7
FORZA ED ENERGIA MAGNETICA

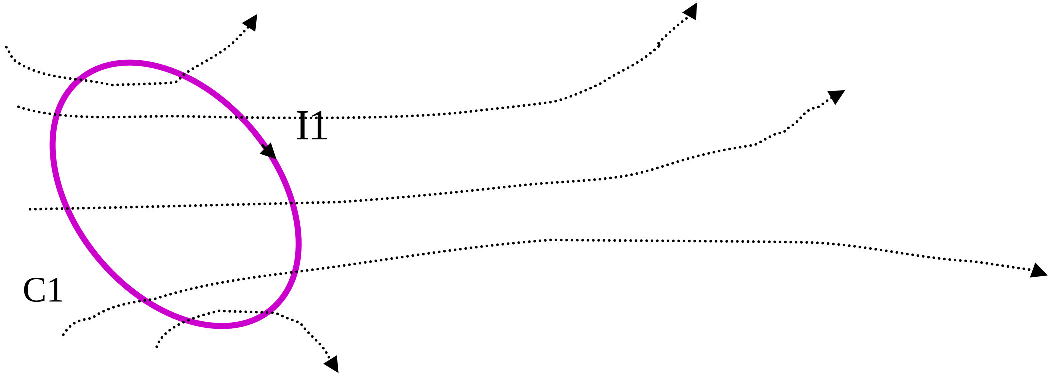
Energia Magnetica

Autoinduttanza e mutua induttanza sono stati esaminati in termini statici, considerando dunque la corrente costante.

Sebbene gli induttori privi di resistenza si comportino come un corto circuito in regime stazionario (in c.c.) diventa necessario studiare il campo magnetico dovuto a ***correnti variabili*** quando si vogliono studiare gli ***effetti delle induttanze nei circuiti e nei campi magnetici***. Ora assumiamo sia valida la condizione di ***quasi staticità,*** con questa ipotesi assumiamo che la *variazione della corrente sia così lenta che* le dimensioni del circuito siano trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda della corrente. In questa condizione *possono essere trascurati i fenomeni di radiazione e il ritardo di propagazione del campo elettromagnetico.*

Energia Magnetica

Si consideri una spira di induttanza L_1 percorsa da una corrente variabile che, in un certo intervallo di tempo, passa 0 a I_1.



In base alla *legge di Lenz*, nella spira verrà indotta una forza elettromotrice $\boldsymbol{e_1}$, tale da opporsi alla variazione di corrente che l'ha generata, data da:

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$$

In un circuito non dissipativo (*R=0*) la $\boldsymbol{e_1}$ compensa perfettamente la tensione $\boldsymbol{V_1}$ del generatore che alimenta la spira

$$V_1 = -e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Energia Magnetica

Il lavoro compiuto dall'esterno per incrementare la corrente da 0 a I_1 nella spira 1 sarà:

$$W_1 = \int V_1\, i_1 dt = \int e_1\, i_1 dt = \int \left(L_1 \frac{di_1}{dt} \right) i_1\, dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1\, di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

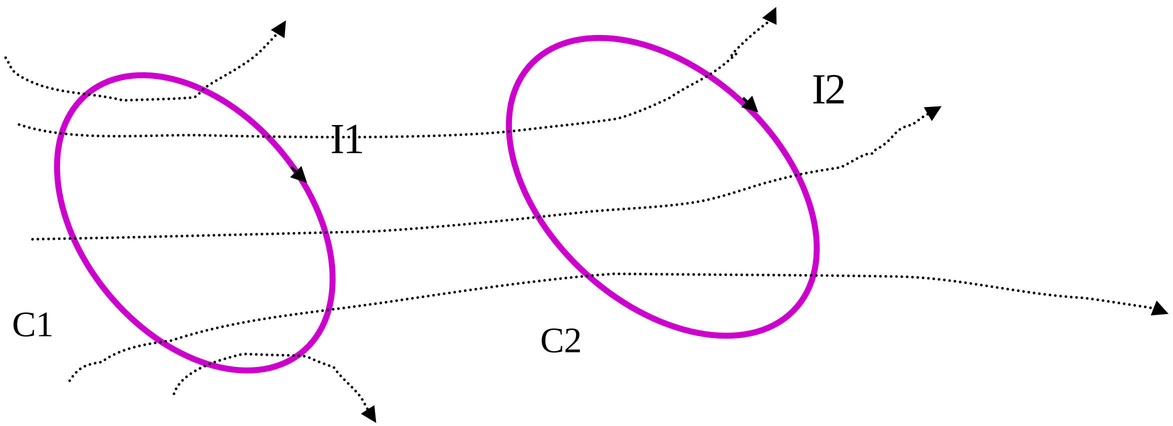
e poiché per i mezzi lineari il flusso concatenato è $\Phi_1 = L_1 I_1 \rightarrow L_1 = \Phi_1 / I_1$, Il lavoro necessario per portare una correnti in una spire conduttrici da 0 ad I_1, viene immagazzinato sotto forma di energia magnetica.

l'energia magnetica immagazzinata, può essere espressa anche in funzione del flusso concatenato :

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 = \frac{1}{2} I_1 \Phi_1$$

Energia Magnetica

Analogamente, è possibile calcolare l'energia magnetica immagazzinata nel caso di due spire percorse dalle correnti $\boldsymbol{i_1}$ e $\boldsymbol{i_2}$ rispettivamente con correnti inizialmente nulle, che siano incrementate rispettivamente da $0 \rightarrow$ sino ai valori $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{I_2}$.



Per determinare il lavoro richiesto, applichiamo il principio di ***sovrapposizione degli effetti***.

Energia Magnetica

I. ***Manteniamo $i_2 = 0$ (circuito 2 aperto) e incrementiamo i_1 da 0 a I_1***. Ciò richiede un lavoro W_{11} nella spira C_1 e nessun lavoro nella spira C_2, perché $i_2=0$:

$$V_{11} = -e_{11} = L_{11}\frac{di_1}{dt} \Longrightarrow W_{11} = \int V_{11}\cdot i_1 dt = L_1\int_0^{I_1} i_1\, di_1 = \frac{1}{2}L_1 I_1^2$$

$$V_{21} = e_{21} = L_{21}\frac{di_1}{dt} \Longrightarrow W_{12} = \int V_{21}\, i_2 dt = 0 \quad \text{Perché } i_2=0$$

II. ***Manteniamo $i_1= I_1$ costante e incrementiamo i_2 da 0 a I_2***. A causa del *mutuo accoppiamento*, una parte del flusso magnetico dovuto a i_2 si concatena con la spira C_1, inducendo una *f.e.m* e_{12} che deve essere compensata con un aumento della tensione applicata v_{12} a cui è associata una energia W_{12}:

$$V_{12} = -e_{12} = L_{12}\frac{di_2}{dt} \Longrightarrow W_{12} = \int V_{12} I_1 dt = L_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = L_{12} I_1 I_2$$

Energia Magnetica

Allo stesso modo, per poter aumentare la corrente al valore I_2, deve essere fatto un lavoro W_{22} sulla spira C_2

$$\mathrm{v}_{22} = -e_{22} = L_{22}\frac{di_2}{dt} \quad \Longrightarrow \quad W_{22} = \int \mathrm{v}_{22} \cdot i_2 dt = L_{22}\int_0^{I_1} i_2 di_2 = \frac{1}{2}L_{22}I_2^2$$

III. Applichiamo la sovrapposizione degli effetti per determinare il lavoro totale richiesto per far circolare entrambe le correnti nelle 2 spire:

$$W_{tot} = W_{11} + W_{21} + W_{22} = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + L_{21}I_1 I_2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} L_{kj} I_j I_k$$

Questa relazione può essere scritta in forma compatta ad un sistema di N spire :

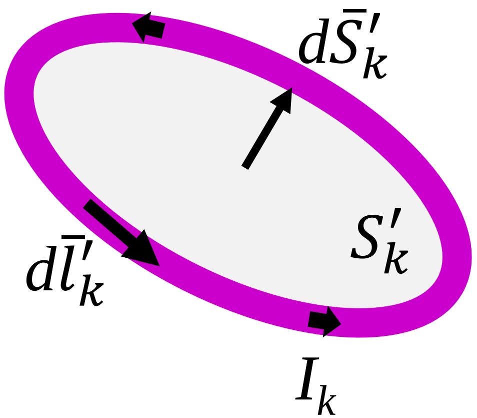
$$W_{tot} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} L_{kj} I_j I_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{N} L_{kj} I_j\right] I_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Phi_k I_k$$

Dove Φ_k *è il flusso concatenato alla spira k-esima dovuto a tutte le* I_j.

Energia Magnetica in funzione delle grandezze di campo

Possiamo riscrivere l'equazione precedente in modo tale da far comparire i campi. Consideriamo un campo di corrente, *ogni singolo tubo di flusso può essere visto come una spira circolare*, l'intero campo di corrente può essere considerato come costituito da N filamenti elementari di correnti aventi un percorso chiuso l_k' e che delimitano una sezione s_k' attraverso il quale si concatena un flusso Φ_k

Tubo di flusso l_k'



$$\Phi_k = \int_{S_k'} \bar{B} \cdot d\bar{S}_k' = \oint_{l_k'} \bar{A} \cdot d\bar{l}_k'$$

Energia magnetica associata al k-esimo filamento:

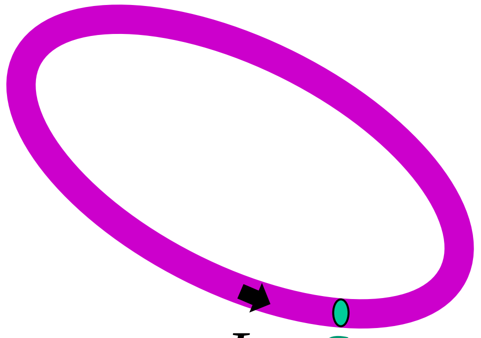
$$W_k = \frac{1}{2}\Phi_k I_k = \frac{1}{2} I_k \oint_{l_{k'}} \bar{A} \cdot d\bar{l}_k'$$

Energia Magnetica in funzione delle grandezze di campo

L'energia magnetica associata agli N filamenti può essere scritta:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} I_k \oint_{l'_k} \bar{A}\cdot\, d\bar{l}'_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \oint_{l'_k} \bar{A}\cdot\, I_k d\bar{l}'_k$$

Considerando che in un tubo di flusso *J* e *dl'* hanno tutto la stessa direzione e lo stesso verso di *I*



$$I_k d\bar{l}'_k = \bar{J}\boldsymbol{s_k} dl'_k = \bar{J} dv'_k$$

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \int_{v'_k} \bar{A}\cdot\bar{J}\ dv'_k = \frac{1}{2}\int_{v'} \bar{A}\cdot\bar{J}\ dv'_k$$

Dove *v'* è il volume occupato dal campo di corrente.

Dati due campi vettoriali $\bar{F}$ e $\bar{G}$ è valida la seguente identità vettoriale:

$$\nabla\cdot(\bar{G}\times\bar{F}) = F\cdot(\nabla\times\bar{G}) - \bar{G}\cdot(\nabla\times\bar{F})$$

se poniamo $\bar{G} = \bar{A}$ e $\bar{F} = \bar{H}$, possiamo scrivere:

$$\bar{A}\cdot(\nabla\times\bar{H}) = \bar{H}\cdot(\nabla\times\bar{A}) - \nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{H})$$

Energia Magnetica in funzione delle grandezze di campo

Sostituendo nell'equazione precedente:

$$\begin{cases} \nabla \times \overline{A} = \overline{B} \\ \nabla \times \overline{H} = J \end{cases}$$

Otteniamo:

$$\nabla \cdot (\overline{A} \times \overline{H}) = \overline{H} \cdot \overline{B} - \overline{A} \cdot \overline{J} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{A} \cdot \overline{J} = \overline{H} \cdot \overline{B} - \nabla \cdot (\overline{A} \times \overline{H})$$

L'espressione dell'energia magnetica assume la forma:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v'} \overline{A} \cdot \overline{J}\, dv' = \frac{1}{2} \int_{v'} \overline{H} \cdot \overline{B}\, dv' + \int_{v'} \nabla' \cdot (\overline{A} \times \overline{H})\, dv'$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v'} \overline{H} \cdot \overline{B}\, dv' + \oint_{S'} \overline{A} \times \overline{H}\, d\overline{s}\,'$$

$|\bar{A}|$ e $|\overline{H}|$ diminuisco all'aumentare della distanza, rispettivamente con legge lineare e quadratica, dunque $|\bar{A} \times \overline{H}| \propto 1/R^3$ perciò se il volume della sorgente è abbastanza grande il contributo del secondo integrale è nullo.

Energia Magnetica in funzione delle grandezze di campo

Si dimostra dunque che ***l'energia magnetica totale W$_m$*** necessaria per produrre un'induzione $\bar{B}$ in un volume *v'* dovuta ad distribuzione continua di corrente è:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{v'} \overline{H} \cdot \overline{B}\, dv' \qquad [J]$$

Dove $w_m = \frac{1}{2}\overline{H} \cdot \overline{B} \qquad \left[\frac{J}{m^3}\right]$ è ***l'energia magnetica specifica.***

per i mezzi lineari con permeabilità costante, dove $H = \frac{B}{\mu}$, si ha:

$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2} B\, H$$

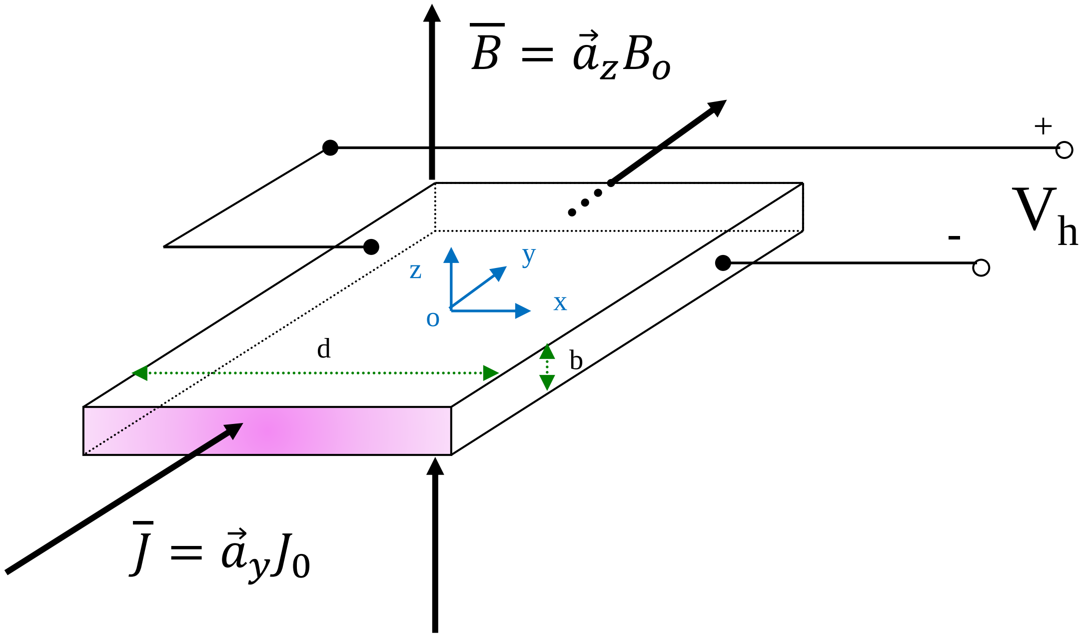
Poiché, nel caso della singola spira, l'energia magnetica immagazzinata è esprimibile in funzione della autoinduttanza (o induttanza) *L:*

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \qquad [J]$$

si può determinare L direttamente da $\bar{B}$ e $\bar{H}$.

Effetto Hall

Si consideri un materiale conduttore con sezione trasversale rettangolare immerso in un campo magnetico uniforme $\bar{B} = \vec{a}_z B_0$ e percorso da una densità di corrente continua $\bar{J}$=$J_0 \vec{a}_y = N q \bar{u}$

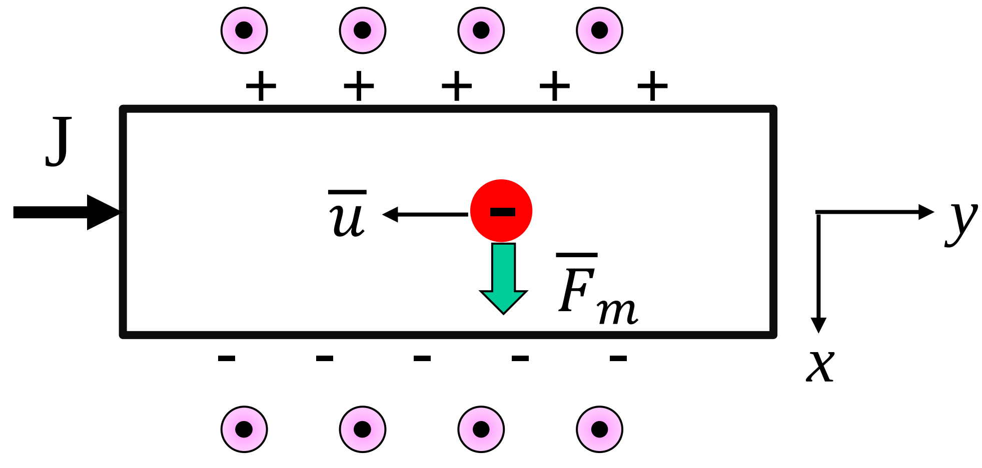


- N è il numero di cariche per unità di volume
- q carica trasportata
- u velocità

Per la relazione $\bar{F}_m$=$q\bar{u} \times \bar{B}$, ciascuna carica in movimento sarà sottoposta a una forza perpendicolare a $\bar{B}$ e a $\bar{u}$.

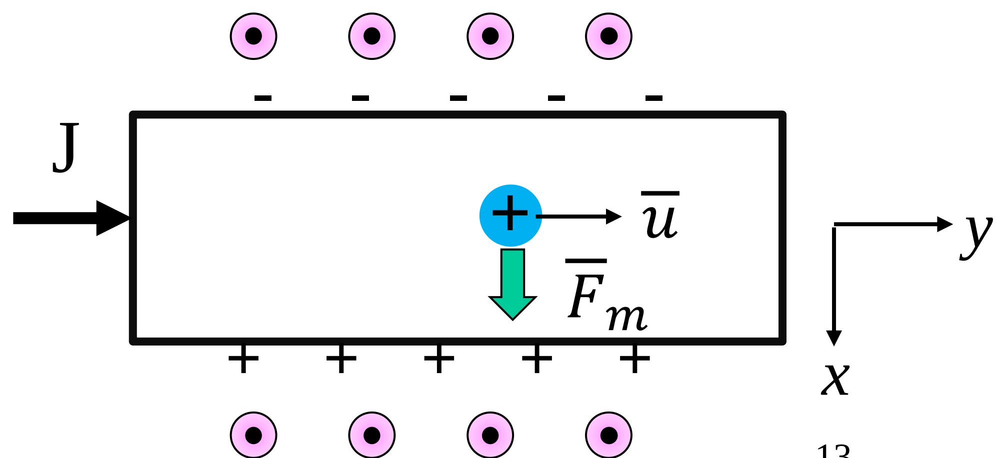
Effetto Hall

a) conduttore o semiconduttore di tipo n



$$\overline{F}_m = -q(\overline{u} \times \overline{B})$$

b) conduttore o semiconduttore di tipo p



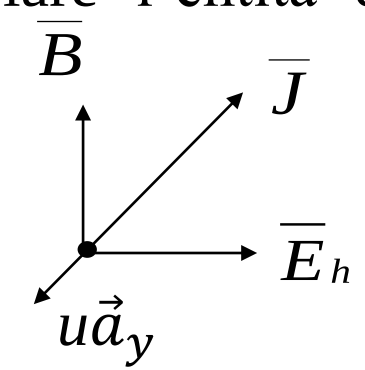
$$\overline{F}_m = q(\overline{u} \times \overline{B})$$

Effetto Hall

a) conduttore o semiconduttore di tipo n

Le cariche trascinate sono elettroni, e q è negativa. La forza magnetica tende a muovere gli elettroni lungo la direzione x, creando un campo elettrico trasversale E_x. Questo effetto è noto come **effetto Hall.** Il fenomeno continua sino a quando il campo trasversale sarà sufficiente a fermare il trasporto delle cariche e la forza risultante sulle cariche sarà nulla ($\overline{F}_e$ bilancia $\overline{F}_m$).

Imponendo questa condizione, è possibile calcolare l'entità del campo elettrico trasversale generato:



$$\overline{F} = \overline{F}_e + \overline{F}_m = -q(\overline{E}_h + \overline{u} \times \overline{B}) = 0$$

perciò

$$\overline{\mathrm{E}}_{\mathrm{h}} = -\left(\overline{u} \,\mathrm{x}\, \overline{B}\right) = -\left(-\vec{a}_y u \times \vec{a}_z B_o\right) = \vec{a}_x \, u B_o$$

Effetto Hall

Integrando lungo la direzione x entrambi i membri dell'equazione precedente ottengo la differenza di potenziale trasversale V_h che si stabilisce tra le due facce del materiale per effetto del trascinamento degli elettroni:

$$\int_0^d E_h \, dx = uB_o \int_0^d dx \Rightarrow V_h = uB_o d$$

V_h è chiamata ***tensione di Hall.*** Il rapporto $\frac{E_h}{J_z B_0} = \frac{1}{Nq}$, ottenuto sostituendo $u = \frac{J_z}{Nq}$ nell'equazione precedente, è chiamato ***coefficiente di Hall e*** caratterizza il materiale.

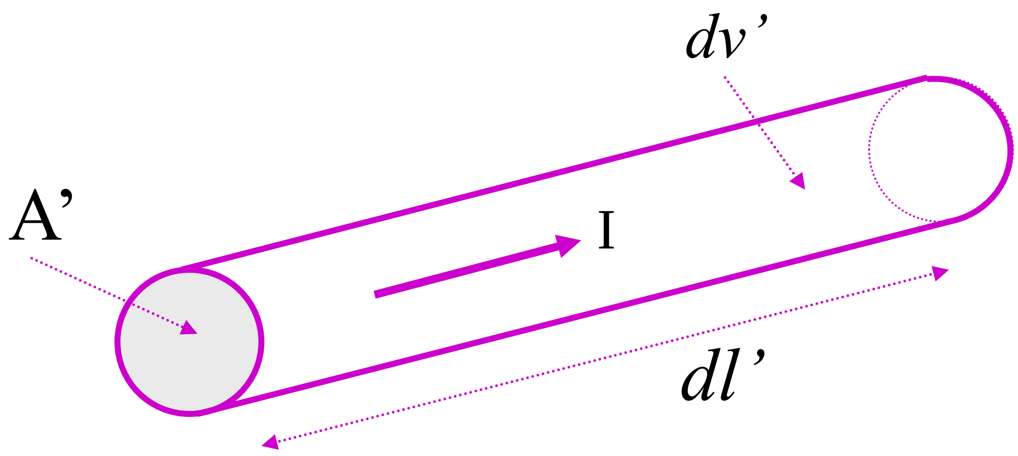
Caso b): conduttore o semiconduttore di tipo p.
Le cariche trascinate sono le *buche*, o *cariche positive. L*'effetto Hall sarà ugualmente presente, ma il potenziale che si stabilisce sarà di segno contrario al caso precedente.

Effetto Hall

L’effetto Hall può essere usato per:

- misurare il campo magnetico $H = f\,(B)$;
- determinare la natura del materiale, ossia il segno predominante delle cariche trascinate (distinguendo un semiconduttore di tipo n da uno di tipo p);
- realizzare un generatore elementare di corrente elettrica Magnetoidrodinamico MHD, che non necessita di turbine, ossia di parti meccaniche in movimento, quindi in grado di operare con temperature del gas ionizzato in movimento molto più elevate. Con la conversione diretta MHD si possano raggiungere efficienze termodinamiche tra il 50 e il 60 %.

Forze Magnetica



$$\overline{F}_m = q\,\overline{u} \times \overline{B} \quad [\mathrm{N}]$$

$$\mathrm{dq} = \mathrm{Nq}\,\mathrm{d}v' = \mathrm{Nq}\,\mathrm{A}'dl'$$

Si consideri un elemento *dl* di un **corpo conduttore** di sezione trasversale *A'*,

- immerso in un campo d'induzione $\overline{B}$
- percorso dalla corrente elettrica *I*

Se *N* sono le cariche trascinate per unità di volume con una velocità $\bar{v}$***, la forza magnetica*** che agisce sull'elemento infinitesimo *dl* sarà:

$$d\overline{F}_m = NqA'dl'\,\overline{u} \times \overline{B}$$

Forze Magnetica

$$d\overline{F}_m = NqA' \left|\overline{dl'}\right| \overline{u} \times \overline{B} = NqA'|\overline{u}| d\bar{l}' \times \overline{B}$$

Dove $\overline{u}$ è la velocità del portatore di carica q. Le due espressioni sono equivalenti perché la velocità e l'asse del conduttore hanno la stessa direzione, poiché le cariche sono vincolate a muoversi nella direzione della dimensione prevalente del conduttore. Inoltre, essendo:

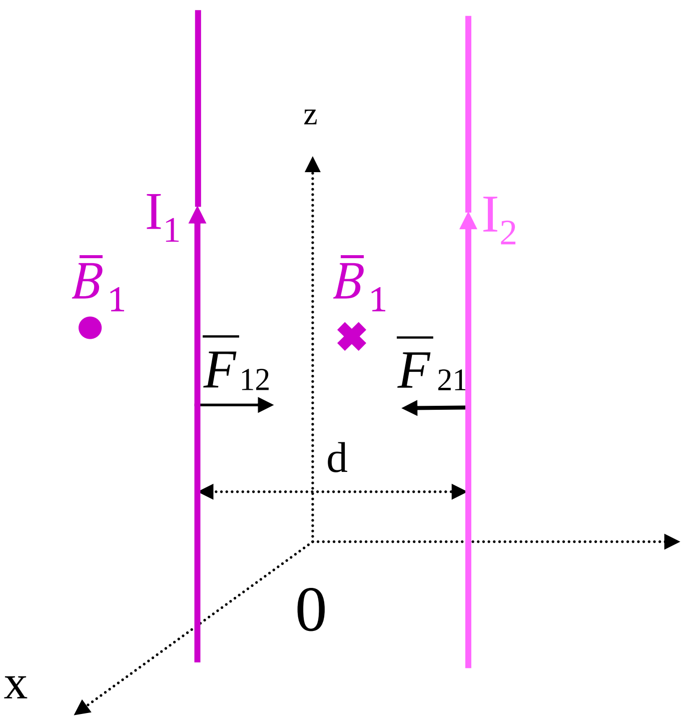
$$NqA'|\overline{u}| = NqA\frac{dl'}{dt} = \frac{q(Nd\mathrm{v}')}{dt} = \frac{dq}{dt} = I$$

*la **forza magnetica elementare** che agisce sull'elemento differenziale di conduttore dl* può essere scritta con la seguente espressione:

$$d\overline{F}_m = I\ d\bar{l}' \times \overline{B}$$

Forze Magnetica: conduttori paralleli

Si supponga che giacciano nel piano x-y. La forza agente *per unità di lunghezza* sul conduttore 2 dovuta al campo $\overline{B}_1$ generato dalla circolazione della corrente nel *conduttore 1*, sarà:



$$\overline{F}_{21} = I_2\left(\vec{a}_z \times \overline{B}_1\right)$$

con $\overline{B}_1(d) = -\vec{a}_x \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$ da cui :

$$\overline{F}_{21} = -\vec{a}_y \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\,\pi\,d} \quad \left[\frac{N}{m}\right]$$

analogamente:

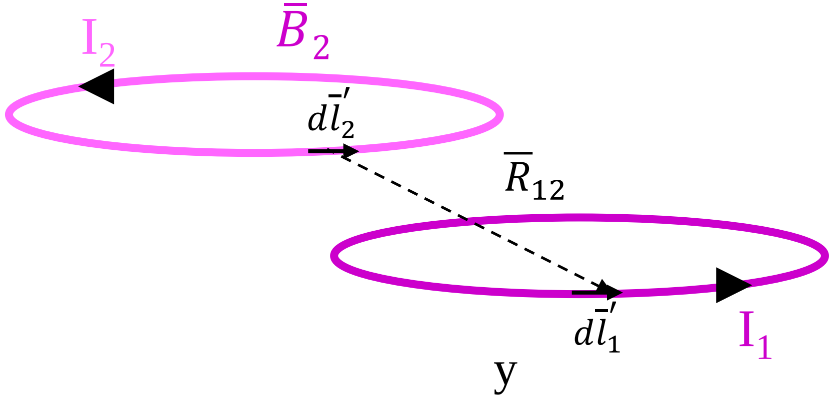
$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21} = \vec{a}_y \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\,\pi\,d} \quad \left[\frac{N}{m}\right]$$

- ✓ se le due correnti sono equiverse le forze sono attrattive
- ✓ se le due correnti sono controverse le forze sono repulsive.

Forze Magnetica: circuito chiuso

Nel caso di due circuiti adiacenti attraversati dalle correnti I_1 e I_2 rispettivamente, ciascuno di essi è sotto l'influsso del campo magnetico generato dall'altro.

la corrente I_2 che circola nel circuito 2 genera un campo magnetico di induzione $\bar{B}_2$ (espresso tramite la legge di biot- Savart):



$$\bar{B}_2(R) = \frac{\mu_o I_2}{4\pi} \oint_{c_2'} \left(\frac{d\bar{l}_2' \times \vec{a}_R}{R^2} \right)$$

Le forze magnetiche che agiscono sui due ***circuito chiusi*** saranno:

$$\bar{F}_{12} = I_1 \oint_{c_1'} d\bar{l}_1' \times \bar{B}_2 \qquad [\mathrm{N}]$$

$$\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12} = I_2 \oint_{c_2'} d\bar{l}_2' \times \bar{B}_1 \qquad [\mathrm{N}]$$

Forza espressa in termini di energia magnetica

La determinazione delle forze e delle coppie agenti su conduttori e circuiti attraversati da corrente in presenza di un campo magnetico utilizzando la legge di Ampere o di Biot-Savart è piuttosto complicata, soprattutto quando non esistono particolari condizioni di simmetria.

Un metodo alternativo per la determinazione delle suddette forze (o coppie), quando non esistono particolari condizioni di simmetria, è basato ***sul principio degli spostamenti virtuali***, considerando i due casi:

I) un sistema di circuiti con Φ_k flussi magnetici concatenati ***costanti***

II) un sistema di circuiti con I_k correnti ***costanti***.

Forza espressa in termini di energia magnetica

I)Se si assume che il sistema sia isolato magneticamente, ***dΦ=0***. Perciò per uno spostamento virtuale differenziale *dl* non causa *f.e.m.* indotta dalla variazione di flusso, quindi i generatori mantengono ***V=cost*** (generatori di tensione) perché non devono compensare *f.e.m.* indotti, e_k=0. Perciò, la sorgente non fornisce variazioni di energia ($dW_s = \sum_k I_k e_k \, dt = 0$) e dunque lo spostamento (*variazione di energia meccanica* W_M*) avviene a spese dell'energia magnetica del circuito* W_m; il bilancio energetico sarà:

$$dW_M + dW_m = 0 \Rightarrow dW_M = -dW_m$$

$$\left(\bar{F}_\Phi \cdot d\bar{l}\right) dt = -\left(\nabla W_m \cdot d\bar{l}\right) dt \quad \Rightarrow \quad \bar{F}_\Phi = -\bar{\nabla} W_m \ \text{[N]}$$

Dove $dW_M = \bar{F}_\Phi \cdot d\bar{l}$ è il lavoro meccanico, e $\bar{F}_\Phi$ indica la forza in condizioni di flusso costante. Se il circuito è vincolato a ruotare di un angolo θ intorno ad un asse, la z componente della coppia agente sul circuito sarà:

$$\left(T_\Phi\right)_z = -\frac{\partial W_m}{\partial \vartheta} \qquad [\text{N m}]$$

Forza espressa in termini di energia magnetica

II) Se si assume che il sistema *non sia isolato magneticamente*, per uno spostamento virtuale *dl* possono esserci variazioni ***dΦ≠0***, i generatori che alimentano il circuiti elettrici devono perciò compensare le *f.e.m.* indotte e_k (generatori di corrente, ***I=cost***). La variazione di e*nergia fornita dalle sorgenti* è $dW_s = \sum_k I_k e_k \, dt = \sum_k I_k d\Phi_k$, il bilancio energetico sarà:

$$dW_M + dW_m = dW_s$$

Dove $\bar{F}_I$ indica la forza in condizioni di corrente costante. Poiché l'energia magnetica è:

$$dW_m = \frac{1}{2}\sum_k I_k d\Phi_k = \frac{1}{2} dW_s \quad \Rightarrow \quad dW_s = 2W_m$$

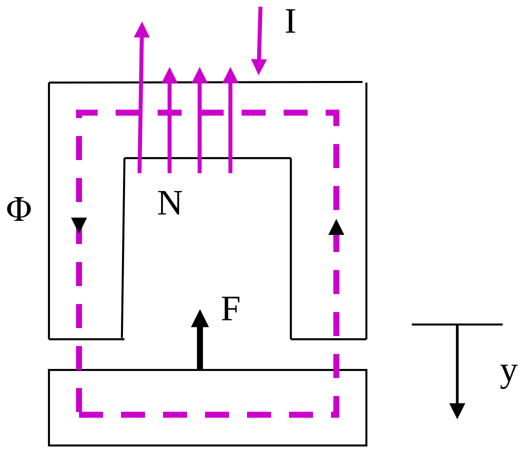
$$dW_M = \overline{F}_I \cdot d\bar{l} = dW_m = \left(\overline{\nabla} W_m\right) \cdot d\bar{l} \quad \Rightarrow \quad \overline{F}_I = \overline{\nabla} W_m \quad [\mathrm{N}]$$

Se il circuito è vincolato a ruotare intorno all'asse z, *la z componente della coppia agente sul circuito* sarà:

$$\left(T_I\right)_z = \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \quad [\mathrm{N\ m}]$$

Forza espressa in termini di energia magnetica

Si consideri un elettromagnete di sezione *S* e si voglia determinare la forza tra i giogo e l'armatura del circuito in figura nel caso si consideri uno spostamento virtuale della armatura *dy >0*:



I) nell'ipotesi che *il generatore (di tensione) mantenga Φ=cost:*

$$\overline{F}_{\Phi} = -\overline{\nabla} W_m \quad [\mathrm{N}]$$

Lo spostamento cambia la geometria del circuito nella sola lunghezza del traferro; perciò è solo l'energia del traferro a variare.

$$W_{traferri} = 2 w_{traferro} \tau_{traferro} = 2 \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \tau = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} y$$

$$\bar{F}_{\Phi} = -\bar{\nabla} W_m = \left(-\frac{\partial W_{traferri}}{\partial y} \right) \vec{a}_y = -\frac{\Phi^2}{\mu_0 S} \vec{a}_y \ [\mathrm{N}]$$

➡ Forza attrattiva

Forza espressa in termini di energia magnetica

II) nell'ipotesi che il generatore (*di corrente*) che compensi la *f.e.m* indotta causata dalla variazione di flusso dovuta all'aumento del volume del traferro: $\overline{F}_I = \overline{\nabla} W_m$

Per il circuito magnetico in figura $\Phi = \dfrac{NI}{\Re_{fe} + \dfrac{2y}{\mu_0 S}} \Rightarrow \Phi_c = N\Phi$

Perciò: $W_m = \dfrac{1}{2}\Phi_c I = \dfrac{(NI)^2}{\Re_c + \dfrac{2y}{\mu_0 S}}$ e $\overline{F}_I = \nabla W_m = \dfrac{\partial W_m}{\partial y} = \dfrac{(NI)^2}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\Re_c + \dfrac{2y}{\mu_0 S}}\right)\right)\vec{a}_y$

$$\boxed{\dfrac{-\dfrac{2}{\mu_0 S}}{\left(\Re_c + \dfrac{2y}{\mu_0 S}\right)^2}}$$

$\overline{F}_I = -\dfrac{1}{\mu_0 S}\left(\dfrac{NI}{\Re_c + \dfrac{2y}{\mu_0 S}}\right)^2 \vec{a}_y = -\dfrac{\Phi^2}{\mu_0 S}\,\vec{a}_y = \overline{F}_\Phi$ ➡ Forza attrattiva