



Università degli Studi di Cagliari

UNICA
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI CAGLIARI

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2021/22

Instabilità delle strutture e calcolo a rottura

> **Lezione 23-24**

Il meccanismo di collasso.

I teoremi fondamentali del calcolo a rottura.

Victor Eremeev

Dr. **Emanuele Reccia** / supporto al Corso
emanuele.reccia@unica.it

victor.eremeev@unica.it

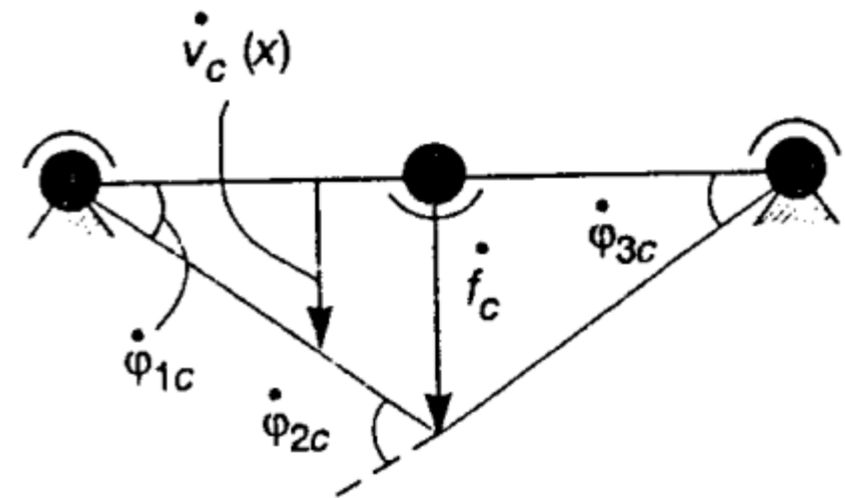
Il meccanismo di collasso

Il collasso plastico è associato alla formazione di un numero di cernieri sufficiente a trasformare la struttura in un **meccanismo**, che pur permettendo ancora di equilibrare i carichi applicati se questi si mantengono costanti, rende possibile un atto **di moto rigido**. Questo è caratterizzato da velocità trasversali $v_c(x)$ e velocità di rotazione $\dot{\varphi}_{ck}(x)$.

Come un esempio

$$\dot{v}_c(x) = \begin{cases} 2 \frac{x}{l} \dot{f}_c & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \dot{f}_c & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_{1c} = \dot{\varphi}_{3c} = -\frac{2}{l} \dot{f}_c, \quad \dot{\varphi}_{2c} = \frac{4}{l} \dot{f}_c$$



dove $f_c = v_c(l/2)$

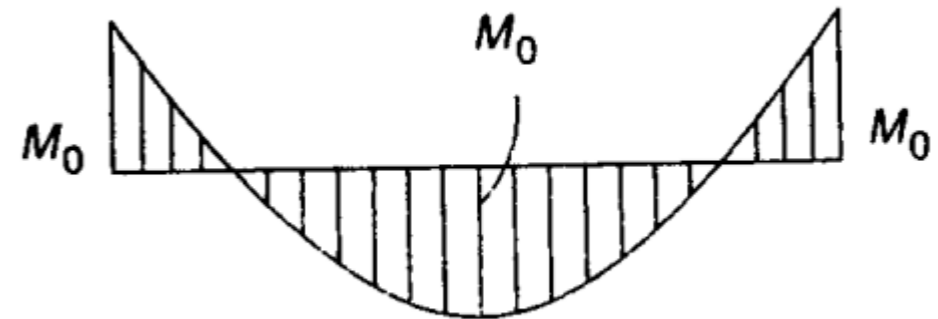
Nella situazione di collasso incipiente l'equilibrio ancora sussiste. I momenti flettenti $M_c(x)$ a collasso sono quindi legati ai carichi base amplificati da **moltiplicatore di collasso della struttura s**

$$-M_c''(x) = sp_0$$

Oltre che da eventuali condizioni al contorno.

Infatti

$$M_c(x) = M_0 \left(-1 + 8 \frac{x}{\ell} - 8 \frac{x^2}{\ell^2} \right)$$



che risulta

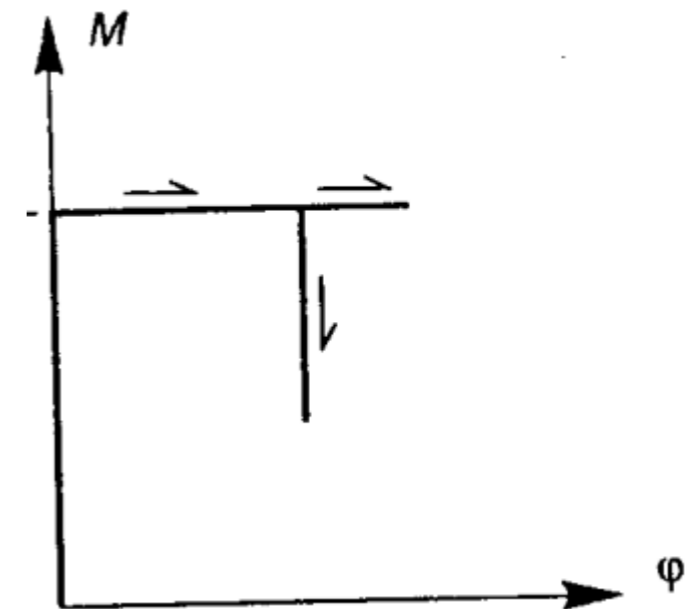
$$-M_c''(x) = \underline{16} \frac{M_0}{\ell^2} = sp_0$$

L'atto di moto concesso dal meccanismo può essere riguardato come **virtuale** e riferito alla stessa configurazione. Il **principio delle velocità virtuali** stabilisce allora

$$s \int p_0 \dot{v}_c dx = \sum_k M_c(x_k) \dot{\varphi}_{kc}$$

dove l'integrale si intende esteso a tutta la struttura. Il legame

$$M_c(x_k) = M_{0k} = \begin{cases} M_0 & \text{se } \dot{\varphi}_{kc} > 0 \\ -M_0 & \text{se } \dot{\varphi}_{kc} < 0 \end{cases}$$



Quindi

$$s \int p_0 \dot{v}_c dx = \sum_k M_{0k} \dot{\varphi}_{kc}$$

Oppure

$$s = \frac{\sum_k M_{0k} \dot{\varphi}_{kc}}{\int p_0 \dot{v}_c dx}$$

Questa relazione consente il calcolo di s una volta noto il meccanismo di collasso.

In particolare, per

$$\dot{v}_c(x) = \begin{cases} 2 \frac{x}{\ell} \dot{f}_c & 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \\ 2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \dot{f}_c & \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell \end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_{1c} = \dot{\varphi}_{3c} = -\frac{2}{\ell} \dot{f}_c, \quad \dot{\varphi}_{2c} = \frac{4}{\ell} \dot{f}_c$$

risulta

$$\int_0^{\ell} p_0 \dot{v}_c dx = p_0 \frac{\ell}{2} \dot{f}_c, \quad \sum_k M_{0k} \dot{\varphi}_{kc} = 8 \frac{M_0}{\ell} \dot{f}_c$$

Ricordano che è $p_0 = M_0/\ell^2$, si ottiene $s=16$.

Osservazione:

1. La sommatoria $\sum_{jk} M_{0k} \dot{\varphi}_{kc}$ è certamente positiva. Infatti

$$D_c = \sum_{jk} M_{0k} \dot{\varphi}_{kc} = \sum_{jk} M_{0k} |\dot{\varphi}_{kc}| > 0$$

D_c è nota come **potenza dissipata** nell'atto di moto relativo al meccanismo di collasso.

2. Dal momento che il moltiplicatore dei carichi cresce da zero, s è puro positivo. Dalle

$$s \int p_0 \dot{v}_c dx = \sum_{jk} M_{0k} \dot{\varphi}_{kc} \quad \text{e} \quad D_c = \sum_{jk} M_{0k} \dot{\varphi}_{kc} = \sum_{jk} M_{0k} |\dot{\varphi}_{kc}| > 0$$

Consegue che il verso dell'atto di moto relativo al meccanismo di collasso comporta **valore positivo per la potenza esterna** dei carichi base:

$$\int p_0 \dot{v}_c dx > 0$$

I teoremi fondamentali del calcolo a rottura.

I moltiplicatori **staticamente ammissibili** e **cinematicamente sufficiente**

I moltiplicatori **staticamente ammissibili** e **cinematicamente sufficiente**

Si indichino con Ψ i moltiplicatori per cui sia possibile trovare momenti flettenti $M_\psi(x)$ in equilibrio con i carichi base implicati da Ψ e ovunque rispettosi dei limiti di resistenza della sezione

$$-M_\psi''(x) = \psi p_0 \quad + \text{Condizioni al contorno di equilibrio}$$

$$-M_0(x) \leq M_\psi(x) \leq M_0(x) \quad \forall x \quad (\text{Condizione di confomità})$$

Tali moltiplicatori sono detti **staticamente ammissibile**

I moltiplicatori staticamente ammissibili e cinematicamente sufficiente

Si consideri un qualunque cinematismo ottenuto introducendo nella struttura un opportuno numero $j=1,2,\dots,J$ di cerniere plastiche, che consenta un atto di moto rigido $(\dot{v}_\beta(x), \dot{\varphi}_j)$ di verso tale che la potenza dei carichi base sia positiva

$$\int p_0 \dot{v}_\beta dx > 0$$

A ognuno di tali cinematismi si associ un moltiplicatore β attraverso di condizione

$$\beta \int p_0 \dot{v}_\beta dx = \sum_j M_{0j} \dot{\varphi}_{j\beta} = D_\beta > 0$$

dove M_{0j} è il momento limite nella j -sima cerniera plastica, di segno concorde con il verso di rotazione della cerniera plastica.

I moltiplicatori β sono associati a cinematismi che hanno le stesse caratteristiche dell'effettivo meccanismo di collasso, ma non coincidono necessariamente con esso.

Tali moltiplicatori sono detti **cinematicamente sufficiente**



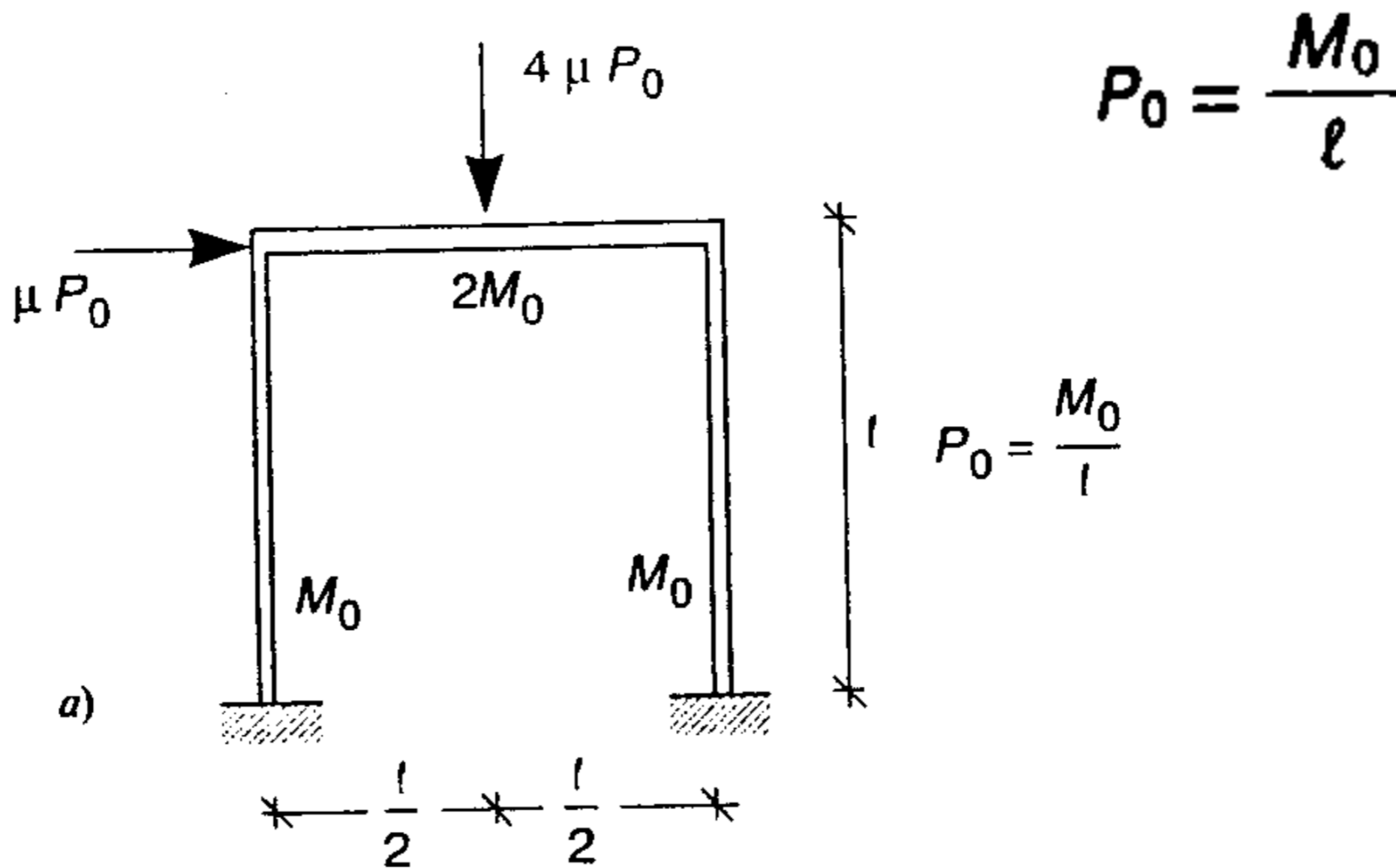
Teorema statico. Il moltiplicatore di collasso è il massimo dei moltiplicatore **staticamente ammissibili.**

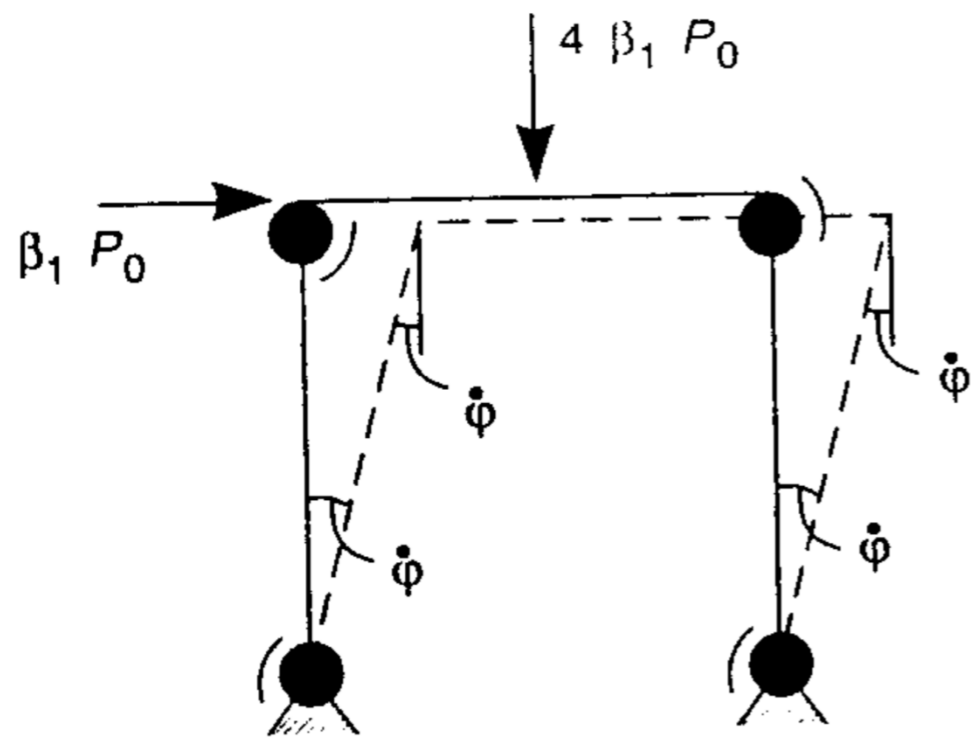
$$s = \max\{\psi\}$$

Teorema cinematico. Il moltiplicatore di collasso è il minimo dei moltiplicatore **cinematicamente sufficiente.**

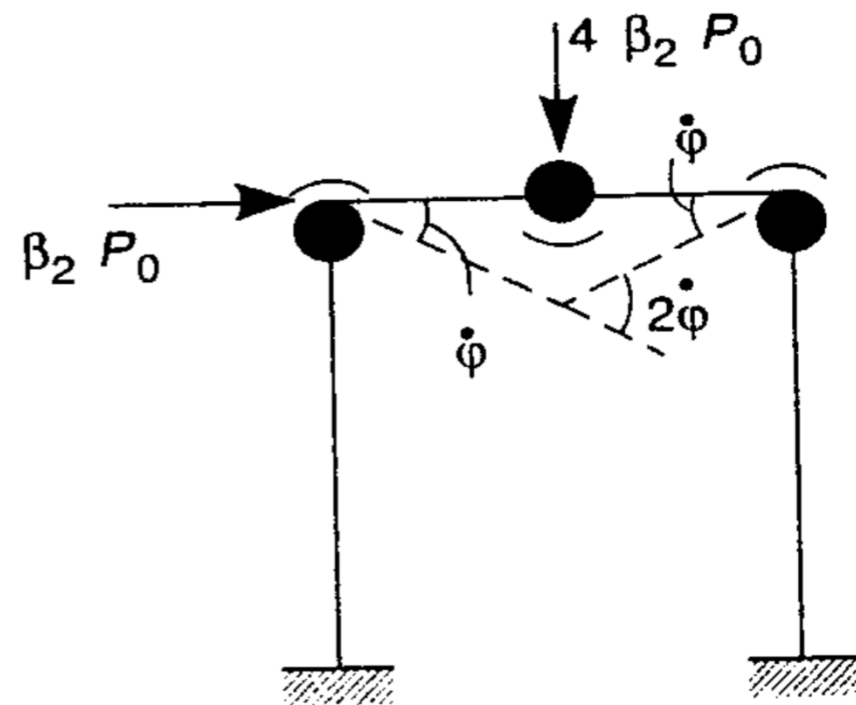
$$s = \min\{\beta\}$$

Esempio 1.

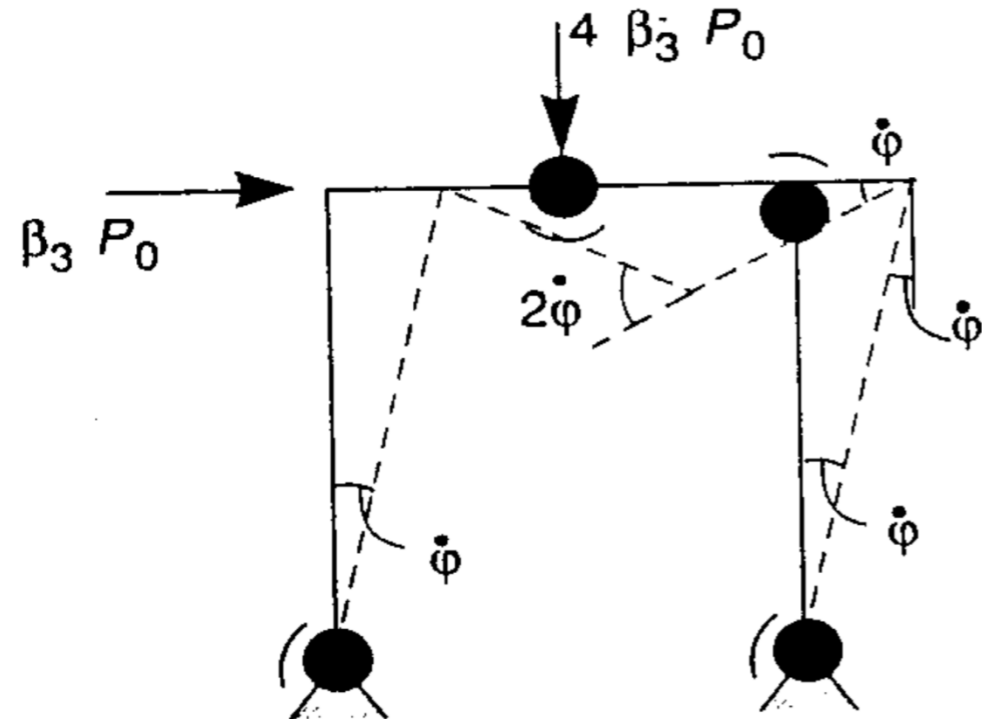




$$\beta_1 P_0 l \dot{\varphi} = 4 M_0 \dot{\varphi}$$



$$\beta_2 4 P_0 \frac{l}{2} \dot{\varphi} = M_0 \dot{\varphi} + (2 M_0)(2 \dot{\varphi}) + M_0 \dot{\varphi}$$

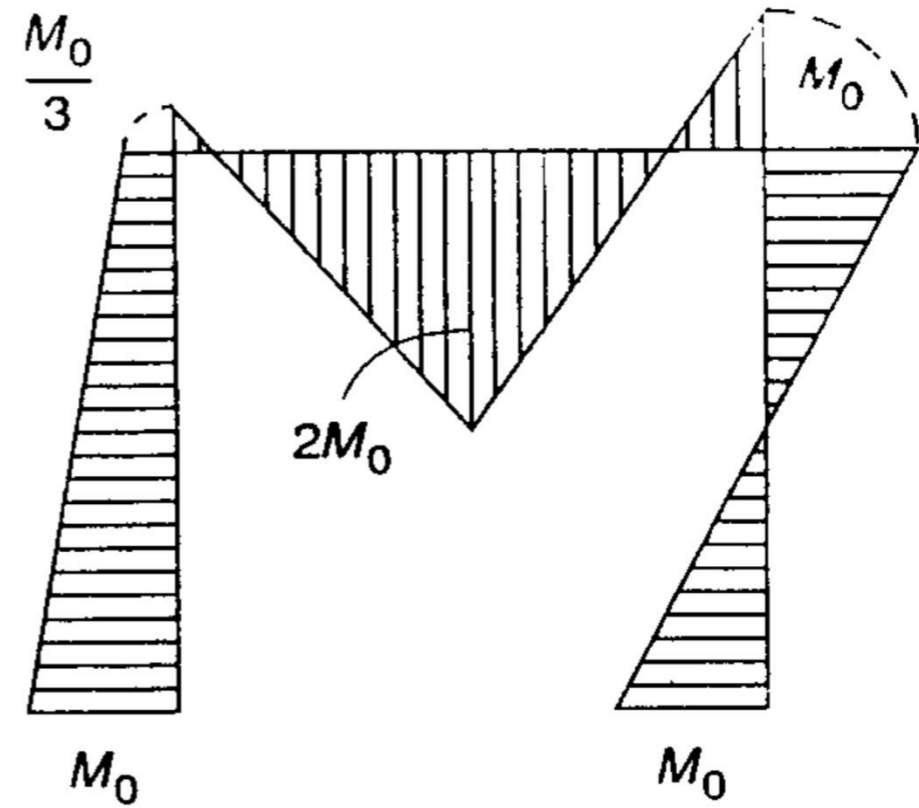
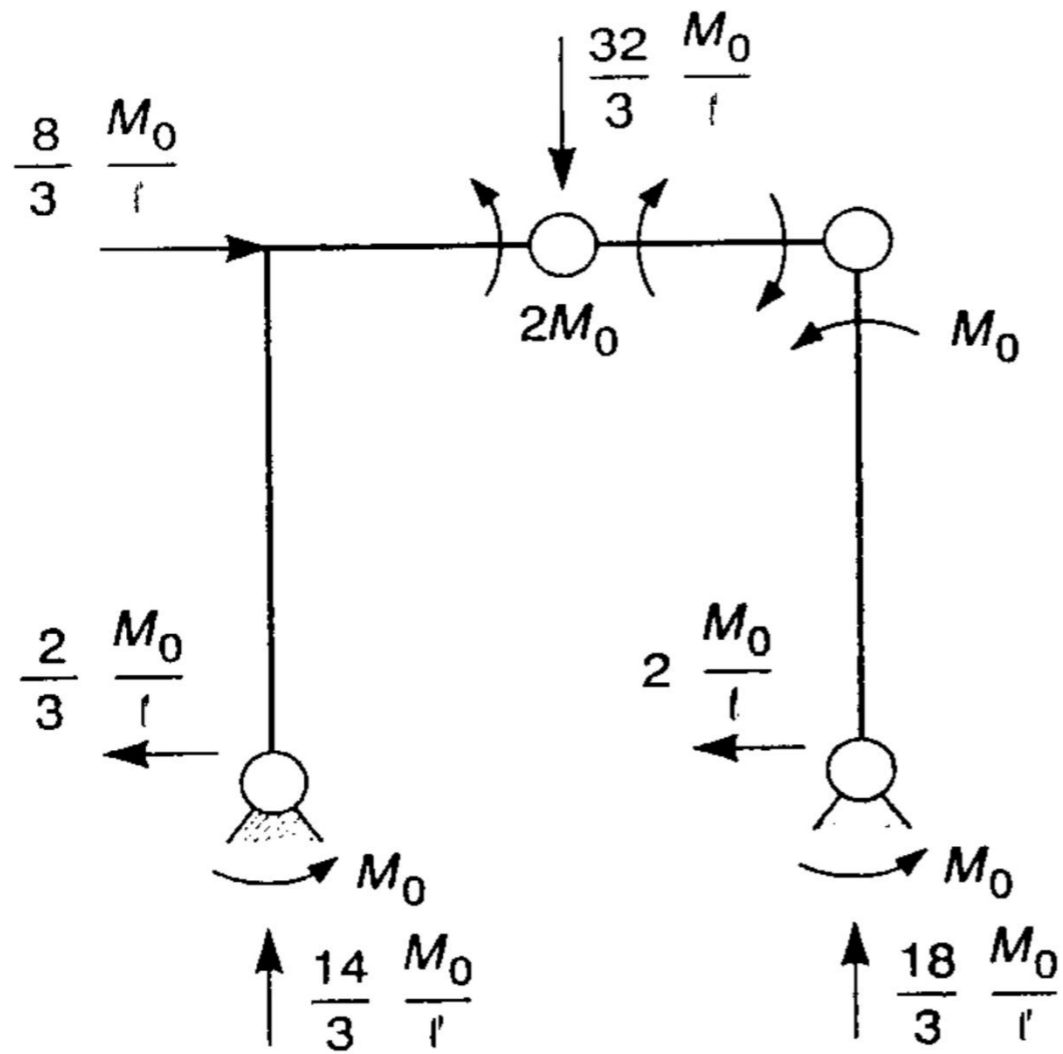


$$\beta_1 = 4.0$$

$$\beta_2 = 3.0$$

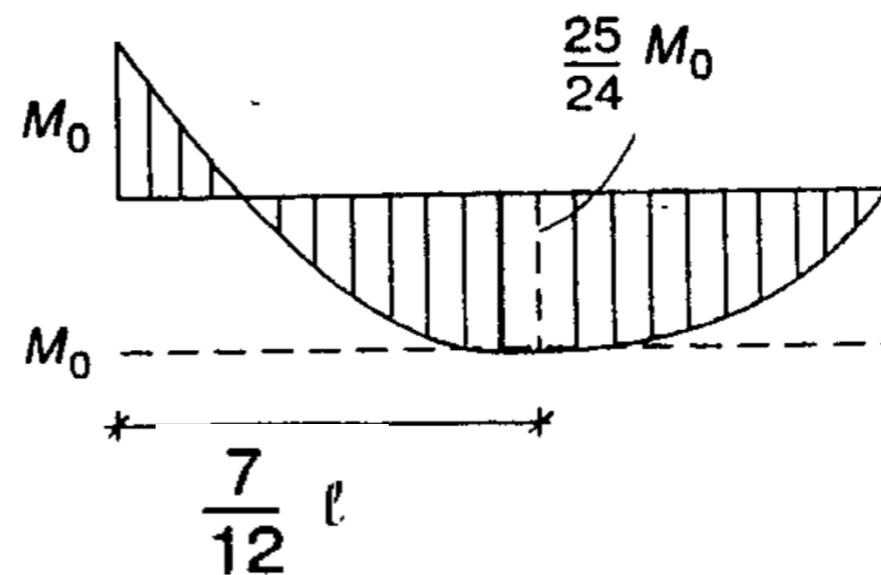
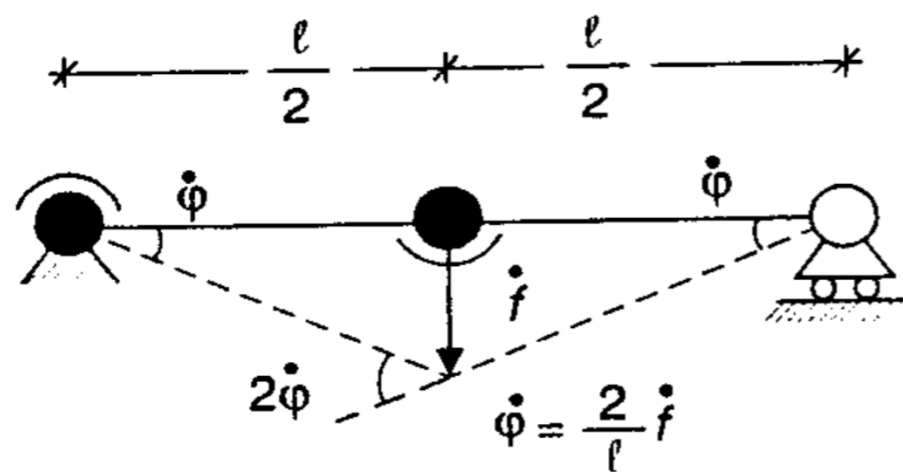
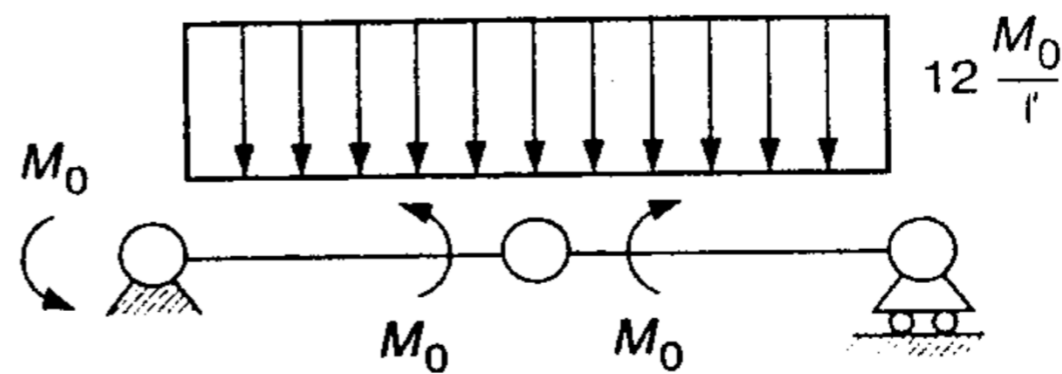
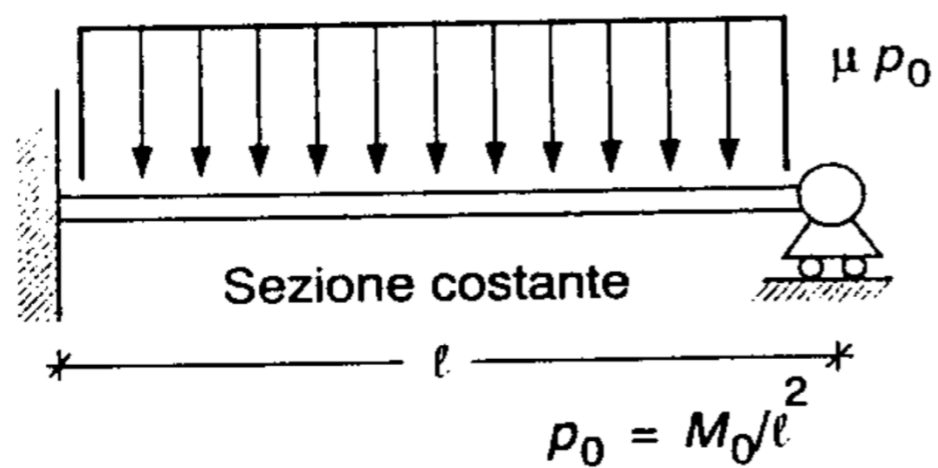
$$\beta_3 = \frac{8}{3} = 2.667$$

$$\beta_3 \left(P_0 l \dot{\varphi} + 4 P_0 \frac{l}{2} \dot{\varphi} \right) = M_0 \dot{\varphi} + (2 M_0)(2 \dot{\varphi}) + M_0(2 \dot{\varphi}) + M_0 \dot{\varphi}$$

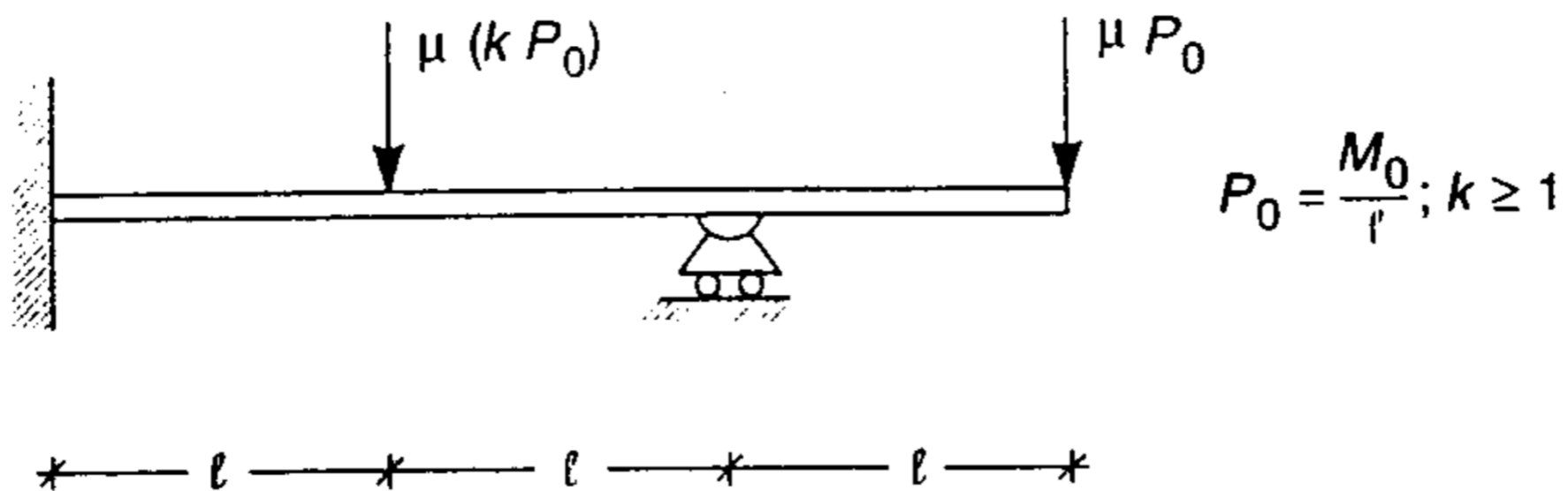


$$s = \beta_3 = 2.667 \quad \left(P_L = \frac{8M_0}{3l} \right)$$

Esempio 2.



Esempio 3.



Esempio 4.

