2h+1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali f è diagonalizzabile