Soluzioni dell'esame di Geometria 1 - 16/06/2022

Esercizio 1

a) Si noti che
$$(3,0,-1,3) = (1,0,1,1) + (2,0,-2,2)$$

quindi una base di W_1 è
$$B = \{\underbrace{(1,0,1,1)}_{u}, \underbrace{(2,0,-2,2)}_{v}\}$$

Controlliamo se $u \in W_2$.
$$1+0+1 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad u \notin W_2$$

Controlliamo se $v \in W_2$.
$$\left.\begin{array}{l} 2+0-2 = 0 \\ 2\cdot 2 + 2\cdot 0 - 2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v \in W_2$$

Quindi $\quad W_1 \cap W_2 = L(v) = L(2,0,-2,2)$.

Una base di $W_1 \cap W_2$ è $\{(2,0,-2,2)\}$.

b) $(3,4,1) \in Im(f) \Leftrightarrow (3,4,1) \in L((1,1,0),(0,0,0),(1,2,1)) =$
$$= L((1,1,0),(1,2,1))$$

$\Leftrightarrow (3,4,1), (1,1,0), (1,2,1)$ sono lin. dipend.

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Inverso

$$\det\begin{pmatrix}3&4&1\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix} \overset{\substack{\text{I Col} \to \text{I}-\text{II}\\ \downarrow}}{=} \det\begin{pmatrix}-1&4&1\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}=0$$

Quindi $(3,4,1) \in Im(f)$

c) Notiamo intanto che $\overbrace{\{(1,2,0),(0,1,1),(-1,0,1)\}}^{=B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice associata a f rispetto a B e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$M_{BB_c}(f)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$v = x\cdot(1,2,0)+y(0,1,1)+(-1,0,1) \in \quad Ker(f) \iff$

$$f(v)=(0,0,0) \iff \begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix}x+z\\x+2z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x \quad +z=0\\x \quad +2z=0\\ \qquad z=0\end{cases}$$ da cui

$z=0, \quad x=0, \quad y=s \in \mathbb{R}$. Allora

$Ker(f)=\{0\cdot(1,2,0)+s(0,1,1)+0\cdot(-1,0,1) : s\in\mathbb{R}\}=L(0,1,1)$

Una base di $Ker(f)$ è $\{(0,1,1)\}$

Esercizio 2

La dimensione dello spazio delle soluzioni è data da

$$4-\rho(A)$$

dove $\rho(A)=$ rango della matrice

$$A=\begin{pmatrix} -k & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \pi & 0 \\ -1 & -k & 0 & k-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Si noti che $\rho(A)\geq 2$ perché

$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \pi \end{pmatrix}=\pi\neq 0$. Considero l'orlato $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \pi & 0 \\ -k & 0 & k-\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Il suo determinante è dato da

$$(k-\sqrt{2})\cdot\pi$$

Quindi per $k\neq\sqrt{2}$ $\rho(A)=3$.

Per $k=\sqrt{2}$ la matrice $A=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \pi & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

L'altro orlato ha determinante

$$\det\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & \pi \\ -1 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = -\pi\cdot\det\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 2+1=3\neq 0$$

In conclusione $\rho(A)=3$ $\forall k\in\mathbb{R}$ e quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni è $4-3=1$.

Per $k=0$ il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + \pi x_3 = 0 \\ -x_1 = \sqrt{2}\, s \end{cases} \qquad x_4 = s$$

da cui $\quad x_1 = -\sqrt{2}\, s, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{2}{\pi} x_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} s$

e quindi lo spazio delle soluzioni è

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \left(-\sqrt{2}\, s,\ 0,\ -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} s,\ s\right) : s \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ s\left(-\sqrt{2},\ 0,\ -\frac{2\sqrt{2}}{\pi},\ 1\right) : s \in \mathbb{R} \right\} \\ &= L\left(-\sqrt{2},\ 0,\ -\frac{2\sqrt{2}}{\pi},\ 1\right) \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathcal{L}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \Big)$$

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base di V

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3e_1 + 0 \cdot e + 3e_3$$

$$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 6e_2 + 6 \cdot e_3$$

$$f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\det M_B(f) = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow f$ NON è isom.

b)

$$P(\lambda) = \det(M_B(f) - \lambda I_3)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda) \cdot (3-\lambda)(6-\lambda)$$

Vi sono 3 autovalori reali e distinti $\{0, 3, 6\}$ quindi f è diagonalizzabile.

Troviamo gli autospazi.

Dalla Teoria $m_g(0) = m_a(0) = 1 \Rightarrow V(0) = L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Passiamo a $V(3)$.

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in V(3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x_1 = 3x_1 \\ 6x_2 = 3x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 = 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = s$ $\quad x_2 = 0$ $\quad x_1 = s$

Quindi $V(3) = \{ s e_1 + 0 \cdot e_2 + s e_3 : s \in R \} = \{ s(e_1 + e_3) : s \in R \}$
$$= L(e_1 + e_3) = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infine $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in V(6) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 6x_1 \\ 6x_2 = 6x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 = 6x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = s$ $\quad x_1 = 0$ $\quad x_3 = s$

$\Rightarrow V(3) = \{ 0 \cdot e_1 + s e_2 + s e_3 : s \in R \} = \{ s(e_2 + e_3) : s \in R \} = L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Una Base di V formata da autovettori di f è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.