LE SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 1 - 08/07/2022

ESERCIZIO 1

Troviamo una base di W_1.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \rho\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2s \\ x_2 = s - t \end{cases} \qquad \begin{matrix} s = x_3 \\ t = x_4 \end{matrix}$$

da cui $x_1 = x_2 - 2s = s - t - 2s = -s - t$.

Quindi
$$\begin{aligned} W_1 &= \{(-s-t, s-t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-s, s, s, 0) + (-t, -t, 0, t) : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(-1, 1, 1, 0) + t(-1, -1, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= L((-1, 1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)) \end{aligned}$$

a) $W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}^4 \iff W_1 + W_2 \subsetneq \mathbb{R}^4 \iff \dim(W_1 + W_2) < 4$

$$\iff \rho\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & k & 1-k \\ 1+k & 1 & k & -1 \end{pmatrix} < 4 \iff$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & k & 1-k \\ 1+k & 1 & k & -1 \end{pmatrix} = 0$$

Ebbene,

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & k & 1-k \\ 1+k & 1 & k & -1 \end{pmatrix} \overset{R_2 \to R_2 + R_4}{=} \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & k & 0 \\ -1 & 1 & k & 1-k \\ 1+k & 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (k-1)\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ k & 0 & k \\ 1+k & 1 & k \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ k & 0 & k \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$= (k-1)\det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-k \\ k & 0 & k \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$C_1 \to C_1 - C_3$ $\qquad$ $R_1 \to R_1 - R_3$

$$= k(1-k)\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 1-k \\ k & k \end{pmatrix}$$

$$= -3k(1-k) + k(1-k) = -4k(1-k)$$

Quindi $W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}^4 \iff k = 0 , k = 1$

b) Per $k=0$ una base di W_1 è $\mathcal{B}_1 = \{\overset{v_1}{(-1,1,1,0)}, \overset{v_2}{(-1,-1,0,1)}\}$

una base di W_2 è $\mathcal{B}_2 = \{\underset{w_1}{(-1,1,0,1)}, \underset{w_2}{(1,1,0,-1)}\}$

Dalla teoria generale sappiamo che $W_1 + W_2 = L(v_1, v_2, w_1, w_2)$.

$$= L(v_1, v_2, w_1)$$

$$w_2 = -v_2$$

Si tratta di vettori linearmente indipendenti (e quindi $\{v_1, v_2, w_1\}$ è base di $W_1 + W_2$) perché

$$\rho \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = 3$$

dato che $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$

Per completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$, basta aggiungere un qualunque vettore di $\mathbb{R}^4$ non in $W_1 + W_2$.

Ad esempio $\{v_1, v_2, w_1, e_4\}$ è base di $\mathbb{R}^4$ perché

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

già fatto prima

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} (k-1)x_1 - x_2 = k-1 \\ 2x_1 + (k-1)x_2 + x_3 + (k-1)x_4 = 0 \\ (k+1)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & k-1 & 1 & k-1 \\ k+1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} k-1 & -1 & 0 & 0 & k-1 \\ 2 & k-1 & 1 & k-1 & 0 \\ k+1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) \geq 2$ perché $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k-1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

Considero gli orlati di tale minore.

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ k-1 & 1 & k-1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -(k-1)\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = k-1$$

Quindi se $k \neq 1$ $\rho(A) = 3 = \rho(A|B) \Rightarrow$ sistema compatibile e ammette ∞^1 soluzioni.

Se $k=1$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A|B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Considero l'altro orlato: $\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \rho(A) = 2$

Considero orlato in $(A|B)$ ottenuto aggiungendo la colonna B:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(A|B) = 3.$$

Quindi per $k = 1$ il sistema è incompatibile.

Troviamo le soluzioni per $k \neq 1$.

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x_2 = k-1 - (k-1)s \\ (k-1)x_2 + x_3 + (k-1)x_4 = -2s \\ x_2 + x_3 = 1 - (k+1)s \end{cases} \qquad x_1 = s$$

da cui $x_2 = (k-1)s - (k-1)$

$$x_3 = 1 - (k+1)s - x_2 = 1 - (k+1)s - (k-1)s + (k-1)$$
$$= k - 2ks$$

$$x_4 = \frac{1}{k-1}\left(-2s - (k-1)x_2 - x_3\right)$$

$$= \frac{1}{k-1}\left(-2s - (k-1)^2 s + (k-1)^2 - k + 2ks\right)$$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \left\{\left(s, (k-1)s - (k-1), k - 2ks, \frac{1}{k-1}\left(-2s - (k-1)^2 s + (k-1)^2 - k + 2ks\right)\right) ; s \in \mathbb{R}\right\}$$

ESERCIZIO 3

Pongo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $Im(f) = L(f(v_1), f(v_2), f(v_3))$
$= L(2v_1 + v_2, v_2, v_2 + v_3)$

$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in Im(f) \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ Tali che

$v = \alpha(2v_1 + v_2) + \beta v_2 + \gamma(v_2 + v_3)$

$= 2\alpha \cdot v_1 + (\alpha + \beta + \gamma) v_2 + \gamma v_3 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha+\beta+\gamma \\ 0 & 0 & -\alpha-\beta-\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha & \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma & 0 & -\alpha-\beta-\gamma \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow -1 = 0 \text{ che è}$$

impossibile.

Quindi $v \notin Im(f)$

b) $P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2$

Ci sono dunque due autovalori: $\lambda_1 = 2$ con $m_a(\lambda_1) = 1$
$\lambda_2 = 1$ con $m_a(\lambda_2) = 2$

· Troviamo gli autospazi.

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1 \quad 1} \\ 0 & \boxed{0 \quad -1} \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 = -s \\ -x_3 = 0 \end{cases} \qquad x_1 = s$$

$\rho = 2$

da cui $\quad x_2 = s, \quad x_3 = 0$

Quindi
$$\begin{aligned} V(2) &= \{ s v_1 + s v_2 + 0 \cdot v_3 \ : \ s \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ s(v_1 + v_2) \ : \ s \in \mathbb{R} \} \\ &= L(v_1 + v_2) \\ &= L\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow m_g(2) = \dim V(2) = 1 \neq m_a(2) \Rightarrow f$ NON è diagonalizzabile