

# 9

# CAMPI

# ARMONICI

# Campi Armonici

Le funzioni temporali relative alle grandezze che definiscono un campo dipendono dalle funzioni delle sorgenti  $\rho$  e  $\bar{J}$ .

In ingegneria le funzioni sinusoidali nel tempo hanno una larga applicazione, infatti:

- tutte le funzioni periodiche nel tempo possono essere sviluppate in serie di Fourier di componenti armoniche sinusoidali
- le funzioni transitorie non periodiche possono essere espresse come integrali di Fourier.

Poiché le equazioni di *Maxwell* sono *equazioni differenziali lineari*, le *variazioni sinusoidali nel tempo delle funzioni sorgenti* per una data frequenza, produrranno *variazioni sinusoidali di  $\bar{E}$  e  $\bar{H}$*  con la stessa frequenza in regime permanente.

# Campi Armonici

Per le *funzioni sorgenti con una dipendenza dalla variabile tempo arbitraria*, i campi elettrodinamici possono essere determinati in funzione di quelli generati dalle componenti alle diverse frequenze delle funzioni sorgenti. *Per i sistemi lineari*, l'applicazione del *principio di sovrapposizione degli effetti* consentirà di determinare il campo totale dovuto ai contributi di tutte le componenti.

I campi armonici nel tempo sono i campi che variano con legge periodica sinusoidale. Le grandezze che li caratterizzano sono convenientemente espresse con la *notazione fasoriale*. Per esempio un campo  $\bar{E}$  armonico nel tempo riferito a una *cosinusoide*, può essere espresso come:

$$\bar{E}(x, y, z, t) = \text{Re} \left[ \bar{E}(x, y, z) e^{j\omega t} \right]$$

dove  $\bar{E}$  é un fasore definito in direzione modulo e fase.

# Campi Armonici

I fasori sono grandezze complesse per cui:

se il campo  $\bar{E}(x,y,z,t)$  é rappresentato da un fasore  $\bar{E}(x,y,z)$ ,

allora

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{E}(x,y,z,t) \quad \text{e} \quad \int \bar{E}(x,y,z,t) dt$$

si potranno rappresentare rispettivamente con i fasori:

$$j\omega \bar{E}(x,y,z) \quad \text{e} \quad \bar{E}(x,y,z) / j\omega$$

Derivate e integrali temporali di ordine superiore potranno essere rappresentati rispettivamente moltiplicando e dividendo il fasore  $\bar{E}(x,y,z)$  per potenze superiori di  $j\omega$ .

# Equazioni di Maxwell fasoriali

Le equazioni di Maxwell per le grandezze armoniche nel tempo in termini di fasori di campo  $(\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{H}})$  e fasori delle sorgente  $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{J}})$  in un mezzo lineare, isotropo e omogeneo:

*notazione fasoriale:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega \bar{\mathbf{B}} = -j\omega\mu \bar{\mathbf{H}} \\ \nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + j\omega \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{J}} + j\omega\varepsilon \bar{\mathbf{E}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = \bar{\rho} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = \bar{\rho} / \varepsilon \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{H}} = 0 \end{array} \right. \quad \text{essendo } \bar{\mathbf{D}} = \varepsilon \bar{\mathbf{E}}$$

# Equazioni di Helmholtz non omogenee

Le equazioni delle onde armoniche nel tempo per il potenziale scalare  $V$  e il potenziale vettore  $\bar{A}$  diventano:

*notazione fasoriale:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \bar{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J} \\ \nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \bar{A} - \mu\epsilon (j\omega)^2 \bar{A} = -\mu \bar{J} \\ \nabla^2 V - \mu\epsilon (j\omega)^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{array} \right.$$

$$\text{con } (j\omega)^2 = -\omega^2 \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{\mu\epsilon}\right)^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{u^2} = k^2$$

esse sono le **equazioni di Helmholtz** non omogenee (*notazione fasoriale*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 V + k^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \bar{A} + k^2 \bar{A} = -\mu \bar{J} \end{array} \right. \quad \text{essendo } k \text{ il } \underline{\text{numero d'onda}}$$
$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{u}$$

# Equazioni di Helmholtz non omogenee

La condizione di Lorentz per i potenziali:  $\nabla \cdot \bar{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

diventa:  $\nabla \cdot \bar{A} + j\omega\mu\epsilon V = 0$

Le *soluzioni fasoriali* delle equazioni di Helmholtz non omogenee si ottengono da quelle dei campi non armonici:

$$V(R,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \frac{\rho(t-R/u)}{R} dv' \quad \bar{A}(R,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J}(t-R/u)}{R} dv'$$

considerando che le sorgenti  $\rho$  e  $\bar{J}$  sono sinusoidali:

$$\begin{cases} \rho(t-R/u) \\ \bar{J}(t-R/u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho \cos \left[ \omega \left( t - \frac{R}{u} \right) \right] = \rho \cos \left( \omega t - \frac{\omega R}{u} \right) = \rho \cos(\omega t - kR) \\ \bar{J} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{R}{u} \right) \right] = \bar{J} \cos \left( \omega t - \frac{\omega R}{u} \right) = \bar{J} \cos(\omega t - kR) \end{cases}$$

$$k = \frac{\omega}{u} \rightarrow \omega = k u$$

# Soluzioni delle equazioni di Helmholtz non omogenee

Possiamo usare la notazione fasoriale:

$$\begin{cases} \rho \cos[(\omega t - kR)] = \text{Re} \left\{ \rho e^{-jkR} e^{j\omega t} \right\} \Rightarrow \text{si associa il fasore } \rho e^{-jkR} \\ \bar{J} \cos[(\omega t - kR)] = \text{Re} \left\{ \bar{J} e^{-jkR} e^{j\omega t} \right\} \Rightarrow \text{si associa il fasore } \bar{J} e^{-jkR} \end{cases}$$

Le espressioni dei *potenziali scalare e vettoriale ritardati* dovute alle sorgenti armoniche diventano:

*notazione fasoriale:*

$$V(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \frac{\rho \cos \omega(t - R/u)}{R} dv' \quad \Rightarrow \quad V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \frac{\rho e^{-jkR}}{R} dv'$$

$$\bar{A}(R, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J} \cos \omega(t - R/u)}{R} dv' \quad \Rightarrow \quad \bar{A}(R) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J} e^{-jkR}}{R} dv'$$

# Soluzioni delle Equazioni di Helmholtz non omogenee

Poiché lo sviluppo in serie di Taylor del fattore esponenziale é:

$$e^{-jkR} = 1 - jkR + \frac{k^2 R^2}{2} + \dots$$

dove  $k$  può essere espresso in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{u}{f}$

del mezzo:  $k = \frac{2\pi f}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Nel caso in cui  $kR = 2\pi \frac{R}{\lambda} \ll 1$ , quindi se la distanza  $R \ll \lambda$ , il termine  $e^{-jkR}$  può essere approssimato a 1.

Perciò, se la distanza  $R$  é molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$ , le formule si riducono a quelle valide per le condizioni quasi statiche:

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \frac{\rho}{R} dv' \quad \bar{A}(R) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J}}{R} dv'$$

# Procedura generale in presenza di sorgenti

La procedura formale per la determinazione dei campi elettrici e magnetici dovuti alle distribuzioni di corrente e cariche armoniche é la seguente:

1) determinazione *dei fasori*  $V(R)$  e  $\bar{A}(R)$  dalle equazioni:

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \frac{\rho e^{-jkR}}{R} dv' \quad \bar{A}(R) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J} e^{-jkR}}{R} dv'$$

2) calcolo dei fasori:  $\bar{E}(R) = -\nabla V - j\omega\bar{A}$  e  $\bar{B}(R) = \nabla \times \bar{A}$

3) calcolo dei valori istantanei con riferimento al coseno:

$$\bar{E}(R, t) = \Re_e \left[ \bar{E}(R) e^{j\omega t} \right] \quad \text{e} \quad \bar{B}(R, t) = \Re_e \left[ \bar{B}(R) e^{j\omega t} \right]$$

Il grado di difficoltà del problema dipende dalla difficoltà di risoluzione delle integrazioni al punto 1)

# Campo armonico in un mezzo non conduttore

In un mezzo semplice privo di perdite (*non conduttore*) e di cariche libere:

$$\rho = 0, \quad \bar{J} = 0, \quad \gamma = 0$$

Le quattro equazioni di Maxwell si riducono alle seguenti:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{E} &= -j\omega\mu\bar{H} & \nabla \cdot \bar{E} &= 0 \\ \nabla \times \bar{H} &= j\omega\varepsilon\bar{E} & \nabla \cdot \bar{H} &= 0 \end{aligned}$$

Le equazioni possono essere combinate per ottenere equazioni del secondo ordine alle derivate parziali espresse in funzione di  $\bar{E}$  e  $\bar{H}$

e si ottengono così *le equazioni di Helmholtz vettoriali omogenee*:

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0 \\ \nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = 0 \end{cases} \quad \text{con } k^2 = \left(\frac{\omega}{u}\right)^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$$

# Campo armonico in un mezzo non conduttore

Infatti dalla prima equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \nabla \times (-j\omega\mu\bar{H})$$

$$-\nabla^2 \bar{E} = -j\omega\mu(\nabla \times \bar{H}) = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon\bar{E})$$

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \bar{E} = 0$$

Dalla seconda:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} = \nabla \times (j\omega\varepsilon\bar{E})$$

$$-\nabla^2 \bar{H} = j\omega\varepsilon(-j\omega\mu\bar{H}) = -j^2\omega^2\mu\varepsilon\bar{H}$$

$$\nabla^2 \bar{H} + \omega^2 \mu\varepsilon \bar{H} = 0$$

Ricordiamo che:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{f} = \nabla(\nabla \cdot \bar{f}) - \nabla^2 \bar{f} \text{ se } \nabla \cdot \bar{f} = 0 \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \bar{f} = -\nabla^2 \bar{f}$$

# Campo armonico in un mezzo conduttore

Si noti che se  $(\bar{E}, \bar{H})$  sono soluzioni delle equazioni di Maxwell in un mezzo semplice caratterizzato da  $\epsilon$  e  $\mu$ , allora anche  $(\bar{E}', \bar{H}')$

lo sono se:

$$\bar{E}' = \eta \bar{H} \quad e \quad \bar{H}' = -\frac{\bar{E}}{\eta} \quad (***)$$

dove  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  è l'*impedenza intrinseca del mezzo*.

Infatti è facilmente dimostrabile che le equazioni di Maxwell per un mezzo semplice privo di sorgenti, sono invarianti per le trasformazioni lineari specificate nelle relazioni (\*\*\*)

Questa è una affermazione *del principio di dualità*. Questo principio è una conseguenza della simmetria delle equazioni di Maxwell in un mezzo semplice privo di sorgenti.

# Campo armonico in un mezzo conduttore

Se il mezzo ha perdite (conduttore,  $\gamma \neq 0$ ), circolerà una corrente  $\bar{J} = \gamma \bar{E}$ , e la seconda equazione di Maxwell diventa:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega \bar{D} \quad \text{con} \quad \bar{D} = \varepsilon \bar{E}$$

$$\nabla \times \bar{H} = (\gamma + j\omega) \bar{E} = j\omega \left( \varepsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \bar{E} = j\omega \dot{\varepsilon}_c \bar{E}$$

ha la stessa espressione che assume nel caso privo di perdite, ma la permittività è complessa

$$\dot{\varepsilon}_c = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon - j \frac{\gamma}{\omega} \left[ \frac{F}{m} \right]$$

le altre equazioni rimangono invariate.

Analogamente occorre tener conto della componente sfasata della magnetizzazione dovuta alla influenza di un campo magnetico esterno variabile nel tempo, per cui alle alte frequenze:

$$\dot{\mu} = \mu' - j\mu''$$

# Campo armonico in un mezzo conduttore

Perciò, il valore reale di  $k$  in un conduttore, o in dielettrico con perdite, é un numero complesso:

$$\dot{k}_c = \omega \sqrt{\dot{\mu} \dot{\epsilon}_c}$$

Il rapporto  $\frac{\epsilon''}{\epsilon'}$  é chiamata *tangente di perdita* perché é una misura

della perdita di potenza nel mezzo:  $\tan \delta_c = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \cong \frac{\gamma}{\omega \epsilon}$

$\delta_c$  è chiamato *angolo di perdita*

Si può dimostrare che:

$$\tan \delta_c = \frac{\text{l'energia dissipata/ per ciclo della grandezza di campo}}{\text{l'energia elettrostatica accumulata/ per ciclo della grandezza di campo}}$$

# Campo armonico in un mezzo conduttore

Sulla base della espressione di  $\dot{\epsilon}_c$

- un mezzo é detto *buon conduttore* se  $\gamma \gg \omega\epsilon$
- un mezzo é detto *buon isolatore* se  $\omega\epsilon \gg \gamma$ .

Quindi, essendo  $\omega = 2\pi f$ , un materiale può essere un buon conduttore alle basse frequenze, ma può avere le proprietà di un dielettrico (con perdite) alle frequenze molto alte.

Esempio: terra umida,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\gamma = 10^{-2}$  [S/m]

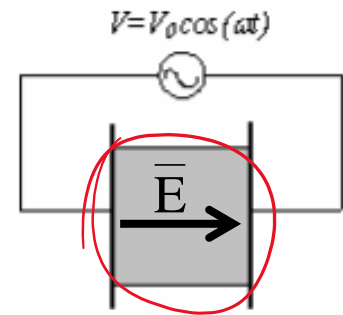
$$\tan \delta_c = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{10^{-2}}{2\pi f \cdot (8.856 \cdot 10^{-12}) \cdot 10}$$

$$\tan \delta_c = \begin{cases} 1.8 \cdot 10^4 & \text{per i segnali con } f = 1\text{kHz} \rightarrow \text{è un buon conduttore} \\ 1.8 \cdot 10^{-3} & \text{per i segnali con } f = 1\text{GHz} \rightarrow \text{diventa un isolatore} \end{cases}$$

# Campo armonico in un mezzo conduttore

Su tutti i punti di un campione di materiale caratterizzato da una conducibilità  $\gamma$  e una permittività  $\epsilon_c$ , un campo  $\bar{E}$  induce:

- sia un vettore spostamento  $\bar{D}$  che comporta un'energia elettrostatica accumulata
- sia una densità di corrente  $\bar{J}$  che comporta una dissipazione di potenza per effetto joule



$$\bar{D} = \epsilon_c \bar{E}$$

$$\bar{J} = \gamma \bar{E}$$

*se  $\omega\epsilon \gg \gamma$  un campo elettrico  $\bar{E}$  induce nel materiale un vettore spostamento  $\bar{D}$  prevalente rispetto alla densità di corrente  $\bar{J}$ , per cui prevale il comportamento della materia come isolante che consente un accumulo di energia elettrostatica.*

*se  $\omega\epsilon \ll \gamma$  un campo elettrico  $\bar{E}$  induce nel materiale una densità di corrente  $\bar{J}$  prevalente rispetto al vettore spostamento  $\bar{D}$ , per cui prevale il comportamento della materia come conduttore con una dissipazione di energia legata alla resistività del mezzo.*

# Campo armonico in un mezzo conduttore

Si possono evidenziare tre punti fondamentali:

- *le equazioni di Maxwell e quindi le equazioni di Helmholtz sono valide per onde di frequenza qualsiasi.*

Esse sono state verificate sperimentalmente per tutto lo spettro elettromagnetico ossia per valori della frequenza che vanno da frequenze molto basse, sino ai raggi X e gamma ( $f > 10^{18}$  Hz).

- *In un mezzo privo di perdite tutte le onde elettromagnetiche di un qualsiasi campo di frequenza, si propagano con la stessa velocità  $u$  che dipende solo dalla natura del mezzo:*

$$u = 1 / \sqrt{\mu \epsilon}$$

- *In un mezzo con perdite, la velocità di propagazione  $u$  è un operatore complesso e dipende anche dalla frequenza e dalla conducibilità del mezzo  $\gamma$ :*

$$\dot{u} = 1 / \sqrt{\dot{\mu} \dot{\epsilon}}$$

# Spettro elettromagnetico

DENOMINAZIONE	SIGLA	FREQUENZA	LUNGHEZZA D'ONDA	
FREQUENZE ESTREMAMENTE BASSE	ELF	0 - 3kHz	> 100Km	
FREQUENZE BASSISSIME	VLF	3 - 30kHz	100 - 10Km	
RADIOFREQUENZE	FREQUENZE BASSE (ONDE LUNGHE)	LF	30 - 300kHz	10 - 1Km
	MEDIE FREQUENZE (ONDE MEDIE)	MF	300kHz - 3MHz	1Km - 100m
	ALTE FREQUENZE	HF	3 - 30MHz	100 - 10m
	FREQUENZE ALTISSIME (ONDE METRICHE)	VHF	30 - 300MHz	10 - 1m
MICROONDE	ONDE DECIMETRICHE	UHF	300MHz - 3GHz	1m - 10cm
	ONDE CENTIMETRICHE	SHF	3 - 30GHz	10 - 1cm
	ONDE MILLIMETRICHE	EHF	30 - 300GHz	1cm - 1mm
INFRAROSSO	IR	0,3 - 385THz	1000 - 0,78mm	
LUCE VISIBILE	VL	385 - 750THz	780 - 400nm	
ULTRAVIOLETTO	UV	750 - 3000THz	400 - 100nm	
RADIAZIONI IONIZZANTI	X	> 3000THz	< 100nm	

*γ rays*  
*X rays*  
*Ultraviolet*  
*Visible light*  
*Infrared*  
 Mm wave  
 EHF *Extremely high frequency*  
 SHF *Super high frequency*  
 UHF *Ultra high frequency*  
 VHF *Very high frequency*  
 HF *High frequency*  
 MF *Medium frequency*  
 LF *Low frequency*  
 VLF *Very low frequency*  
 ULF *Ultra low frequency*  
 SLF *Super Low frequency*  
 ELF *Extremely low frequency*

# Spettro elettromagnetico

