



Matematica Discreta

Prova scritta del 06/06/2022

Nome :

Cognome :

Matricola :

Anno di Iscrizione :

Istruzioni

- Non è consentito l'utilizzo dei telefoni cellulari. Tenerli spenti durante tutta la durata della prova scritta
- Non è consentito l'utilizzo di appunti e dispense
- Non è consentito l'utilizzo della calcolatrice
- Giustificare le risposte date agli esercizi



Esercizio 1.

- a) Dire se la seguente proposizione logica è una tautologia

$$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$$

- b) Si considerino le funzioni f e g definite come segue

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ z &\mapsto 2z - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ z &\mapsto z - 1 \end{aligned}$$

Dire se f è iniettiva, suriettiva e/o bigettiva giustificando la risposta. Si determinino le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

- c) Si dimostri per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ vale la seguente uguaglianza

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$





Esercizio 2.

- a) Si trovino, se esistono, tutte le soluzioni $x \in \mathbb{Z}$ dell'equazione modulare

$$12x \equiv -4 \pmod{11}$$

- b) Quante e quali sono le soluzioni $[x] \in \mathbb{Z}_{11}$ dell'equazione

$$[12][x] = [-4]$$

dove le classi $[12]$ e $[-4]$ sono elementi di \mathbb{Z}_{11} ?

- c) Si considerino le seguenti permutazioni di S_8

$$\sigma_1 = (437)(15826), \quad \sigma_2 = (386)(54)(721)$$

Determinare la decomposizione in cicli disgiunti della permutazione $\sigma_2 \circ \sigma_1$





Esercizio 3.

- a) Fissata una base ortonormale dello spazio, si considerino i vettori $v = (-1, 0, 1)$ e $w = (k, 2, 0)$ dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori v e w sono ortogonali. Dopo aver calcolato il prodotto vettoriale $v \wedge w$ si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\|v \wedge w\|^2 = 9$.
- b) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -8 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare gli autovalori e autovettori di A





Esercizio 4. Fissata una base ortonormale B dello spazio si considerino la retta

$$r : \begin{cases} 6x + 3y + 4z = 4 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

e il piano

$$\tau : x + 2y + 2z = 1$$

- a) Determinare, se esistono, i punti di intersezione di r e τ .
- b) Determinare, se esiste, il piano che contiene la retta r ed è parallelo al piano τ .

