



Matematica Discreta

Prova scritta del 05/07/2022

Nome :

Cognome :

Matricola :

Anno di Iscrizione :

Istruzioni

- Non è consentito l'utilizzo dei telefoni cellulari. Tenerli spenti durante tutta la durata della prova scritta
- Non è consentito l'utilizzo di appunti e dispense
- Non è consentito l'utilizzo della calcolatrice
- Giustificare le risposte date agli esercizi



Esercizio 1 (2 + 3 + 4 punti).

- a) Dire se la seguente proposizione logica è una contraddizione:

$$(Q \Rightarrow P) \wedge Q \Leftrightarrow (P \vee Q)$$

- b) Dato l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$ dire se

$$R = \{(d, d), (b, b), (a, b), (c, b), (a, a), (b, c), (c, c), (b, a)\}$$

è, o non è, una relazione di equivalenza su A .

- c) Dimostrare per induzione su n che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ vale

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$





Esercizio 2 (3 + 2 + 2 punti).

- a) Si trovino, se esistono, tutte le soluzioni $x \in \mathbb{Z}$ dell'equazione modulare

$$6x \equiv -14 \pmod{4}$$

- b) Determinare quante e quali sono le soluzioni $[x] \in \mathbb{Z}_4$ dell'equazione

$$[6][x] = [-14]$$

dove le classi $[6]$ e $[-14]$ sono elementi di \mathbb{Z}_4

- c) Si consideri la seguente permutazione di S_8

$$\sigma = (41865)(7542)(31684).$$

Determinare la decomposizione in cicli disgiunti e l'ordine di σ , dove l'ordine di una permutazione σ è il più piccolo numero naturale k tale per cui $\sigma^k = \text{Id}$.





Esercizio 3 (3 + 5 punti).

a) Dati i vettori

$$v = (1, 1, 3), \quad w = (k, 2, -5), \quad z = (2, k, 2), \quad k \in \mathbb{R}$$

- i) Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui v e w sono ortogonali;
- ii) Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui la terza componente del vettore $w \wedge (v + z)$ è pari a zero.

b) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice V di ordine 3 e una matrice diagonale D di ordine 3 tali per cui $A = VDV^{-1}$.





Esercizio 4 (2 + 4 punti). Fissata una base ortonormale B dello spazio si consideri la retta

$$r : \begin{cases} 2x - y + 4z = 3 \\ -x + 2y + kz = 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

- a) Determinare, se esistono, i valori di k per cui la retta r passa per il punto $P = (0, 1, 1)$;
- b) Fissato $k = 2$, trovare, se esiste, il piano τ che contiene la retta r ed è parallelo al piano $\pi : x + y + z = 3$

