Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

8 luglio 2022

Esercizio 1

Si considerino il sottospazio vettoriale W_1 di $\mathbb{R}^4$ dato dallo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

ed il sottospazio

$$W_2 = L\big((-1,1,k,1-k),(1+k,1,k,-1)\big)$$

dove k è un parametro reale.

a) Determinare tutti i valori del parametro reale k per i quali si ha $W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}^4$
b) Per $k = 0$, determinare una base di $W_1 + W_2$ e poi completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile e, in caso affermativo, trovare esplicitamente le soluzioni

$$\begin{cases} (k-1)x_1 - x_2 = k-1 \\ 2x_1 + (k-1)x_2 + x_3 + (k-1)x_4 = 0 \\ (k+1)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

Sia V il sottospazio vettoriale di $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ dato da

$$V = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Si consideri l'endomorfismo $f: V \longrightarrow V$ di V, la cui matrice associata rispetto alla base $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ di V è

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Stabilire se il vettore $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene a Im(f)
b) Stabilire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di V