Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

16 giugno 2022

Esercizio 1

a) Determinare una base del sottospazio vettoriale $W_1 \cap W_2$, dove W_1 e W_2 sono i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da $W_1 = L((1,0,1,1), (2,0,-2,2), (3,0,-1,3))$ e W_2 è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Data $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(1,2,0) = (1,1,0)$, $f(0,1,1) = (0,0,0)$, $f(-1,0,1) = (1,2,1)$

b) Dire se il vettore $(3,4,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(f)$

c) Trovare una base di $\ker(f)$

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + \pi x_3 = 0 \\ -x_1 - kx_2 + \left(k - \sqrt{2}\right)x_4 = 0 \end{cases}$$

Trovare inoltre una base dello spazio vettoriale delle soluzioni nel caso $k = 0$.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2

$$V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = A\}$$

e l'endomorfismo $f: V \longrightarrow V$ definito da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 3b + 3c & 6b \\ 6b & 3a + 3b + 3c \end{pmatrix}$$

a) Stabilire se l'endomorfismo f è un isomorfismo

b) Stabilire l'endomorfismo f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di V formata da autovalori di f.