



# Matematica Discreta

## Prova scritta del 20/06/2022

Nome : .....

Cognome : .....

Matricola : .....

Anno di Iscrizione : .....

### Istruzioni

- Non è consentito l'utilizzo dei telefoni cellulari. Tenerli spenti durante tutta la durata della prova scritta
- Non è consentito l'utilizzo di appunti e dispense
- Non è consentito l'utilizzo della calcolatrice
- Giustificare le risposte date agli esercizi



**Esercizio 1.**

- a) Dire se la seguente proposizione logica è una tautologia

$$P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q).$$

- b) Data la funzione

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$
$$x \mapsto \frac{3x - 1}{2}$$

Dire se  $f$  è iniettiva, suriettiva e/o bigettiva e trovare l'eventuale inversa  $f^{-1}$ .  
Determinare  $f^{-1}(0)$ .

- c) Dimostrare per induzione su  $n$  che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$  vale

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$





**Esercizio 2.**

- a) Si trovino, se esistono, tutte le soluzioni  $x \in \mathbb{Z}$  dell'equazione modulare

$$15x \equiv 12 \pmod{21}$$

- b) Determinare quante e quali sono le soluzioni  $[x] \in \mathbb{Z}_{21}$  dell'equazione

$$[15][x] = [12]$$

dove le classi  $[15]$  e  $[12]$  sono elementi di  $\mathbb{Z}_{21}$

- c) Si consideri la seguente permutazione di  $S_7$

$$\sigma = (2635)(1724)(231)(6547).$$

Determinare la decomposizione in cicli disgiunti, la decomposizione in trasposizioni e l'inversa di  $\sigma$ .





**Esercizio 3.**

a) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

si trovino, se esistono, i valori di  $k \in \mathbb{R}$  tali per cui  $\det(A) = 0$ . Fissato  $k = \frac{1}{4}$  si calcoli la matrice prodotto  $BA$  e  $\det(AB)$ .

b) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare gli autovalori e autovettori di  $A$ .





**Esercizio 4.** Fissata una base ortonormale  $B$  dello spazio si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} -x - y + 2z = 3 \\ 3y - 3z = -1 \end{cases}$$

- a) Determinare, se esistono, i punti di intersezione di  $r$  e  $s$  e, nel caso non esistano, dire se le due rette sono parallele o sghembe.
- b) Scrivere l'equazione parametrica della retta  $s$ .

