

Esercizio 1.

- a) Dire se la seguente proposizione logica è una tautologia

$$P \Rightarrow P \wedge Q$$

- b) Data la funzione $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita come $f(z) = z + 3$, dire se la funzione è iniettiva, suriettiva e/o bigettiva, giustificando la risposta. Nel caso in cui f ammetta un'inversa g , determinare tale inversa.
- c) Si dimostri per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ vale

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Esercizio 2.

- a) Si trovino, se esistono, tutte le soluzioni $x \in \mathbb{Z}$ dell'equazione modulare

$$14x \equiv 18 \pmod{6}$$

- b) Si scriva la seguente permutazione in S_7 come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni. Si determini se la permutazione è pari o dispari:

$$(3457)(216)(342)(576)$$

Esercizio 3.

- a) Trovare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i due vettori $OP = (-3, 2k, 1)$ e $OQ = (0, k - 1, 2)$ sono ortogonali. Fissato $k = 2$, Calcolare il prodotto vettoriale $OP \wedge OQ$.
- b) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \\ 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcolare il prodotto AB e, se possibile, $\det(AB)$.

- c) Determinare gli autovalori reali e i corrispondenti autovettori, della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Fissata una base ortonormale B dello spazio si consideri la retta

$$r : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$$

- a) Trovare l'equazione del piano che contiene la retta r e passa per il punto di coordinate $(1, 0, 2)$.
- b) Trovare l'equazione del piano che contiene la retta r ed è parallelo al piano $\sigma : x + y - \frac{1}{4}z = 1$.