

8

CAMPI TEMPO VARIANTI

E

POTENZA ELETTROMAGNETICA

# Campi stazionari

modello

equazione costitutiva

## **CAMPO ELETTROSTATICO**

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E}$$

## **CAMPO DI CORRENTE STAZIONARIO**

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = 0$$

$$\bar{E} = \rho \bar{J}$$

## **CAMPO MAGNETOSTATICO**

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H}$$

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \rightarrow \underline{\bar{E} \text{ è conservativo}}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \rightarrow \underline{\bar{H} \text{ non è conservativo}}$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = 0 \text{ e } \nabla \cdot \bar{B} = 0 \rightarrow \underline{\bar{J} \text{ e } \bar{B} \text{ sono solenoidali}}$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \rightarrow \underline{\bar{D} \text{ non è solenoidale}}$$

# Campi stazionari

In *condizioni statiche* le grandezze del modello elettrostatico  $\vec{E}$  e  $\vec{D}$  non sono legate alle grandezze del modello magnetostatico  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$ .

In un mezzo conduttore, possono coesistere un campo elettrico e un campo magnetico, che insieme costituiscono un campo elettromagnetico. *Il campo elettrico statico  $\vec{E}$  causa un flusso costante di correnti di conduzione di densità  $\vec{J}$ , questo genera a sua volta un campo magnetico statico  $\vec{H}$ . Se il campo magnetico non varia nel tempo allora non ci sono f.e.m indotte e il campo  $\vec{H}$  non interferisce con il campo elettrico.* In queste condizioni il campo  $\vec{E}$  è indipendente dal campo magnetico statico generato.

Gli effetti cambiano se il campo elettrico non è statico o se il circuito è in movimento. *Per comprendere questi effetti si intende studiare come una variazione di campo elettrico generi una variazione di campo magnetico e viceversa.*

# Campi non stazionari

Per comprendere i *fenomeni elettromagnetici in regime temporale variante*, è necessario introdurre un modello elettromagnetico nel quale le grandezze relative al modello elettrostatico,  $\vec{E}$  e  $\vec{D}$ , quelle relative al modello magnetostatico,  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$ , e quelle del campo elettrico,  $\vec{E}$  e  $\vec{J}$ , siano propriamente correlate.

## *Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica*

*Michael Faraday nel 1831, scoprì sperimentalmente che in una spira conduttrice, quando varia il flusso magnetico concatenato con essa, viene indotta una forza elettromotrice (f.e.m.).*

La relazione quantitativa tra la *f.e.m. indotta* e la velocità di variazione del flusso concatenato, basata su dati empirici, è nota come *legge di Faraday* e costituisce un postulato fondamentale.

# Legge di Faraday

La variazione della induzione  $\bar{B}$  può essere dovuta a:

- ❖ una variazione nel tempo delle correnti che generano il campo
- ❖ uno spostamento del conduttore nel campo magnetico.

Per determinare l'*espressione generale della legge di Faraday*, indicando con  $\bar{u}$  la velocità di spostamento del conduttore si esamineranno i seguenti tre casi:

1. circuito fisso ( $\bar{u} = 0$ ) in un campo magnetico variabile nel tempo:  $\partial\bar{B} \neq 0$
2. circuito in movimento ( $\bar{u} \neq 0$ ) in un campo magnetico statico  $\partial\bar{B} = 0$
3. circuito in movimento ( $\bar{u} \neq 0$ ) in un campo magnetico variabile nel tempo  $\partial\bar{B} \neq 0$  (sovrapposizione degli effetti dei casi 1 e 2).

# Legge di Faraday

1) *L'intensità del campo elettrico  $\bar{E}$  in una regione dove la densità del flusso magnetico  $\bar{B}$  varia con il tempo non è conservativa ( $\nabla \times \bar{E} \neq \mathbf{0}$ ) e non può essere espressa con il gradiente di un potenziale scalare, ma è valida **la legge di Faraday in forma differenziale:***

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad \text{se } \nabla \times \bar{E} \neq 0 \Rightarrow \bar{E} \neq -\nabla V$$

Facendo l'integrale superficiale su una superficie aperta  $S$  delimitata da un contorno  $C$  e applicando il Teorema di Stokes, si ottiene **la legge di Faraday in forma integrale:**

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}$$

Se il campo magnetico è stazionario:  $-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \times \bar{E} = 0$  6

# Legge di Faraday

1) Per un circuito fisso con contorno  $C$ , che delimita una superficie  $S$ , e campo magnetico non stazionario  $\partial \bar{B} \neq 0$

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot d\bar{s}$$

Il primo membro **definisce la f.e.m. indotta  $e$**  nel circuito:

$$e = \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad [\text{V}]$$

Il secondo membro è il flusso magnetico concatenato con il circuito

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} \quad [\text{Wb}]$$

si ottiene che :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad [\text{V}]$$

# Legge di Faraday

La legge di Faraday è diventata:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad [\text{V}]$$

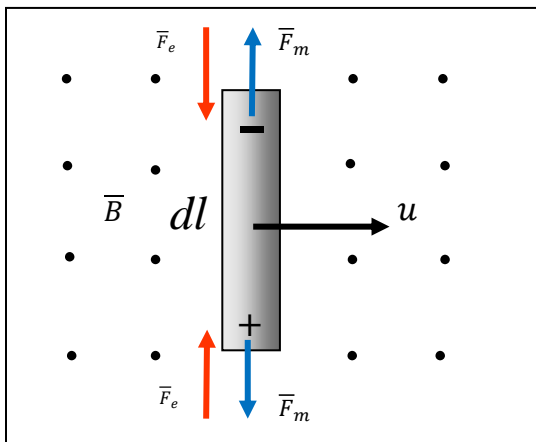
Essa stabilisce che: la forza elettromotrice indotta  $e$  in un circuito chiuso stazionario è uguale alla velocità di incremento (o decremento) del flusso magnetico che concatena il circuito, cambiata di segno, perché è tale da opporsi alla causa che l'ha generata. ***Ossia, la f.e.m. indotta in un circuito chiuso causerà una corrente che scorre in direzione tale da creare un campo e quindi un flusso concatenato che compenserà la variazione che lo ha generato.*** Questa asserzione è nota come ***legge di Lenz.***

Su tale fenomeno è basato il funzionamento della mutua induttanza e quindi del ***trasformatore.***

# Legge di Faraday

2) circuito in movimento ( $\bar{u} \neq 0$ ) in un campo magnetico statico  $\partial \bar{B} = 0$

Quando un conduttore si muove con velocità  $\bar{u}$  in un campo magnetico statico, una forza magnetica  $\bar{F}_m$  causerà il libero movimento degli elettroni nel conduttore che verranno trascinati verso una estremità del conduttore, lasciando l'altra estremità carica positivamente. Questa separazione delle cariche positive e negative crea una forza Coulombiana di attrazione  $\bar{F}_e$  tra le cariche di segno diverso.



Il processo di separazione delle cariche continua sino a quando  $\bar{F}_e + \bar{F}_m = 0$  e si raggiunge, in un tempo molto breve, uno stato di equilibrio.

# Legge di Faraday

Per un osservatore in movimento con il conduttore non si ha un movimento apparente, e il *campo elettrico indotto dalla forza magnetica* può essere interpretato, per analogia con i campi elettrostatici, come un campo elettrico agente lungo il conduttore che produce una differenza di potenziale, quindi la f.e.m. indotta la posso calcolare come:

$$e_{21} = V_2 - V_1 = - \int_1^2 \frac{\bar{F}_e}{q} \cdot d\bar{l}$$

Ma all'equilibrio  $\bar{F}_e = -\bar{F}_m$  quindi  $e_{21} = \int_1^2 \frac{\bar{F}_m}{q} \cdot d\bar{l} = \int_1^2 (\bar{u} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}$

Per un circuito chiuso con contorno  $C$ :

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = \oint_C (\bar{u} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} \quad [\text{V}]$$

Notare che, solo la parte del circuito che si muove in direzione non parallela al campo magnetico contribuisce alla f.e.m.  $e'$ .

# Legge di Faraday

3) circuito in movimento ( $\bar{u} \neq 0$ ) in un campo magnetico variabile nel tempo  $\partial \bar{B} \neq 0$

la relazione, valida per un circuito in movimento in un campo magnetico che varia nel tempo, che rappresenta la *forma generale della legge di Faraday* :

$$\oint_C \bar{E}' \cdot d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} + \oint_C (\bar{u} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} \quad [\text{V}]$$

$$\oint_C \bar{E}' \cdot d\bar{l}$$

f.e.m. indotta nel conduttore in movimento in un campo di induzione  $\bar{B}$  non stazionario.

$$- \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}$$

f.e.m. indotta dovuta alla variazione della induzione  $\bar{B}$  nel tempo.

$$\oint_C (\bar{u} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}$$

f.e.m. *mozionale* dovuta al movimento del circuito all'interno di un campo di induzione  $\bar{B}$ .

# Legge di Ampere

Oltre alle considerazioni fatte sulle interazioni dei campi elettrici e magnetici, in condizioni non stazionarie, la legge di Ampere valida per modello magnetostatico  $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$  deve essere modificato per tener conto delle ***condizioni di campo elettrico variabile***. Infatti in campi non stazionari la densità di carica varia nel tempo, e occorre tenere presente per ***il principio di conservazione della carica***:

$$\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}^3} \right]$$

Perciò nel caso non stazionario  $\nabla \cdot \bar{J} \neq 0$ . Calcolando la divergenza del primo e del secondo membro della relazione  $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ , la II identità nulla non è più verificata, infatti:

$$\text{per la II identità nulla: } \nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = 0$$

ma

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} \quad \text{con } \nabla \cdot \bar{J} \neq 0$$

# Legge di Ampere

Combinando la seconda identità nulla e l'equazione del campo di corrente non stazionario:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = 0 \\ \nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

ricaviamo un'equazione valida anche quando le grandezze di campo variano nel tempo:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Poiché  $\nabla \cdot \bar{D} = \rho$ :

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial (\nabla \cdot \bar{D})}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

# Leggi di Maxwell

Per essere coerenti con l'equazione di continuità e le condizioni di funzionamento nel caso di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  variabili nel tempo, entrambe *le equazioni rotoriche valide per l'elettrostatica e per la magnetostatica sono state opportunamente generalizzate*:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

Con le due equazioni generalizzate, si hanno complessivamente quattro equazioni differenziali coerenti, note come equazioni di Maxwell che possono essere espresse anche in forma integrale, applicando il teoremi di Stokes e della divergenza.

Quando le grandezze di campo non variano nel tempo, le relazioni si riducono a quelle valide per i modelli elettrostatici ed magnetostatici.

# Leggi di Maxwell

**Il modello matematico** per la risoluzione dei campi tempo-varianti e non, può essere descritto mediante le seguenti **4 equazioni di Maxwell**

*forma differenziale*

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

***Legge di Faraday***

*forma integrale*

$$\oint_C \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = -\int_S \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\bar{\mathbf{s}}$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

***Legge di Ampere***

$$\oint_C \bar{\mathbf{H}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = \int_S \left( \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{\mathbf{s}}$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = \rho$$

***Legge di Gauss***

$$\oint_S \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = \int_V \rho \, dv$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$$

***Legge di Gauss***

$$\oint_S \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = 0$$

# Funzioni potenziale

In condizioni di quasi stazionarietà di  $\rho$  e  $\bar{J}$ , per determinare  $V$  e  $\bar{A}$  è possibile utilizzare le formule, ottenibili dalle *equazioni di Poisson*:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} dv'$$
$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J} \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\bar{J}}{R} dv'$$

valide quindi solo in condizioni di funzionamento statiche o quasi statiche. Questo modello non è più esaustivo perché nel caso di *campi elettromagnetici variabili* dove non possono essere trascurati gli *effetti di ritardo* temporale dovuti alla velocità di propagazione finita.

Ricaviamo un modello matematico completo.

# Funzione potenziale scalare

Partiamo dalla legge di Faraday o I° equazione di Maxwell

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Il concetto di *potenziale vettore magnetico* é stato introdotto sulla base della solenoidalità del vettore  $\bar{B}$ :

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad [T]$$

Combinando le 2 equazioni:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \bar{B} = \nabla \times \bar{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \bar{A})}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left( \bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Poiché la somma delle due quantità vettoriali tra parentesi risulta irrotazionale allora possiamo definire il potenziale scalare  $V$  tale che:

$$\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

# Funzione potenziale scalare

Quindi nel caso più generale di *campi variabili con il tempo*, il campo elettrico  $\bar{E}$  è funzione *potenziale elettrico scalare*  $V$  e del potenziale magnetico vettoriale  $\bar{A}$ :

$$\bar{E} = -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad \left[ \begin{array}{c} V \\ m \end{array} \right]$$

dipende:

- dalle *concentrazioni di carica* attraverso il termine  $\nabla V$
- dai *campi magnetici tempo-variabili* attraverso il termine  $-\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

Se ci mettiamo in condizioni statiche, ritroviamo:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \bar{E} = -\nabla V \quad \left[ \begin{array}{c} V \\ m \end{array} \right]$$

# Equazione d'onda per il potenziale vettore magnetico

Per la legge di Ampere o II° equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

e per le relazioni costitutive:  $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu}$  e  $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$

si può scrivere:  $\nabla \times \frac{\bar{B}}{\mu} = \bar{J} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

Essendo  $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$  e  $\bar{E} = -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \mu \bar{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)$$

# Equazione d'onda per il potenziale vettore magnetico

Ma il rotore del rotore di un vettore può essere espresso come:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \mu \bar{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)$$

per cui:

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \mu \bar{j} - \nabla \left( \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \quad o$$

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{j} - \nabla \left( \nabla \cdot \bar{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

Poiché la definizione di un vettore richiede la specificazione sia del *rotore* che della *divergenza*, essendo il rotore di  $\bar{A}$  già definito dall'equazione  $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$ , possiamo scegliere opportunamente il valore della sua divergenza.

# Equazione d'onda per il potenziale vettore magnetico

Assumendo:  $\nabla \cdot \bar{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$

La divergenza di  $\bar{A}$  è definita con la *condizione di Lorentz per i potenziali* (coerente con  $\nabla \cdot \bar{A} = 0$  per i campi statici), da cui si ottiene *l'equazione dell'onda non omogenea per il potenziale vettore  $\bar{A}$* :

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu\bar{J} - \nabla \left( \nabla \cdot \bar{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

⇓

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu\bar{J}$$

Si chiama equazione d'onda perché le sue soluzioni sono onde che viaggiano ad una velocità pari  $u = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

# Equazione d'onda per il potenziale scalare elettrico

L'equazione d'onda non omogenea corrispondente per il potenziale scalare  $V$  può essere ottenuta combinando le relazioni:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{D} = \rho \\ \bar{E} = -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \end{cases}$$

essendo  $\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$  si ottiene:

$$\nabla \cdot \left[ \varepsilon \left( -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) \right] = \rho \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Per ottenere una relazione espressa in funzione della sola grandezza  $V$ , si utilizza *la condizione di Lorentz*:

$$\nabla \cdot \bar{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

Si ottiene l'equazione d'onda non omogenea per il potenziale scalare

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

# Equazioni d'onda in condizioni di quasi staticità

Nel caso di campi statici e quasi statici:  $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0$  e  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

le Equazioni d'onda non omogenee per campi variabili nel tempo si riducono alle Equazioni di Poisson. Infatti:

Equazioni d'onda non omogenee  $\Rightarrow$  Equazioni di Poisson e soluzioni

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J} \\ \nabla^2 V - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J} \rightarrow \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J}}{R} dv' \\ \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow V = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho}{R} dv' \end{cases}$$

dove:

$V$  potenziale elettrico scalare

$\bar{A}$  potenziale magnetico vettoriale.

# Soluzioni delle equazioni d'onda

Per ricavare le soluzioni delle equazioni d'onda non omogenee si seguono i seguenti passi:

1. Si considera da prima il caso più semplice di un campo elettromagnetico generato da una carica elementare al tempo  $t$

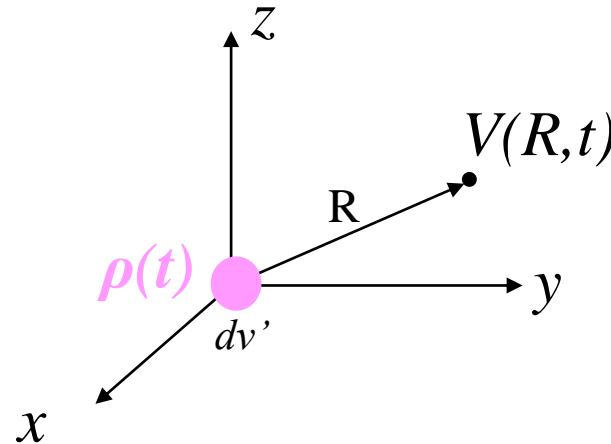
$$\Delta q(t) = \rho(t) \cdot \Delta v'$$

2. si estende il procedimento al caso più generale di una distribuzione di cariche qualsiasi, sommando gli effetti di tutte le cariche elementari in una regione data
3. infine si esamina il caso di una distribuzione continua di cariche e si procede analogamente a quanto già fatto per le condizioni statiche, sostituendo all'operatore sommatoria l'operatore integrale.

# Soluzioni delle equazioni d'onda per il potenziale scalare

Per determinare la *soluzione della equazione non omogenea per il potenziale scalare*:

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$



si consideri da prima la **soluzione per il caso di una carica elementare** al tempo  $t$ ,  $\Delta q = \rho(t) \cdot \Delta v'$  localizzata nell'origine degli assi. In questo caso è conveniente considerare le **coordinate sferiche**, cosicché il potenziale  $V(R, t)$  in un punto  $P$  dipende dalla sola  $R$ , distanza del punto dalla carica  $\rho(t)$ , e dal tempo  $t$ . In tutti i punti, fatta eccezione per l'origine dove è localizzata la carica elementare (per  $R=0$ ) è valida l'equazione omogenea.

# Soluzioni delle equazioni d'onda per il potenziale scalare

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

In coordinate sferiche:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

↓

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) - \mu\varepsilon R^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

*La funzione potenziale  $V(R,t)$  soddisfa l'equazione omogenea per tutti i punti, fatta eccezione per l'origine dove è localizzata la carica elementare (per  $R=0$  l'equazione omogenea non è valida).*

Se si introduce una *nuova variabile*  $U(R,t)$  legata a  $V$  dalla relazione:

$$V(R,t) = \frac{1}{R} U(R,t) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

si ottiene l'equazione d'onda *omogenea unidimensionale* in una forma più semplice.

# Soluzioni delle equazioni d'onda per il potenziale scalare

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

Si può dimostrare per sostituzione diretta che ogni funzione f:

$$f(t - R\sqrt{\mu\epsilon}) \text{ o } f(t + R\sqrt{\mu\epsilon})$$

due volte differenziabile, é una soluzione della equazione d'onda omogenea unidimensionale, quindi U si può esprimere come:

$$U(R, t) = f(t - R\sqrt{\mu\epsilon}) = f(t - R/u)$$

*e rappresenta un'onda che viaggia in direzione radiale R con velocità di propagazione  $u = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ . Il tempo di trasmissione  $t_T$  dell'onda, dalla posizione della sorgente nell'origine degli assi al punto P distante R, è  $t_T = R/u = R\sqrt{\mu\epsilon}$ .*

# Soluzioni delle equazioni d'onda per il potenziale scalare

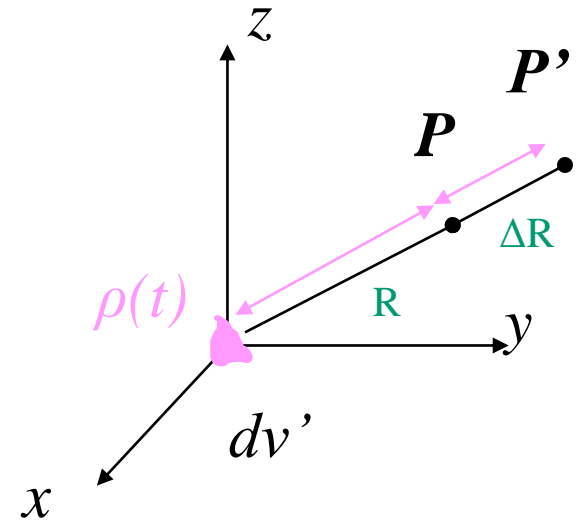
La funzione nel punto  $P'$  distante  $R + \Delta R$  e nel tempo  $t + \Delta t$  sarà:

$$\begin{aligned} U(R + \Delta R, t + \Delta t) &= f [t + \Delta t - (R + \Delta R)/u] = \\ &= f [t + \Delta R/u - R - \Delta R/u] = f (t - R/u) \\ &= U(R, t) \end{aligned}$$

Quindi la funzione, **traslando nello spazio al variare del tempo, conserva la sua forma**. Si può quindi scrivere:

$$V(R, t) = \frac{1}{R} U(R, t) = \frac{1}{R} f(t - R/u).$$

*La funzione di  $(t + R/u)$  non può essere una soluzione fisica, ma solo una soluzione matematica perché è impossibile che l'effetto della densità di carica sia sentito in un punto distante dalla sorgente prima che la sorgente abbia iniziato a trasmettere o abbia iniziato a variare nel tempo (non causalità).*



# Soluzioni delle equazioni d'onda per il potenziale scalare

In *condizioni statiche*, il potenziale  $V$  dovuto a una carica elementare statica  $\Delta q = \rho \cdot \Delta v'$  disposta nell'origine, è pari a:

$$V(R) = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon R} = \frac{\rho\Delta v'}{4\pi\epsilon R}$$

Per i *campi variabili nel tempo* si adatta questo modello matematico tenendo conto del ritardo  $R/u$  con cui si sente l'effetto della densità di carica  $\rho$  alla distanza  $R$ , in modo che sia soddisfatta anche l'espressione:

$$V(R, t) = \frac{1}{R} f(t - R/u)$$

Per cui:

$$V(R, t) = \frac{1}{R} f(t - R/u) = \frac{\rho(t - R/u)\Delta v'}{4\pi\epsilon R}$$

Questa espressione è la soluzione dell'equazione d'onda omogenea

# Potenziale scalare ritardato

Per ottenere la soluzione valida anche per l'equazione non omogenea integriamo l'espressione precedente sul volume  $v'$  che comprende la sorgente. In questo modo si ottiene il potenziale  $V$  dovuto a una distribuzione di carica in un volume  $v'$ , che tenga conto del tempo di propagazione :

$$V(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \frac{\rho(t - R/u)}{R} dv'$$

Questa equazione é chiamata *equazione del potenziale scalare ritardato*, essa è che il potenziale scalare  $V(R,t)$  in un punto P alla distanza  $R$  dalla sorgente e al tempo  $t$ , dipende dal valore che la densità di carica ha assunto all'istante precedente  $(t-R/u)$ , ossia *é richiesto un tempo  $t_T = R/u$  perché l'effetto della densità di carica  $\rho$  sia sentito alla distanza  $R$ .*

# Potenziale vettore ritardato

Analogamente a quanto visto per il potenziale scalare si deduce la soluzione della equazione dell'onda non omogenea per il potenziale magnetico vettoriale  $\bar{A}$  detta *equazione del potenziale vettore ritardato*:

Per i campi statici o quasi statici  
velocità di trasmissione è infinita

$$u = \infty$$

$$\bar{A}(R,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\bar{J}(t)}{R} dv' \quad \left[ \frac{Wb}{m} \right]$$

Per i campi dinamici la  
velocità di trasmissione è finita

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\bar{A}(R,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\bar{J}(t - R/u)}{R} dv' \quad \left[ \frac{Wb}{m} \right]$$

# Soluzioni delle equazioni d'onda

Le grandezze del campo elettromagnetico  $\bar{E}$  e  $\bar{B}$  si ottengono differenziando le espressioni di  $\bar{A}$  e di  $V$  e risultano anch'esse funzione di  $(t-R/u)$  e quindi ritardate nel tempo.

$$\begin{cases} \bar{E} = -\nabla V(R,t) - \frac{\partial \bar{A}(R,t)}{\partial t} \\ \bar{B} = \nabla \times \bar{A}(R,t) \end{cases}$$

## Nel modello dinamico :

Il tempo di trasmissione delle onde elettromagnetiche non è trascurabile ( $t_T \neq 0$ ). La velocità di propagazione finita implica che gli effetti delle cariche e delle correnti variabili vengano sentite ritardo in punti distanti da queste.

## Nel modello approssimato quasi statico:

si trascura l'effetto del ritardo temporale, velocità di trasmissione  $u = \infty$ , e si assume una risposta istantanea (tempo di trasmissione  $t_T=0$ ). Tale modello è assunto implicitamente nella trattazione dei *problemi circuitali*.

# Equazioni di Maxwell in un mezzo non conduttore

Nella regione di propagazione dell'onda (regione in cui  $\rho=0$ ) se il mezzo di propagazione è *non conduttore* ( $\gamma=0 \rightarrow J=0$ ) *lineare, isotropo e omogeneo* ( $\epsilon$  e  $\mu$  costanti), le equazioni di Maxwell diventano:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\delta \bar{B}}{\delta t} \quad \bar{B} = \mu \bar{H} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\delta \bar{H}}{\delta t}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad \bar{J} = 0 \text{ e } \bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \bar{H} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad \rho = 0 \text{ e } \bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad \bar{B} = \mu \bar{H} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{H} = 0$$

# Equazioni d'onda in un mezzo non conduttore

Facendo il rotore di entrambi i membri delle due equazioni rotoriche, otteniamo le equazioni *Equazioni d'onda vettoriali* sono *omogenee*:

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \bar{H} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad \text{con } u = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$$

In coordinate cartesiane ognuna equivale a tre equazioni d'onda scalari unidimensionali, omogenee. Ciascuna delle tre componenti (qualunque sia il sistema di riferimento scelto) delle due grandezze di campo, deve soddisfare un'equazione *d'onda unidimensionale* del tipo:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

Le cui soluzioni sappiamo essere delle funzioni d'onde.

# Equazioni d'onda in un mezzo non conduttore

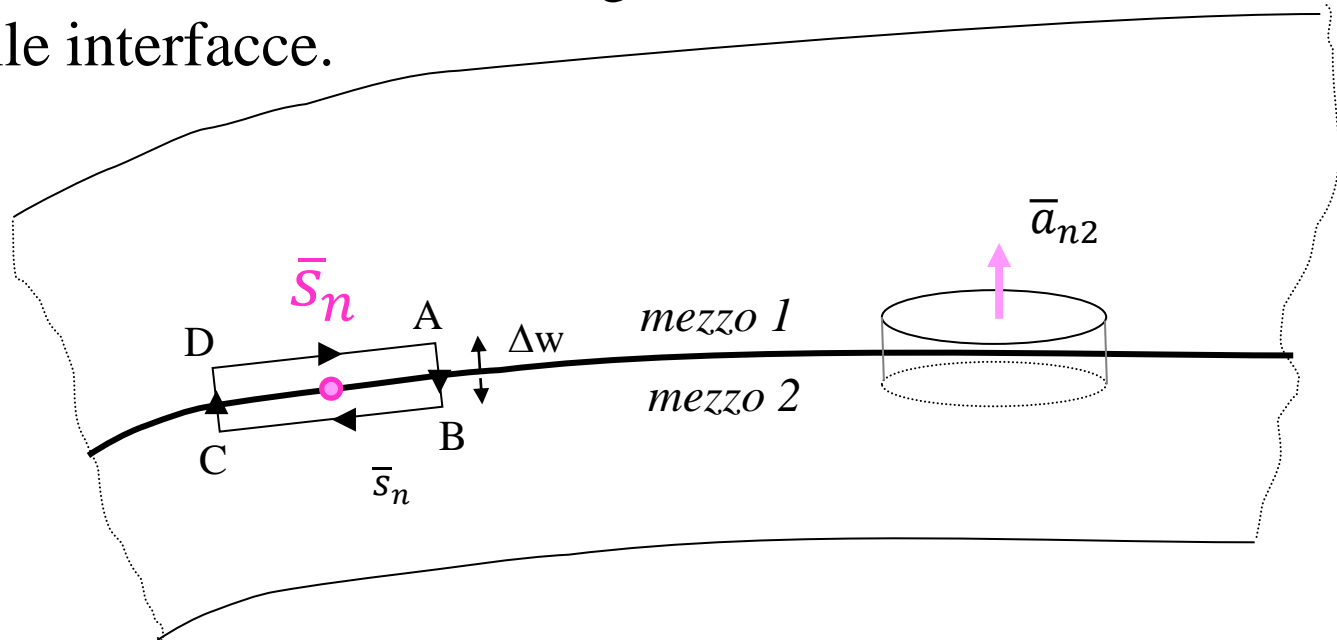
Le soluzioni dell'equazioni *d'onda convenzionali in una regione priva di sorgenti*, che descrivono come si propagano le grandezze di campo in mezzi non conduttori e privi di cariche libere, sono le Equazioni delle le onde elettromagnetiche.

*Esse servono per determinare la distribuzione del campo in mezzi non conduttori, in funzione del tempo e dello spazio.* In altri termini ci permettono studiare non solo come le onde sono originate, ma *come si propagano* focalizzando questo ultimo aspetto.

Queste equazioni si chiamano *equazioni della diffusione* essendo formalmente identiche alle equazioni utilizzate per risolvere *problemi di diffusione del calore.*

# Condizioni al contorno

Per risolvere problemi elettromagnetici che interessano regioni con parametri costitutivi  $\mu$ ,  $\epsilon$  e  $\rho$  diversi, é necessario conoscere le condizioni al contorno che le grandezze  $\bar{E}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{B}$  e  $\bar{H}$  devono soddisfare nelle interfacce.



*Le condizioni al contorno* si ottengono applicando le equazioni di Maxwell nella forma integrale in una piccola regione nella interfaccia tra i due mezzi 1 e 2 , analogamente a quanto fatto per i campi statici.

# Condizioni al contorno

Le condizioni di continuità al contorno per le *componenti tangenziali* e *normali* di  $\bar{E}$  e  $\bar{H}$ , si ottengono dalle equazioni rotoriche di Maxwell espresse in forma integrale:

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{E} &= -\frac{\delta \bar{B}}{\delta t} & \nabla \times \bar{H} &= \bar{J} + \frac{\delta \bar{D}}{\delta t} \\ \int_s \nabla \times \bar{E} \cdot d\bar{s} &= -\int_s \frac{d\bar{B}}{dt} \cdot d\bar{s} & \int_s \nabla \times \bar{H} \cdot d\bar{s} &= \int_s \left( \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{s} \\ \oint_c \bar{E} \cdot d\bar{l} &= -\frac{d\Phi}{dt} & \oint_c \bar{H} \cdot d\bar{l} &= \int_s \left( \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \cdot d\bar{s} \\ E_{1t} &= E_{2t} & H_{1t} \Delta w - H_{2t} \Delta w &= I_{sn} \\ & & H_{1t} - H_{2t} &= J_{sn}\end{aligned}$$

Le equazioni sono analoghe a quelle trovate per i campi elettrostatici e magnetostatici in quanto *il contributo della integrazione dei termini  $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$  e  $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$  risulta trascurabile perché l'area sulla quale si valuta la variazione è molto piccola.*

# Condizioni al contorno

Analogamente le condizioni al contorno per le *componenti tangenziali e normali* di  $\bar{D}$  e  $\bar{B}$ , si ottengono dalle equazioni di Maxwell nelle quali compare l'operatore divergenza in forma integrale :

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \bar{D} \, dv = \int_V \rho \, dv$$

$$\int_V \nabla \cdot \bar{B} \, dv = 0$$

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_V \rho \, dv$$

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

Le equazioni sono analoghe a quelle trovate per i campi elettrostatici e magnetostatici, perché ricavate dalle stesse equazioni della divergenza di Maxwell.

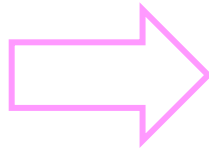
# Interfaccia tra due mezzi lineari privi di perdite

Un mezzo lineare privo di perdite (dielettrico perfetto  $\gamma = 0$ ) può essere caratterizzato dalla permittività  $\varepsilon$  e la permeabilità  $\mu$ .

*Generalmente non ci sono né cariche libere, né correnti di conduzione nella interfaccia tra i due mezzi privi di perdite.*

Nelle equazioni generali che esprimono le condizioni al contorno si pone:

$$\rho_s = 0 \text{ e } \bar{j} = 0$$

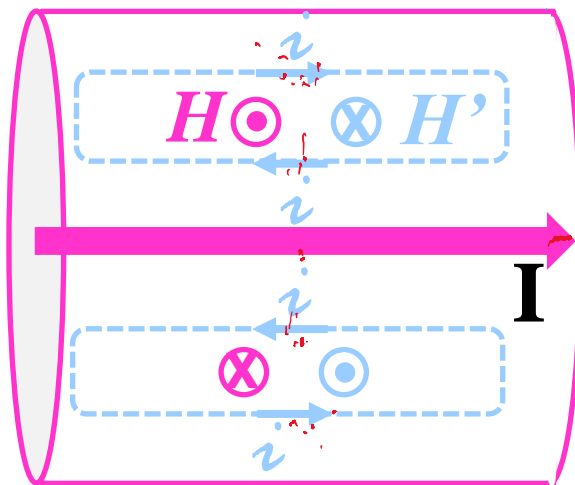


ottenendo le condizioni al contorno tra due mezzi privi di perdite.

$$\begin{aligned} E_{1t} = E_{2t} &\rightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \\ H_{1t} = H_{2t} &\rightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \\ D_{1n} = D_{2n} &\rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \\ B_{1n} = B_{2n} &\rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \end{aligned}$$

# Conduttore perfetto in un campo magnetico variabile

All'interno di un conduttore perfetto  $(\bar{E}, \bar{D})$  e  $(\bar{B}, \bar{H})$  sono nulli. Nei conduttori percorsi da corrente di conduzione variabile nel tempo si generano delle correnti indotte che tendono ad opporsi alla variazione del campo  $B$  che la stessa corrente di conduzione genera. Le correnti indotte hanno un verso tale che il campo indotto  $H'$  si opponga al campo  $H$ . Le correnti indotte contribuiscono ad indebolire la corrente all'interno del conduttore mentre la rafforzano nella parte più esterna (effetto pelle).



$I$  corrente di conduzione

$H$  campo generato da  $I$

*reazione:*

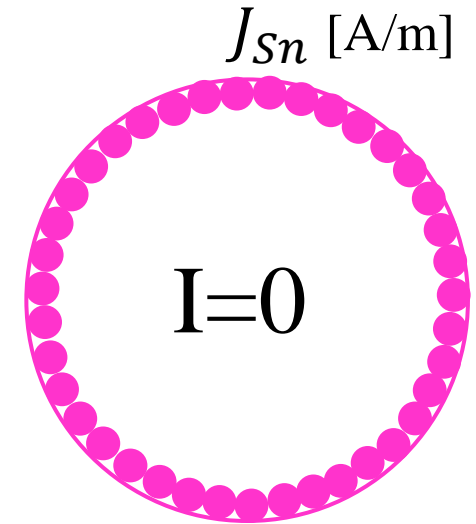
$i$  correnti indotte che generano un campo  $H'$  che va a contrastare la variazione di  $H$

# Interfaccia tra dielettrico e conduttore perfetti

In un conduttore ideale  $H'$  annulla  $H$  e, per l'effetto pelle, la corrente  $I$  scorre tutta in uno strato superficiale del metallo di spessore infinitesimo e si annulla al centro insieme. Se  $I$  è nulla è nullo anche  $E$ .

Supponendo il *mezzo 1* un dielettrico perfetto e il *mezzo 2* un conduttore perfetto, le equazioni generali per l'interfaccia diventano:

<i>Conduttore</i>	<i>Dielettrico</i>
$E_{2t} = 0$	$E_{1t} = 0$
$H_{2t} = 0$	$H_{1t} = J_{Sn}$
$D_{2n} = 0$	$D_{1n} = \rho_S$
$B_{2n} = 0$	$B_{1n} = 0$



Se sarà presente densità di carica  $\rho_S$  localizzata nell'interfaccia,  $\bar{E}$  nel mezzo 1 sarà normale alla superficie del conduttore.

# Potenza elettromagnetica

Ai campi elettromagnetici, sia che essi siano stazionari che temporaneamente, è associata una potenza elettromagnetica.

L'energia è trasportata attraverso lo spazio (sia vuoto che materia) per mezzo **di onde elettromagnetiche**.

*Per mezzo del teorema di Poynting è possibile scrivere un bilancio energetico in termini di grandezze di campo.*

Per dimostrare il teorema, si consideri che attraverso le equazioni rotoriche di Maxwell è possibile ricavare una relazione tra la velocità di trasferimento di tale energia e l'intensità del campo elettrico e del campo magnetico associati all'onda elettromagnetica trasmessa:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

# Potenza elettromagnetica

Moltiplicando scalarmente:

- la I° relazione per il campo magnetico  $\bar{H}$
- la II° per il campo elettrostatico  $-\bar{E}$

e sommando membro a membro si ha:

$$\begin{aligned}\bar{H} \cdot (\nabla \times \bar{E}) &= -\bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ -\bar{E} \cdot (\nabla \times \bar{H}) &= -\bar{E} \cdot \bar{J} - \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

---

$$\bar{H} \cdot (\nabla \times \bar{E}) - \bar{E} \cdot (\nabla \times \bar{H}) = -\bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} - \bar{E} \cdot \bar{J}$$

Per il primo membro si può verificare facilmente la seguente *identità*:

$$\bar{H} \cdot (\nabla \times \bar{E}) - \bar{E} \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H})$$

# Potenza elettromagnetica

*In un mezzo semplice*, i cui parametri costitutivi  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\gamma$  non variano con il tempo, gli addendi del secondo membro si possono esprimere :

$$\bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \bar{H} \cdot \frac{\partial (\mu \bar{H})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mu \bar{H} \cdot \bar{H})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu H^2 \right)$$

$$\bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{E} \cdot \frac{\partial (\epsilon \bar{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\epsilon \bar{E} \cdot \bar{E})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon E^2 \right)$$

$$\bar{E} \cdot \bar{J} = \bar{E} \cdot \gamma (\sigma \bar{E}) = \gamma E^2$$

---

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(x) + g(x) \cdot \frac{\partial h(x)}{\partial x}$$

$$\text{se } f(x) = g(x) \cdot g(x) \rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 2g(x) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

quindi posso scrivere:

$$g(x) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial (g(x) \cdot g(x))}{\partial x}$$

# Potenza elettromagnetica

Quindi l'equazione  $\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = -\bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \bar{E} \cdot \left( \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) - \bar{E} \cdot \bar{J}$

si può scrivere con la *relazione puntuale in funzione di  $\bar{E}$  e  $\bar{H}$* :

$$\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) - \gamma E^2$$

La *forma integrale* si ottiene *integrando* il primo e il secondo membro su un volume  $v$  e applicando al primo membro il teorema della divergenza per convertire l'integrale volumico nell'integrale superficiale sulla superficie  $S$  che delimita il volume  $v$ :

$$\oint_v \nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) \cdot d\bar{v} = \oint_S (\bar{E} \times \bar{H}) \cdot d\bar{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left( \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dv - \int_v \gamma E^2 dv$$

# Potenza elettromagnetica

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dv - \int_V \gamma E^2 dv$$

Esaminando la forma integrale della relazione trovata si vede come:

- il primo e il secondo termine a secondo membro rappresentano la variazione nel tempo della energia immagazzinata nel campo elettrico e magnetico rispettivamente
- l'ultimo termine é la potenza ohmica dissipata nel volume  $v$  dovuta al flusso della densità della corrente di conduzione  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$  in presenza del campo elettrico  $\vec{E}$ .

Per essere coerente con la *legge della conservazione della energia*, la somma dei tre termini a secondo membro deve essere uguale alla *potenza che lascia il volume  $v$* , ossia il flusso attraverso la superficie  $S$  della densità di potenza. *Perciò, il primo membro rappresenta la potenza trasmessa dall'onda elettromagnetica* attraverso la superficie  $S$  che delimita tale volume.

# Vettore di Poynting

Quindi la quantità  $\bar{E} \times \bar{H}$  é un vettore che rappresenta il *flusso di potenza trasmessa per unità di area* :

$$\bar{P} = \bar{E} \times \bar{H} \quad \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

essa é noto come *vettore di Poynting*, ossia la densità di potenza vettoriale associata al campo elettromagnetico.

*Dalla relazione si vede come non ci può essere trasporto di energia in presenza del solo campo elettrostatico  $\bar{E}$  o del solo campo magnetostatico  $\bar{H}$ .*

- In regime stazionario la potenza che fluisce attraverso un volume chiuso coincide con quella dissipa per effetto ohmico dentro il volume.
- In regime non stazionario, se il mezzo è privo di perdite ( $\gamma=0$ ) la potenza ohmica si annulla e la potenza che fluisce attraverso un volume è uguale al tasso di variazione dell'energia accumulata nei campi elettrici e magnetici.

# Teorema di Poynting

L'equazione in forma integrale può essere scritta nella seguente forma che esprime il *teorema di Poynting*, ossia la *potenza trasmessa attraverso la superficie S*:

$$-\oint_S \bar{P} \cdot d\bar{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_e + w_m) dv + \int_V p_\gamma dv$$

dove

$$\begin{cases} w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon \bar{E} \cdot \bar{E} * & \text{densità di energia elettrica} \\ w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu \bar{H} \cdot \bar{H} * & \text{densità di energia magnetica} \\ p_\sigma = \gamma E^2 = J^2 / \gamma = \gamma \bar{E} \cdot \bar{E} * = \bar{J} \cdot \bar{J} * / \gamma & \text{densità di potenza ohmica} \end{cases}$$

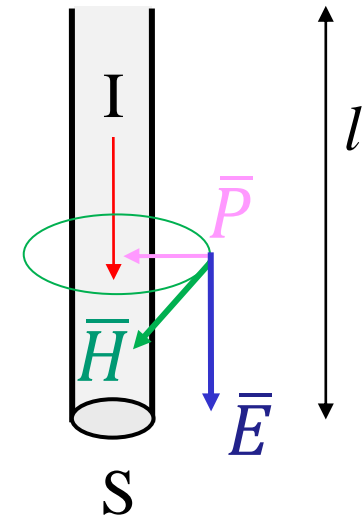
# Conduttore rettilineo

Si consideri un tratto  $l$  di un resistore rettilineo omogeneo indefinito di sezione circolare  $S$  di raggio  $r$ , percorso dalla corrente  $I$  costante. Il campo elettrico vale:

$$E = \rho J = \rho \frac{I}{S}$$

e il campo magnetico nella superficie vale:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} = \frac{JS}{2\pi r}$$



I due vettori  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  sono diretti come riportati in figura e il vettore  $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$  è in ogni punto della superficie del resistore, un vettore centripeto di modulo  $P=EH$ .

# Conduttore rettilineo

Applicando il teorema di Poynting per la superficie cilindrica chiusa di altezza  $l$  e base  $S$ :

$$\oint_S (\bar{E} \times \bar{H}) \cdot d\bar{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dv - \int_V \gamma E^2 dv$$

In questo caso i primi due termini a secondo membro sono nulli, perciò:

$$(\bar{E} \cdot \bar{H}) 2\pi r l = (\rho J^2) S l$$

Da questa equazione risulta che il flusso di  $\bar{P}$  coincide con la potenza elettrica: prodotto della differenza di potenziale  $V$  per la corrente  $I$

$$(\bar{E} \cdot \bar{l}) (2\pi r \cdot \bar{H}) = V \cdot I$$

ed è uguale alla potenza dissipata per effetto Joule, infatti:

$$\rho J^2 S l = R J^2 S^2 = R \cdot I^2$$