

5

**CAMPI MAGNETICI STATICI
(o MAGNETOSTATICA)**

Campo magnetico

Un **Campo Magnetico** può essere generato:

- da un **magnete permanente**
- da **correnti elettriche**

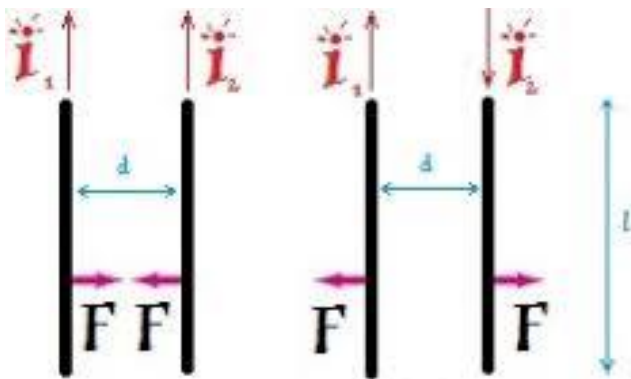
La limatura di ferro o piccoli pezzi di ferro sparsi su un foglio di carta possono essere usati per rilevare la presenza di effetti magnetici (ossia forze magnetiche) in prossimità:

- *di un magnete permanente*, dove la limatura si distribuisce secondo linee chiuse che vanno da un polo all'altro del magnete
- *di un filo percorso da corrente elettrica*, dove la limatura si dispone secondo linee concentriche circolari, perpendicolari alla direzione del conduttore.

In entrambi i casi la distribuzione della limatura in presenza degli elementi che la generano, indica la **presenza di un campo magnetico e indica la forma delle linee di flusso del campo magnetico**, ossia le linee lungo le quali agiscono le forze del campo.

Campo magnetico

Un magnete permanente è un corpo che sottoposto agli effetti di un campo magnetico, è in grado di generare un campo magnetico proprio. Le linee di flusso magnetico seguono percorsi chiusi, da una estremità del magnete all'altra estremità.



$$F_m = k \frac{I_1 \cdot I_2}{d} l$$

Tra due fili paralleli attraversati da una corrente elettrica, si sviluppa una forza. Se le correnti hanno lo stesso verso la forza è attrattiva, se hanno versi opposti la forza è repulsiva. Sul trattino infinitesimo di conduttore $d\vec{l}$ (che ha lo stesso verso di I) la forza elementare può essere espressa dalla relazione:

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Forza magnetica

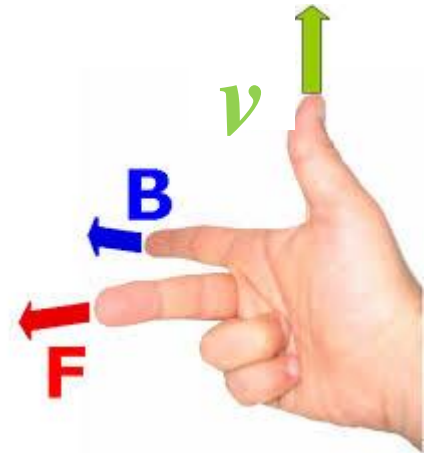
Sulla base di *dati empirici* si può affermare che ogni moto di cariche elettriche dà luogo ad un campo di forze \vec{B} .

Sia q *carica elettrica elementare in movimento* in presenza di un campo magnetico è sottoposta ad una forza detta *forza magnetica*:

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Dove \vec{B} , è chiamato vettore Induzione Magnetica \vec{B} o Densità di flusso magnetico. \vec{F}_m è così caratterizzata:

- *Ampiezza*: proporzionale a q , B e alla componente della velocità nella direzione normale a \vec{B} , nel punto in cui si trova la carica nell'istante considerato
- *Direzione*: normale alle direzioni di \vec{v} e \vec{B} , nel punto in cui si trova la carica nell'istante considerato
- *Verso*: definito dal prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{B}$



Forza di Lorenz

Analogamente a quanto fatto per il campo elettrico nell'elettrostatica, per la definizione del vettore Induzione Magnetica \vec{B} è valida la seguente relazione :

$$\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\vec{F}_m}{q} \rightarrow [B] = \left[\frac{N \cdot s}{C \cdot m} \right] = \left[\frac{V \cdot s}{m^2} \right] = \left[\frac{Wb}{m^2} \right] = [T]$$

Valori tipici di B:

Campo terrestre: $0.5 \cdot 10^{-5} T$

Elettromagneti con nucleo in ferro: fino a $1.7 T$

Magneti superconduttori: $5 \div 10 T$

La **forza elettromagnetica** totale dovuta alla contemporanea presenza dei campi elettrostatico e magnetico, che agiscono su una carica q in movimento con velocità \vec{v} è

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad [N]$$

che è l'espressione della **forza di Lorentz**, la sua validità è stata inequivocabilmente stabilita empiricamente.

Magnetostatica nel vuoto

Per lo studio della magnetostatica nel vuoto è necessario considerare solo il vettore densità di flusso magnetico \bar{B} , i *due postulati fondamentali della magnetostatica in forma differenziale* sono:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} \end{cases}$$

\bar{J} è la densità di corrente

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m] è la permeabilità magnetica del vuoto:

Dal confronto tra le relazioni:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases}$$

si deduce *come non ci sia alcuna grandezza magnetica analoga alla densità di carica elettrica ρ .*

Magnetostatica nel vuoto

Applicando il teorema della divergenza alla relazione

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

si ottiene:

$$\int_V \nabla \cdot \bar{B} \, dv = \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$$

dove S è la superficie che delimita il volume arbitrario di integrazione.

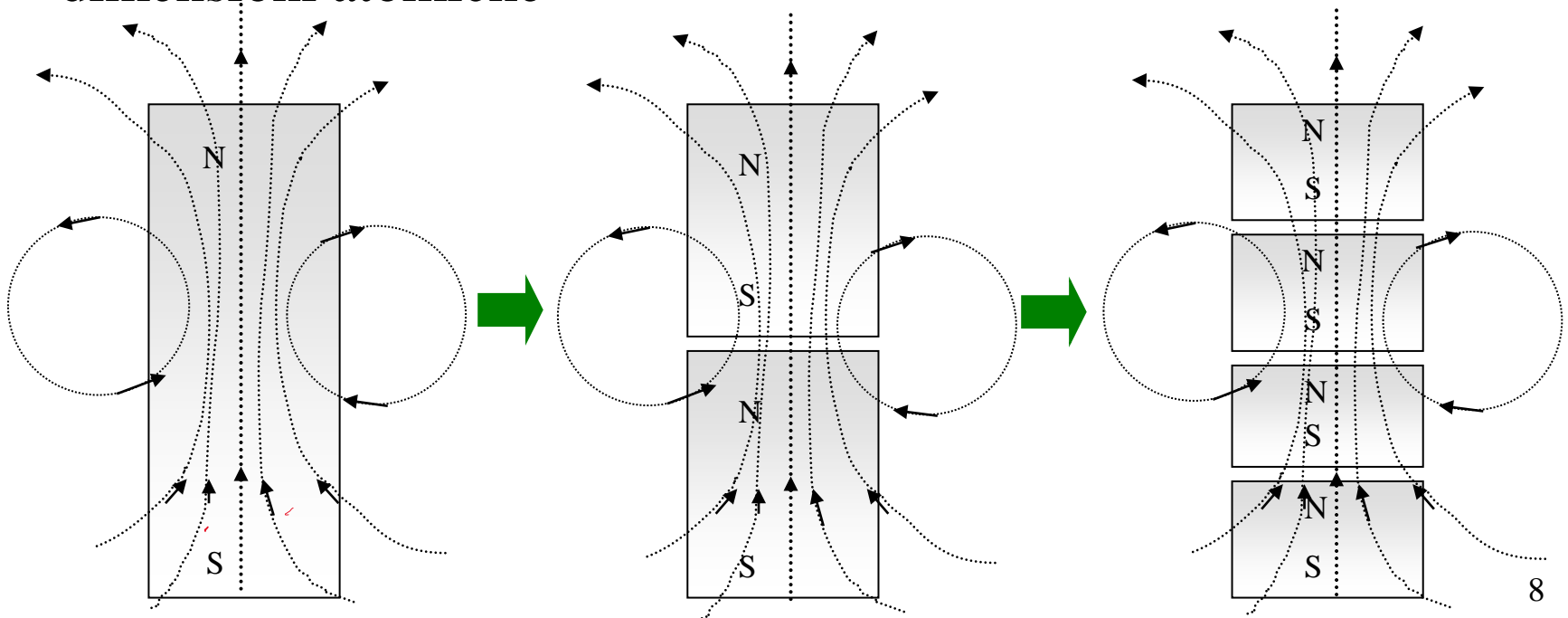
$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$$

Questa é la legge di Gauss ed esprime la legge di *conservazione del flusso magnetico*, perché essa afferma che il flusso di \bar{B} attraverso una superficie chiusa è nullo.

Non esistono sorgenti di flusso magnetico, e le linee di flusso magnetico si richiudono sempre su se stesse.

Magneti permanenti

La tradizionale definizione dei poli nord e sud in una barretta di materiale magnetico permanente non implica che esistano le cariche magnetiche isolate. Infatti se il magnete viene tagliato in due parti compaiono in ciascun elemento un polo nord e un polo sud, ottenendo così due nuovi magneti più piccoli. Questo processo si potrebbe ripetere sino a che i magneti assumono dimensioni atomiche

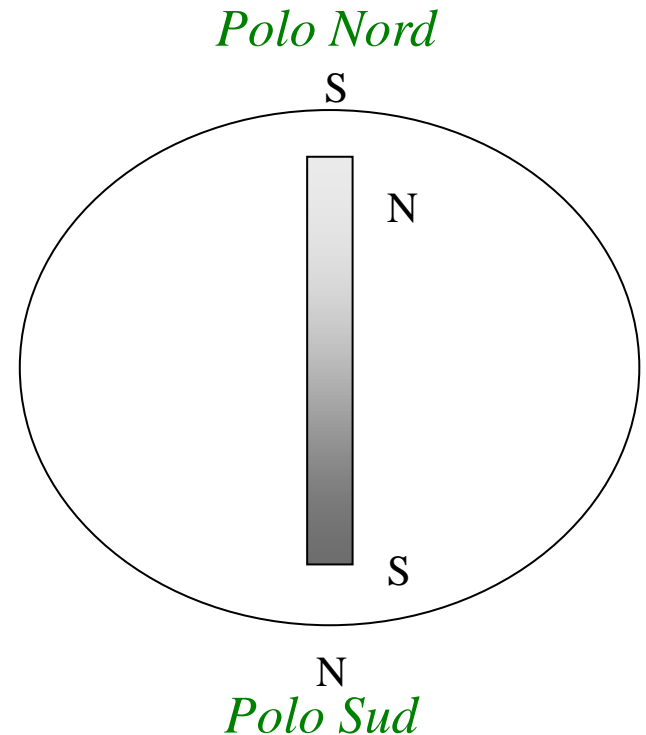


Magneti permanenti

La definizione di polo nord e sud è coerente con il fenomeno fisico, verificabile empiricamente, per il quale *una barretta magnetica liberamente sospesa sotto l'effetto del campo magnetico terrestre, tende a disporsi secondo la direzione nord sud.*

Precisamente *il polo magnetico nord della barretta punta nella direzione del nord geografico.*

- Il polo magnetico terrestre nella *regione artica (polo nord)* deve essere un polo magnetico sud.
- Il polo magnetico terrestre nella *zona antartica (polo sud)* deve essere un polo magnetico nord.



Legge di circuitazione di Ampere

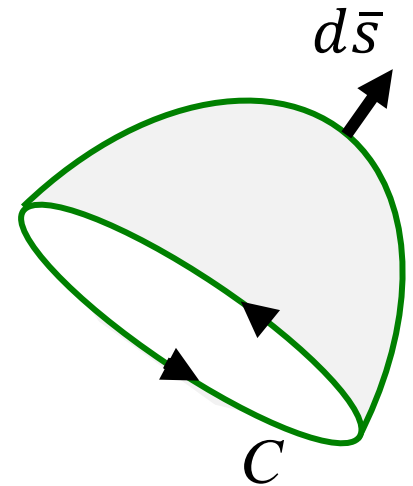
Integrando su una superficie aperta, entrambi i membri dell'equazione

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$$

e applicando il teorema di Stokes, si ottiene la *Legge della circuitazione di Ampere*.

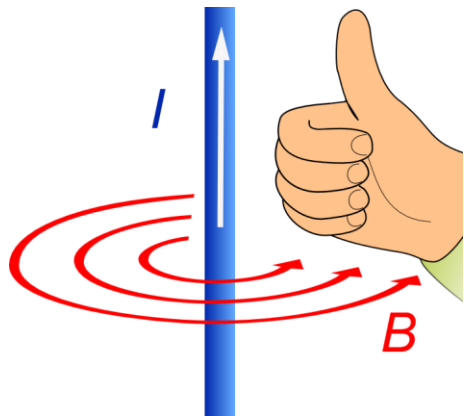
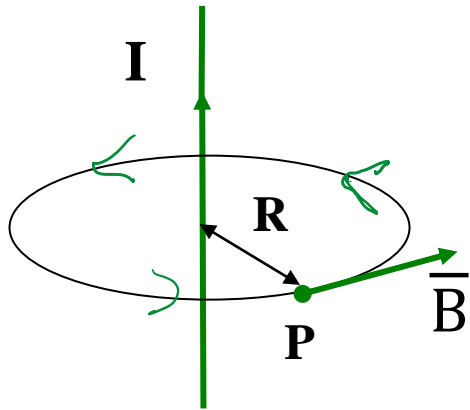
$$\int_S (\nabla \times \bar{B}) \cdot d\bar{s} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} \quad \Rightarrow \quad \oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

Dove il percorso C dell'integrale lineare é il contorno che delimita la superficie S , e I è la corrente totale che fluisce attraverso la superficie delimitata da tale percorso. *Il senso di percorrenza del contorno C e il flusso seguono la regola della mano destra.*



Applicazione della Legge di Ampere

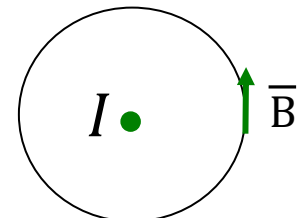
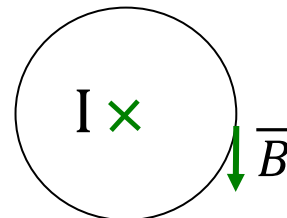
Distribuzione filiforme di corrente



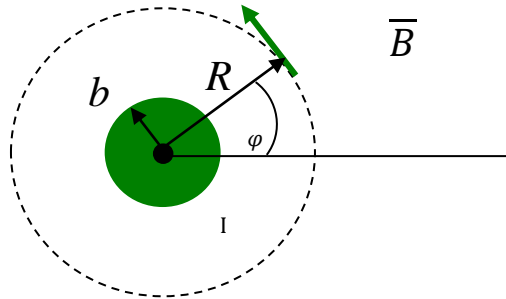
Applichiamo la legge di circuitazione di Ampere per valutare il modulo del campo \vec{B} in un punto P a distanza R dal conduttore nel quale circola la corrente I .

Il campo \vec{B} ha:

- ✓ *direzione* tangente alla circonferenza di raggio R in P
- ✓ *verso* legato alla direzione della corrente definito dalla regola della vite destrorsa (il verso è quello con cui deve ruotare una vite destrorsa per farla avanzare nel senso della corrente).



Applicazione della Legge di Ampere



sistema di riferimento cilindrico

$$\vec{B} = B \vec{a}_\varphi$$

$$d\vec{l} = r d\varphi \vec{a}_\varphi$$

La legge di circuitazione di Ampere applicata ad una generica circonferenza di raggio R ha la forma:
$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C$$

Dove I_C è la corrente concatenata con la circonferenza di raggio R

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \vec{a}_\varphi \cdot R d\varphi \vec{a}_\varphi = BR \int_0^{2\pi} d\varphi = BR \cdot 2\pi$$

quindi $2\pi RB = \mu_0 I_C$

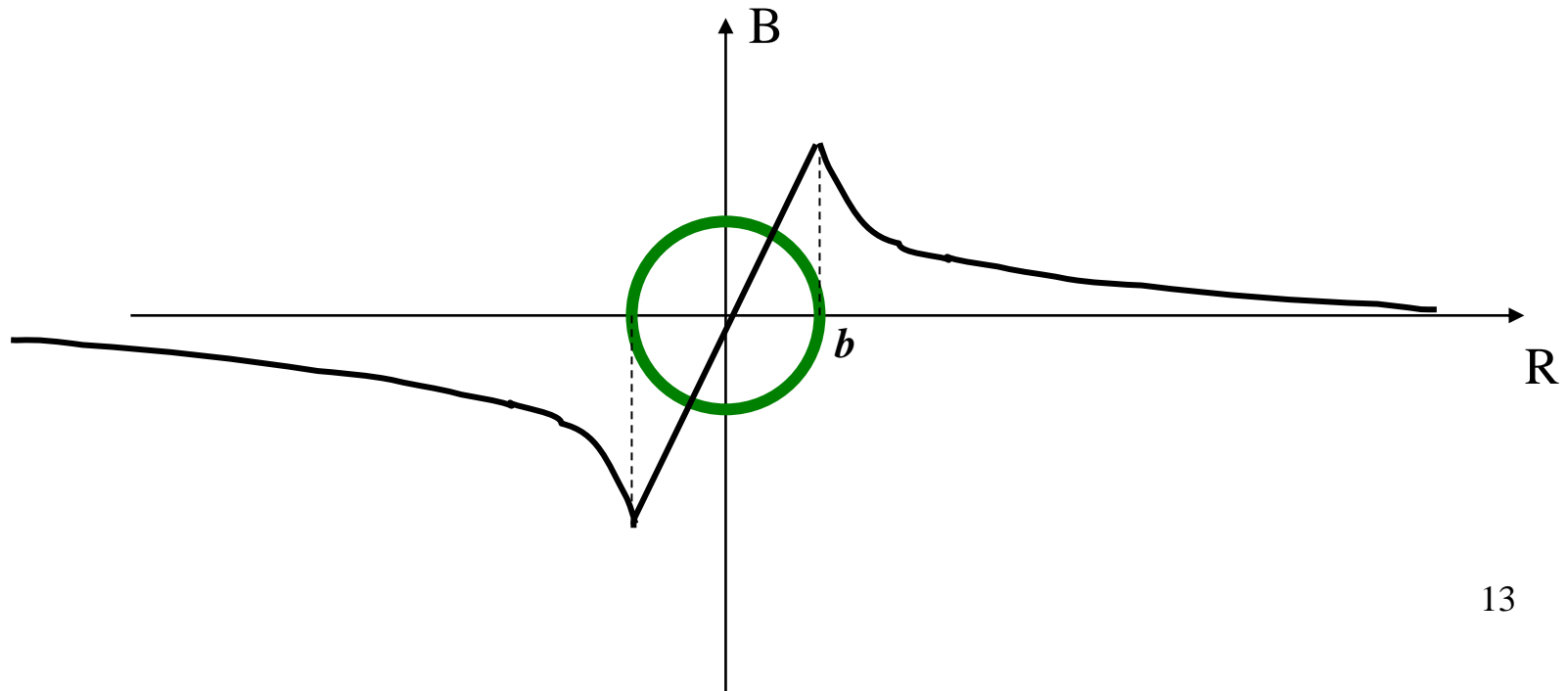
Se $r \geq b \rightarrow I_C = I$

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \vec{a}_\varphi$$

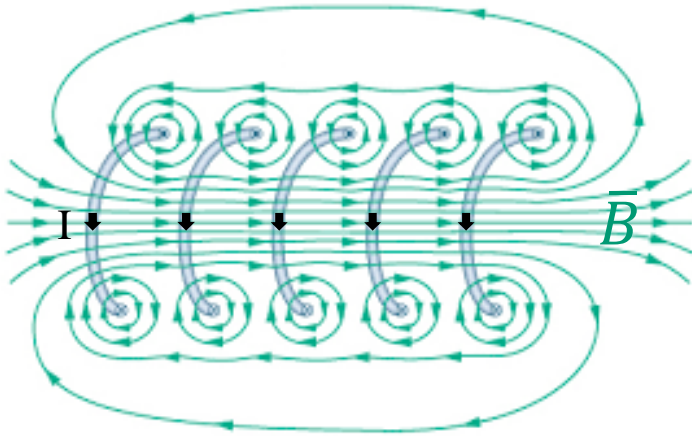
Applicazione della Legge di Ampere

Se $R < b \rightarrow I_c < I$

$$\left\{ \begin{array}{l} R < b \rightarrow I_c = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = J \cdot \pi R^2 \\ R > b \rightarrow I_c = I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = J \cdot \pi b^2 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{I}{I_c} = \frac{b^2}{R^2} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \frac{I_c}{2\pi R} \vec{a}_\varphi = \mu_0 \frac{R}{2\pi b^2} I \vec{a}_\varphi$$



Applicazione della Legge di Ampere

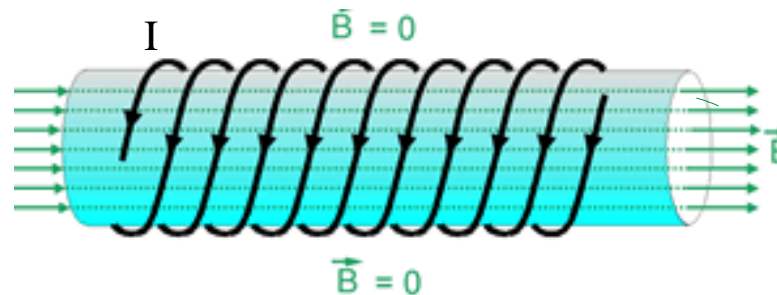


Ipotesi:

- ✓ solenoide di lunghezza infinita
- ✓ Il flusso all'esterno del solenoide può essere trascurato .

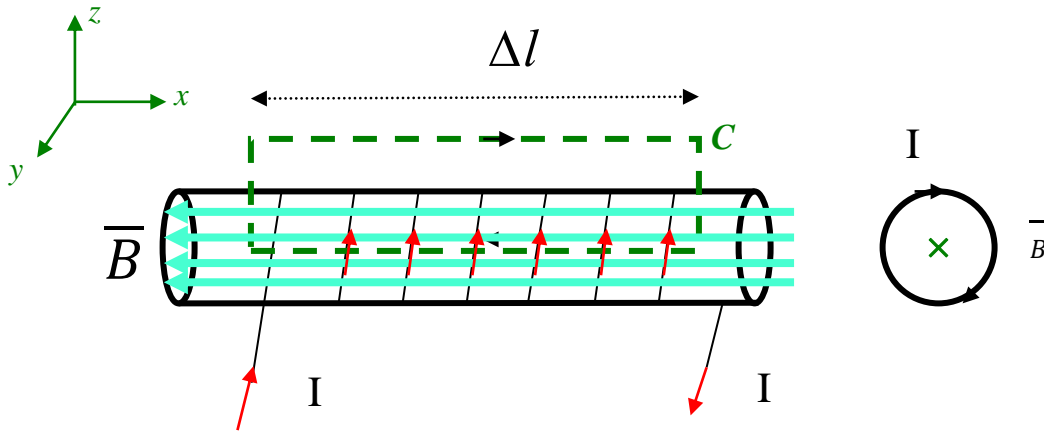
Il campo \vec{B} ha:

- ✓ *direzione* parallela all'asse del solenoide
- ✓ *verso* positivo dato da una vite destrorsa che ruota nel verso di percorrenza della corrente nella spira.



Applicazione della Legge di Ampere

Solenioide di lunghezza infinita



sistema di riferimento cartesiano

$$\vec{B} = -B \vec{a}_x$$

$$d\vec{l} = dl \vec{a}_x$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C = \mu_0 NI$$

Per determinare \vec{B} , si applica la legge della circuitazione lungo il percorso **C**. All'esterno del solenoide il campo può essere trascurato.

$$\int_0^{\Delta l} -B \vec{a}_x \cdot dl \vec{a}_x = \mu_0 NI \Rightarrow$$

$$B \Delta l = \mu_0 NI \Rightarrow \vec{B} = -\mu_0 \frac{NI}{\Delta l} \vec{a}_x = -\mu_0 n I \vec{a}_x$$

Potenziale vettore magnetico

Il postulato $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ garantisce che \bar{B} sia solenoidale. Quindi per le proprietà dei vettori, \bar{B} può essere espresso come il rotore di un altro vettore di campo vettoriale, chiamato \bar{A} , tale che:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \text{ [T]}$$

infatti per la Π° identità nulla: $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) \equiv 0$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \rightarrow \bar{B} = (\nabla \times \bar{A})$$

Il vettore $\bar{A} \left[\frac{Wb}{m} \right]$ così definito è chiamato **potenziale magnetico vettoriale**.

Quindi si può determinare il potenziale magnetico vettore \bar{A} di una distribuzione di corrente e calcolare \bar{B} in funzione di \bar{A} con l'operatore differenziale ∇ (il rotore).

Potenziale vettore magnetico

Questa procedura è del tutto simile a quella usata per introdurre del potenziale elettrico scalare V per il calcolo del campo elettrostatico \vec{E} con la relazione:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Tuttavia, in questo caso il potenziale \vec{A} è un campo vettoriale e per definirlo bisogna specificare sia del rotore che la divergenza.

Come scegliere la $\nabla \cdot \vec{A}$?

L'obiettivo è arrivare a scrivere una espressione di \vec{A} , che presenti analogie con *l'espressione scalare di Poisson* valida per l'elettrostatica, per la quale sono note le soluzioni analitiche:

$$assumiamo $\nabla \cdot \vec{A} = 0$$$

Potenziale vettore magnetico

Dalle relazioni:

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \mu_0 \bar{\mathbf{J}} \\ \bar{\mathbf{B}} = \nabla \times \bar{\mathbf{A}} \end{cases} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{A}} = \mu_0 \bar{\mathbf{J}}$$

e ricordando che il rotore del rotore di un vettore è:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{A}} = \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}}) - \nabla \cdot (\nabla \bar{\mathbf{A}})$$

Considerando che $\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} = 0$, questa espressione ci fornisce il *Laplaciano di $\bar{\mathbf{A}}$* :

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{A}} = \nabla \cdot (\nabla \bar{\mathbf{A}})$$

In coordinate cartesiane è validità della relazione:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{A}} = \nabla^2 A_x \bar{\mathbf{a}}_x + \nabla^2 A_y \bar{\mathbf{a}}_y + \nabla^2 A_z \bar{\mathbf{a}}_z$$

le componenti del laplaciano $\bar{\mathbf{A}}$ di sono i laplaciani (*divergenza del gradiente*) delle componenti di $\bar{\mathbf{A}}$ (ciò non è vero per gli altri sistemi di coordinate)

Equazione di Poisson vettoriale

e si ottiene l'equazione di Poisson vettoriale, espressa con il potenziale vettore magnetico \bar{A} :

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J}$$
$$\nabla^2 A_x \bar{a}_x + \nabla^2 A_y \bar{a}_y + \nabla^2 A_z \bar{a}_z = J_x \bar{a}_x + J_y \bar{a}_y + J_z \bar{a}_z$$

Dalla quale è possibile scrivere *tre equazioni scalari* equivalenti per le quali è calcolabile la soluzione:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \end{cases}$$

Ciascuna di queste equazioni è matematicamente analoga alla equazione scalare di Poisson valida per l'elettrostatica e analogamente risolvibile.

Equazione di Poisson

Nel modello elettrostatico nel vuoto:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

l'equazione di Poisson ha la soluzione particolare

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho}{R} dv'$$

Per il teorema dell'unicità si avrà:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{J_x}{R} dv' \\ A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{J_y}{R} dv' \\ A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{J_z}{R} dv' \end{cases}$$

Equazione di Poisson

Combinando le tre componenti, si ha quindi l'espressione della soluzione in forma vettoriale compatta:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{J_x}{R} dv' \\ A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{J_y}{R} dv' \\ A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{J_z}{R} dv' \end{array} \right. \rightarrow \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J}}{R} dv' \quad \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}} \right]$$

tale equazione consente di determinare il potenziale magnetico vettore \bar{A} dalla densità di corrente volumica \bar{J} .

Le equazioni di Poisson possono essere risolte anche con il metodo FEM imponendo che un funzionale sia minimo, in quanto la funzione da determinare ϕ nel volume o dominio Ω soddisfa l'equazione seguenti : $\mathbf{k}\nabla^2 \phi = -\chi$, dove \mathbf{k} e χ sono funzioni scalari generalmente continue assegnate sul dominio Ω

Potenziale vettore magnetico

Quindi è possibile determinare le 3 soluzioni relative alle 3 componenti A_x , A_y e A_z del potenziale vettore \bar{A} a partire dalle tre componenti del vettore densità volumica di corrente. La soluzione in forma vettoriale compatta è:

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J}}{R} dv' \quad \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}} \right]$$

Determinato \bar{A} , la densità di flusso magnetico \bar{B} può essere ottenuta dalla relazione

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

differenziando in maniera analoga a come fatto per ottenere il campo elettrostatico \bar{E} dalla relazione $\bar{E} = -\nabla V$.

Potenziale vettore magnetico

Il potenziale vettore \bar{A} lega *il flusso magnetico* Φ attraverso una superficie data S delimitata da un contorno C in modo semplice, infatti:

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{s}$$

poiché poiché $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$, applicando il teorema di Stokes, si ha:

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = \int_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{s} = \oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l} \quad [\text{Wb}]$$

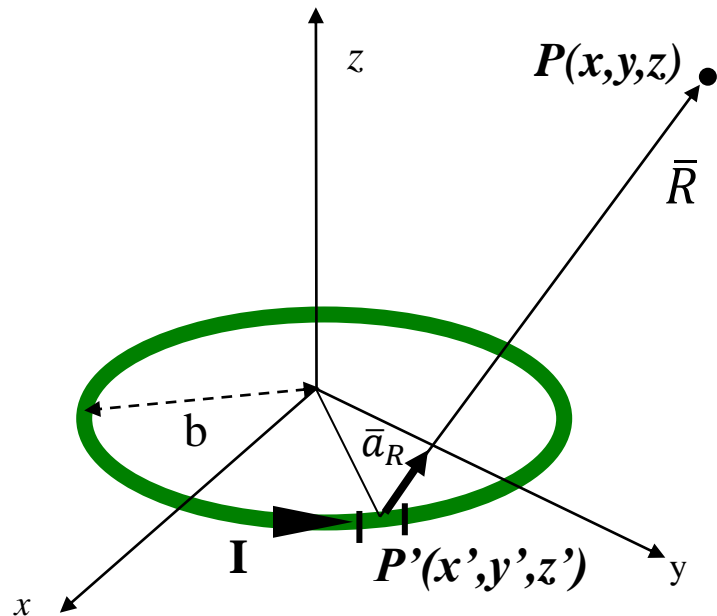
Questa espressione fornisce il significato fisico del vettore potenziale \bar{A} . *L'integrale lineare di \bar{A} lungo un qualsiasi percorso chiuso è uguale al flusso magnetico totale Φ che attraversa l'area delimitata da tale percorso.*

Nel SI il flusso magnetico Φ si misura in Weber $[\text{Wb}] = [\text{T} \cdot \text{m}^2]$.

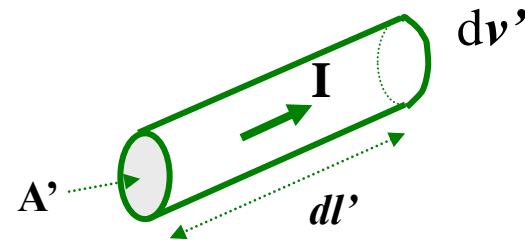
La legge di Biot-Savart

In molte applicazioni è richiesto di determinare l'induzione \vec{B} dovuto a un circuito attraversato dalla corrente I .

Nel caso semplice di un filo sottile con sezione trasversale S di area costante, volume $dv' = S dl'$, attraversato da una corrente I :



$$\vec{R} = (x - x')\vec{a}_x + (y - y')\vec{a}_y + (z - z')\vec{a}_z$$



$$\vec{J} dv' = (JA') d\vec{l}' = I d\vec{l}'$$

$$\text{con } J \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right] \text{ e } dv' = S' dl' [\text{m}^3]$$

La legge di Biot-Savart

L'espressione del **potenziale vettore** dovuto a \bar{J}

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J}}{R} dv' \quad \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}} \right]$$

Dove v' è il volume della sorgente. Se la densità di corrente nella sezione del conduttore è costante, l'integrale volumico si semplifica in una relazione funzione di un integrale circuitale lungo il percorso chiuso C' della corrente:

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{v'} \frac{\bar{J} \cdot A' dl'}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\bar{l}'}{R}$$

la **densità di flusso magnetico** \bar{B} sarà dunque:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\bar{l}'}{R} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \nabla \times \left(\frac{d\bar{l}'}{R} \right)$$

La legge di Biot-Savart

L'integrando può essere espanso in due termini usando la seguente identità:

$$\nabla \times (f\bar{G}) = f\nabla \times \bar{G} + (\nabla f) \times \bar{G}$$

ponendo $f = 1/R$ e $\bar{G} = d\bar{l}$, si ha:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \left[\frac{1}{R} \nabla \times d\bar{l}' + \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times d\bar{l}' \right]$$

In questa espressione l'operatore rotore comporta il calcolo delle derivate rispetto alle coordinate spaziali di un punto del campo (x,y,z) , mentre l'integrale è fatto lungo il percorso che definisce la sorgente. Questo implica che la circuitazione in $d\bar{l}'$, quindi integrata al variare di (x',y',z') , e le coordinate utilizzate per il calcolo del rotore sono indipendenti. Perciò il contributo all'integrale dal primo addendo è nullo.

La legge di Biot-Savart

La distanza R é la distanza del punto (x,y,z) dalla sorgente dl' che ha coordinate (x',y',z') . Dal momento che stiamo valutando il contributo della sorgente dl' al campo magnetico nello spazio circostante, Il gradiente deriva rispetto alle coordinate spaziali (x,y,z) :

$$\frac{1}{R} = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{R} \right) &= \bar{a}_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) + \bar{a}_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) + \bar{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) = \\ &= - \frac{\bar{a}_x(x - x') + \bar{a}_y(y - y') + \bar{a}_z(z - z')}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = - \frac{\bar{R}}{R^3} = -\bar{a}_R \frac{1}{R^2} \quad (*) \end{aligned}$$

dove \bar{a}_R é il vettore unitario diretto dal punto sorgente al punto del campo.

(*) *In elettrostatica avevamo visto* $\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\bar{a}_R}{R^2}$

La legge di Biot-Savart

L'espressione di \bar{B} può essere scritta:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times d\bar{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} -\frac{\bar{a}_R}{R^2} \times d\bar{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\bar{l}' \times \bar{a}_R}{R^2} \quad [\text{T}]$$

questa relazione è nota come *legge di Biot-Savart*.

La formula della legge di Biot-Savart, consente di determinare \bar{B} in dovuto alla corrente I che circola nel circuito chiuso C' , in un punto dello spazio vuoto a distanza R dal circuito. Il contributo $d\bar{B}$ alla densità di flusso magnetico dovuta alla corrente elementare $I dl'$ sarà:

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{d\bar{l}' \times \bar{a}_R}{R^2} \right) \quad [\text{T}]$$

La legge di Biot-Savart

La legge di Biot-Savart viene dunque usata per determinare \bar{B} , integrando $d\bar{B}$ su tutto il circuito chiuso C' nel quale circola la corrente I che genera il campo:

$$\bar{B} = \oint_{C'} d\bar{B}$$

La legge di Biot-Savart risulta analiticamente più complessa della legge della circuitazione di Ampere:

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

Infatti l'applicazione della *legge della circuitazione di Ampere* è però limitata, perché l'integrale è risolvibile analiticamente in maniera semplice solo quando è *nota I e l'induzione \bar{B} ha ampiezza costante lungo un percorso chiuso* .

Magnetostatica nel vuoto

I postulati fondamentali della magnetostatica nel vuoto sono:

forma differenziale

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

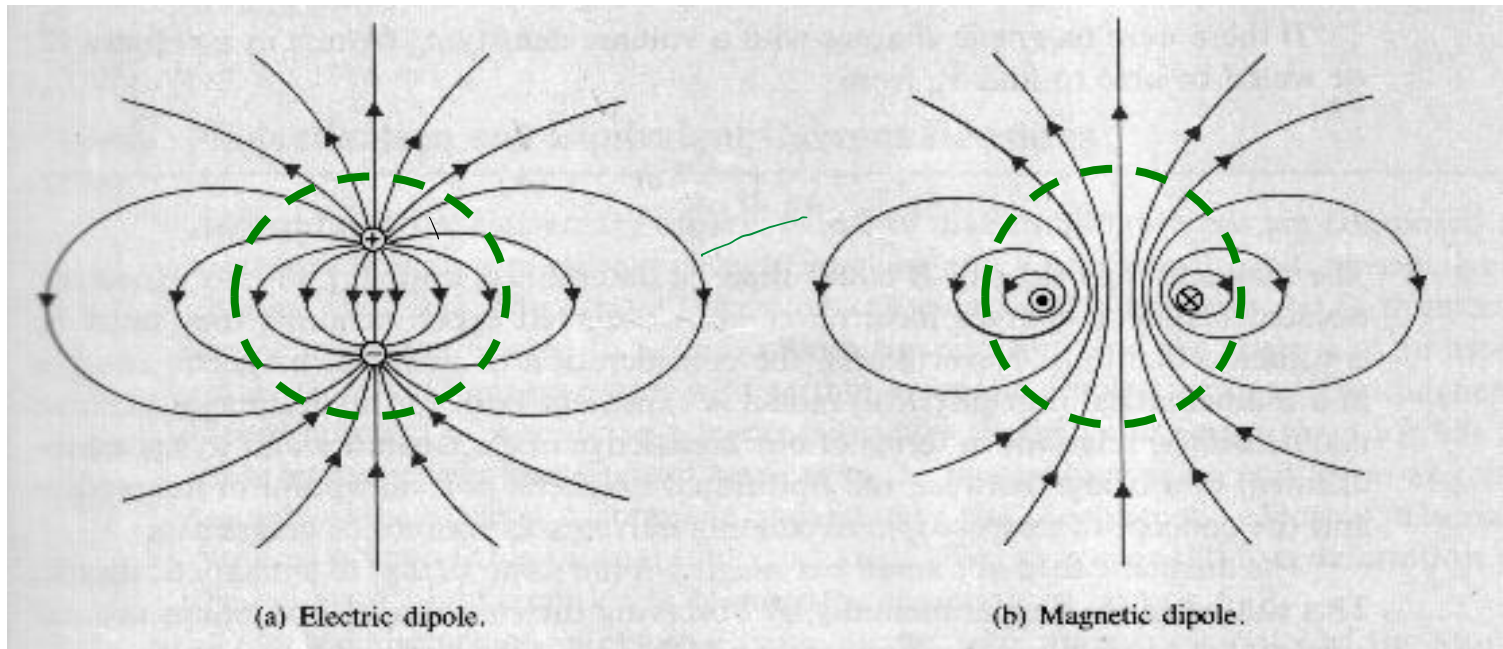
$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$$

forma integrale

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$$

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I$$

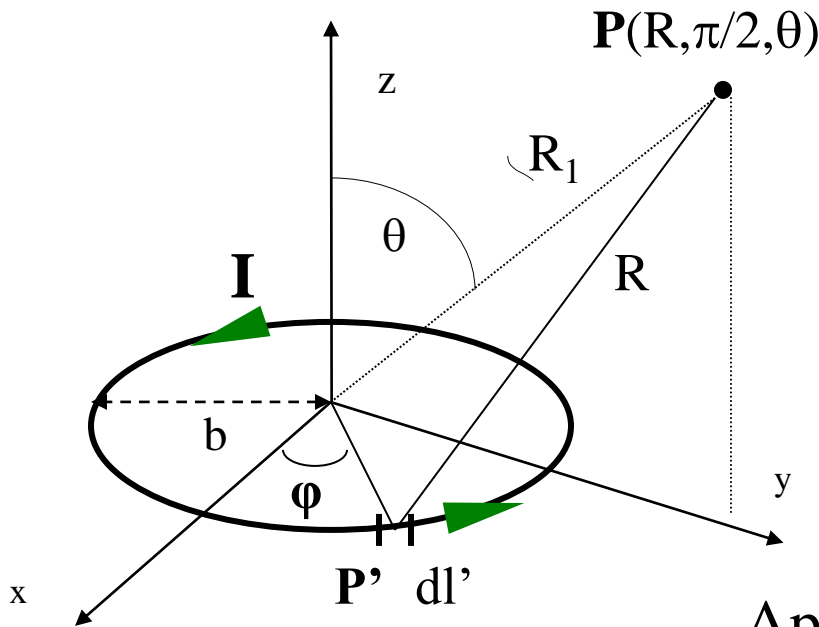
Dipolo Magnetico



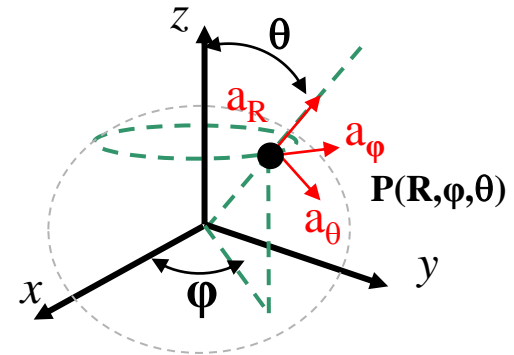
- *nei punti distanti dai dipoli:* le linee di flusso sono le stesse per campo elettrico e magnetico
- *in prossimità dei dipoli:* le linee di flusso del dipolo magnetico sono chiuse, mentre le linee di flusso del dipolo elettrico terminano sulle cariche, partendo dalla carica positiva verso la carica negativa.

Dipolo Magnetico

Valutiamo la *densità del flusso magnetico* \bar{B} in un punto P *dovuta ad dipolo magnetico*, nel caso in cui il punto P sia sufficientemente lontano da poter assumere che $R \cong R_1$ e la dimensione della spira sia tale che $R_1 \gg b$.



Sia inoltre il centro della spira l'origine del sistema di coordinate sferiche.



Applicando la legge di Biot-Savart si trova

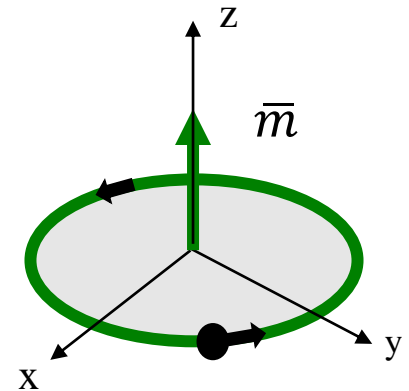
$$\bar{A} = \bar{a}_\varphi \frac{\mu_0 I b^2}{4R_1^2} \sin \theta$$

Magnetizzazione

Secondo il *modello elementare atomico* della materia, tutti i materiali sono composti di atomi, ciascuno con un nucleo carico positivamente e un numero di elettroni carichi negativamente che orbitano intorno al nucleo.

Gli elettroni che orbitano, causano correnti di circolazione e formano microscopici dipoli magnetici. Inoltre, sia gli elettroni che i nuclei di un atomo ruotano intorno ai loro assi (spin) con determinati momenti di dipolo magnetici.

Perciò *le proprietà magnetiche dei materiali si attribuiscono* alle correnti atomiche di circolazione (correnti amperiane) causate da elettroni che orbitano e ruotano su se stessi (orbiting and spinning). Ad ognuna di queste correnti è associato un momento di dipolo magnetico.



Magnetizzazione

Il momento di un dipolo magnetico di un nucleo che ruota su se stesso (spinning) è generalmente trascurabile rispetto a quello di un elettrone che orbita o ruota attorno al nucleo, perché il nucleo ha una massa maggiore e una velocità angolare minore.

In assenza di un campo magnetico esterno i dipoli magnetici degli atomi della maggior parte dei materiali, (fatta eccezione per i magneti permanenti) *presentano orientazioni casuali, con un momento magnetico netto risultante nullo.*

L'applicazione di un campo magnetico esterno causa:

1. l'allineamento dei momenti magnetici dovuto alla rotazione degli elettroni su se stessi
2. un momento magnetico indotto dovuto alla variazione del movimento orbitale.

Magnetizzazione

Per determinare la variazione quantitativa della densità di flusso magnetico \bar{B} dovuta alla presenza di materiali magnetici, essendo:

- \bar{m}_k *momento del dipolo magnetico* di un atomo: $\bar{m} = \bar{a}_n IS$
- $n_{\Delta v}$ numero di atomi per unità di volume,

si definisce *vettore di magnetizzazione* \bar{M} :

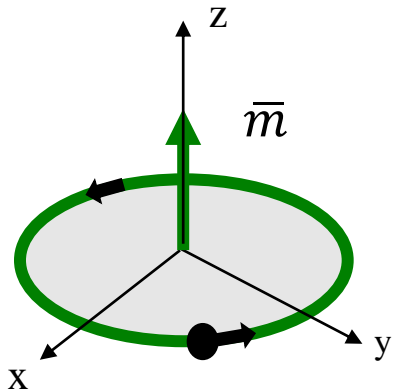
$$\bar{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n_{\Delta v}} \bar{m}_k}{\Delta v} \quad \left[\frac{A}{m} \right]$$

\bar{M} è la densità volumica del momento del dipolo magnetico alla quale si può *associare una densità di corrente volumica fittizia* tale che:

$$\bar{\nabla} \times \bar{M} = \bar{J}_m \quad \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

Potenziale vettore e magnetizzazione

Valutiamo il contributo del *momento magnetico* \bar{m} del singolo dipolo al potenziale vettore:



$$\bar{m} = \vec{a}_z I (\pi b^2) = \vec{a}_z I S = \vec{a}_z m \quad [A \cdot m^2]$$

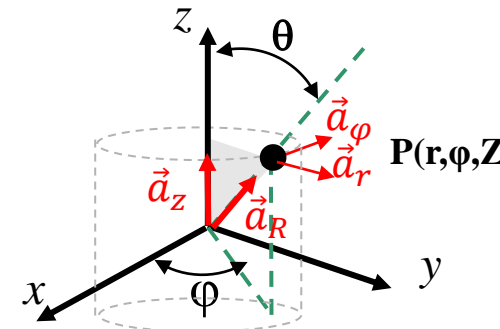
Dalla relazione di \bar{A} in un punto dello spazio libero dovuto ad un dipolo magnetico in coordinate sferiche:

$$\bar{A} = \vec{a}_\varphi \frac{\mu_0 I b^2}{4R^2} \sin \theta = \frac{\mu_0 m \sin \theta \vec{a}_\varphi}{4\pi R^2}$$

In un sistema di riferimento cilindrico è perpendicolare \vec{a}_φ al piano individuato da \vec{a}_z e \vec{a}_R

$$\vec{a}_z \times \vec{a}_R = \sin \theta \vec{a}_\varphi$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 m \vec{a}_z \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 \bar{m} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}$$



Si noti come il vettore potenziale \bar{A} presenta una analogia con il potenziale scalare V

$P(R, \varphi, \theta)$

Potenziale vettore e magnetizzazione

Il momento del dipolo magnetico $d\vec{m}$ di un volume elementare dv' è: $d\vec{m} = \vec{M} dv'$, che in accordo con la relazione precedente da luogo ad un potenziale magnetico vettoriale:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} dv' \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$

Se vogliamo valutare il contributo della sorgente in un punto fisso dello spazio, dobbiamo differenziare e integrare rispetto alle coordinate (x', y', z') della sorgente, perciò:

$$\frac{\vec{a}_R}{R^2} = \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \Rightarrow \frac{\vec{M} \times \vec{a}_R}{R^2} = \vec{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \quad (*)$$

Dove:

$$\begin{aligned} \nabla \times (f\vec{G}) &= f\nabla \times \vec{G} + \nabla f \times \vec{G} \\ \vec{G} \times \nabla f &= -\nabla f \times \vec{G} = f\nabla \times \vec{G} - \nabla \times (f\vec{G}) \end{aligned}$$

(*) già visto in elettrostatica

Potenziale vettore e magnetizzazione

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{M} \times \vec{a}_R}{R^2} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \bar{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{v'} \frac{1}{R} \nabla' \times \bar{M} dv - \int_{v'} \nabla' \times \frac{\bar{M}}{R} dv' \right]$$

Si può trasformare un integrale di volume in un integrale di superficie secondo la trasformazione:

perciò

$$\bar{A} = \mu_0 \left[\int_{v'} \frac{\nabla' \times \bar{M}}{R} dv' + \oint_{s'} \frac{\bar{M} \times \vec{a}_n}{R} ds' \right]$$

Definiamo: $\bar{J}_m = \bar{\nabla} \times \bar{M} \left[\frac{A}{m^2} \right]$ $\bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \vec{a}_n = -\vec{a}_n \times \bar{M} \left[\frac{A}{m} \right]$

In questo modo possiamo dire che *l'effetto del vettore di magnetizzazione su \bar{A}* è dovuto a *due densità di corrente* equivalenti, una *volumica* e l'altra *superficiale*.

Densità di corrente di magnetizzazione

della relazione:

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{v'} \frac{\bar{J}}{R} dv' \quad \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}} \right]$$

Dove \bar{A} è espresso in termini di densità volumica di corrente, suggerisce di scrivere:

$$\bar{A} = \int_{v'} d\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\bar{J}_m}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{s'} \frac{\bar{J}_{ms}}{R} ds'$$

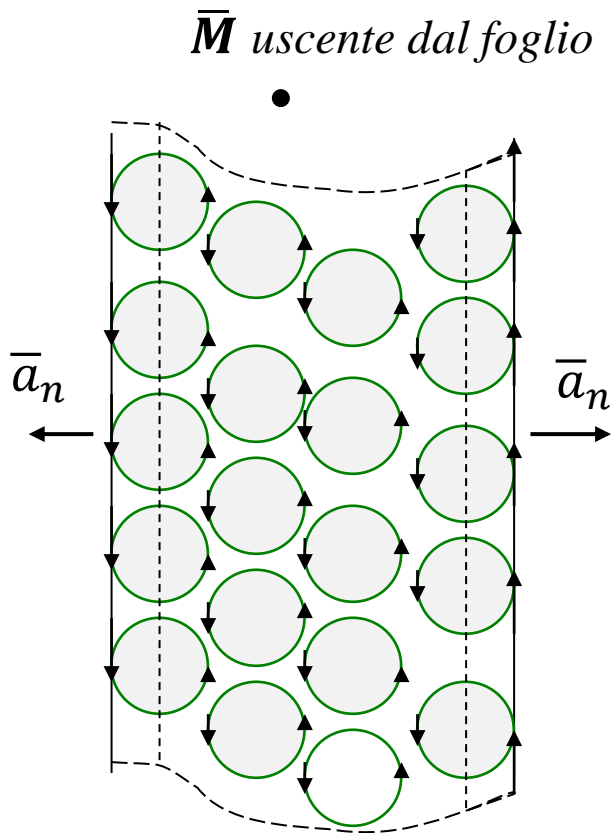
Quindi la determinazione di \bar{A} dovuto ad una assegnata densità di momento del dipolo magnetico \bar{M} si riduce alla determinazione delle correnti di magnetizzazione.

Di seguito il vettore di densità di flusso magnetico \bar{B} può essere determinato dalla relazione:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

Densità di corrente di magnetizzazione

L'equivalenza della *densità volumica del momento del dipolo magnetico* con la *densità di corrente volumica* e la *densità di corrente superficiale* può essere qualitativamente spiegata considerando una sezione di materiale magnetizzato.



Si assume che un campo magnetico esterno abbia causato l'allineamento delle correnti di circolazione atomiche. La forza di questo effetto di magnetizzazione é misurata con il vettore \bar{M} .

Sulla superficie del materiale ci sarà una densità di corrente superficiale \bar{J}_{ms}

$$\bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \bar{a}_n \quad \left[\frac{A}{m} \right]$$

Densità di corrente di magnetizzazione

- Se \bar{M} é uniforme all'interno del materiale le correnti nei bipoli atomici adiacenti, che fluiscono in direzioni opposte, si annullano ovunque producendo delle correnti nette nulle all'interno. Questo é insito nella equazione:

$$\bar{J}_m = \bar{\nabla} \times \bar{M} \quad \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

poiché le derivate spaziali di una costante \bar{M} sono nulle.

- Se \bar{M} varia nello spazio, le correnti atomiche interne non si annullano, dando luogo a una densità di corrente volumica netta \bar{J}_m .

Sarebbe possibile giustificare le relazioni quantitative tra \bar{M} e le densità di corrente \bar{J}_m e \bar{J}_{ms} derivandole dalle correnti atomiche sulla superficie e all'interno del materiale magnetico.

Campo magnetico

Poiché l'applicazione di un campo magnetico esterno provoca:

- un allineamento dei momenti dei dipoli interni
- induce un momento magnetico in un materiale magnetico

la densità del flusso magnetico risultante in presenza di un materiale magnetico sarà diversa da quella che il campo genera nel vuoto:

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_o \bar{J}$$

L'effetto macroscopico della magnetizzazione può essere studiato, con buona approssimazione, incorporando la sola densità di corrente equivalente volumica \bar{J}_m nella equazione rotorica di base valida per il vuoto, ottenendo:

$$\frac{1}{\mu_o} \bar{\nabla} \times \bar{B} = \bar{J} + \bar{J}_m = \bar{J} + \bar{\nabla} \times \bar{M} \quad \bar{\nabla} \times \left(\frac{\bar{B}}{\mu_o} - \bar{M} \right) = \bar{J}$$
$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} \quad \text{con} \quad \bar{H} = \left(\frac{\bar{B}}{\mu_o} - \bar{M} \right)$$

Campo elettrostatico VS Campo magnetostatico

Campo elettrostatico

$$\bar{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n_{\Delta v}} \bar{p}_k}{\Delta v} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{P} \cdot \bar{a}_R}{R^2} dv' \text{ [V]}$$

$$\bar{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho \left[\frac{C}{m^3} \right]$$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

Campo magnetostatico

$$\bar{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n_{\Delta v}} \bar{m}_k}{\Delta v} \left[\frac{A}{m} \right]$$

$$d\bar{A} = \frac{\mu_0 \bar{M} \times \bar{a}_r}{4\pi R^2} dv' \left[\frac{Wb}{m} \right]$$

$$\bar{\nabla} \times \left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \right) = \bar{j} \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \left[\frac{A}{m} \right]$$

Campo magnetico

Esaminando le relazioni precedenti si vede che *quando il campo magnetico si sviluppa nella materia, le correnti di circolazione presenti nella materia interagiscono con il campo magnetico alterandone la distribuzione rispetto a quella che si avrebbe nel vuoto*. Per poter tener conto di questo effetto si *definisce* la grandezza fondamentale *intensità del campo magnetico* \bar{H} che tiene conto della magnetizzazione del materiale:

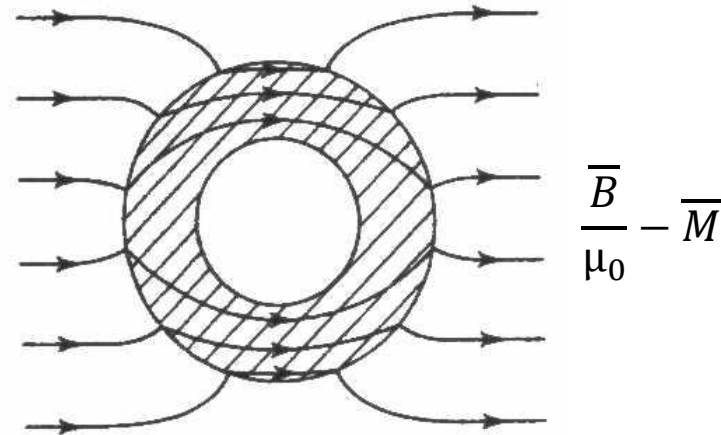
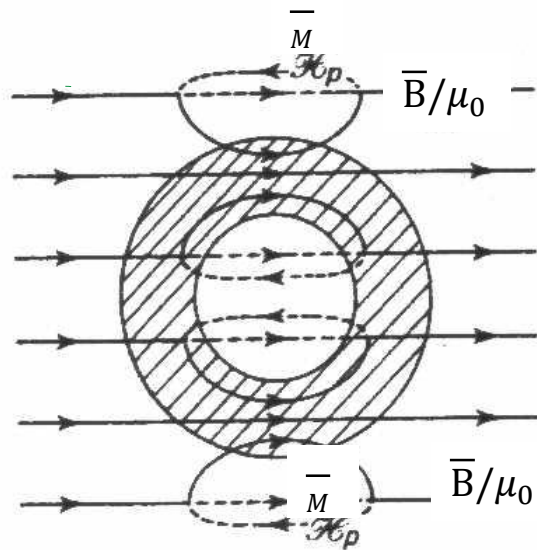
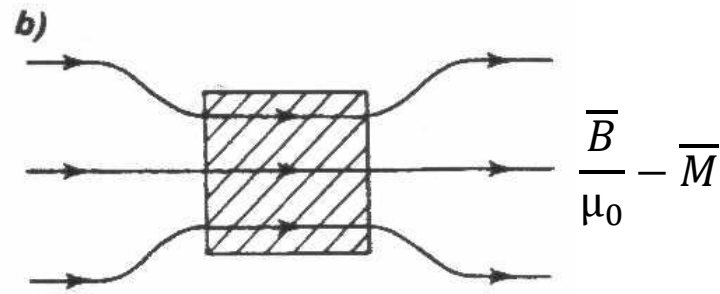
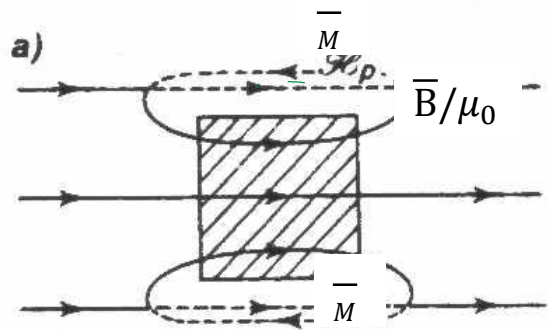
$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \quad \left[\frac{A}{m} \right]$$

Attraverso semplici passaggi, *l'equazione rotorica* può essere scritta:

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} \quad \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

Dove \bar{J} è la densità volumica delle correnti di circolazione nel vuoto.

Campo magnetico



a) *Campo magnetico preesistente \bar{B}/μ_0 e campo magnetico prodotto dal corpo ferromagnetico con un momento magnetico \bar{M}*

b) *Campo risultante deviato dal campo indotto con Momento magnetico \bar{M}* 45

Legge di circuitazione di Ampere

Calcolando l'integrale superficiale scalare di entrambi i membri della $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ si ha:

$$\int_S \nabla \times \bar{H} \cdot d\bar{s} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = I$$

Applicando il teorema di Stoke:

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = I \quad [A]$$

dove:

- C é il contorno che delimita la superficie S e
- I é la corrente di circolazione concatenata con la linea chiusa C .

Le direzioni e i versi del contorno orientato C e del flusso della corrente seguono la regola della mano destra.

Mezzi lineari e isotropi

La legge della circuitazione è molto utile per la determinazione di campi magnetici dovuti alla corrente, quando esistono *simmetrie cilindriche*, cioè quando *esiste un percorso chiuso intorno alla corrente I nel quale il campo magnetico è costante*.

Quando le proprietà magnetiche del mezzo sono *lineari* e *isotrope* il momento magnetico \bar{M} è direttamente proporzionale alla intensità del campo magnetico \bar{H} attraverso la *relazione costitutiva*:

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H}$$

Dove χ_m è un quantità adimensionale chiamata *suscettività magnetica*.

χ_m è un parametro analogo alla suscettività elettrica χ_e che ritroviamo nell'equazione:

$$\bar{P} = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E}$$

Mezzi lineari e isotropi

Nei materiali in cui è valida:

$$\overline{M} = \chi_m \overline{H}$$

Si ottiene:

$$\overline{H} = \frac{\overline{B}}{\mu_0} - \overline{M} \Rightarrow B = \mu_0(1 + \chi_m)H = \mu_0\mu_r H = \mu H \quad \left[\frac{Wb}{m^2} \right]$$

$$\overline{H} = \frac{1}{\mu} \overline{B} \quad \left[\frac{A}{m} \right]$$

dove: $\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}$

μ_r = permeabilità relativa del mezzo

μ_0 = permeabilità del vuoto

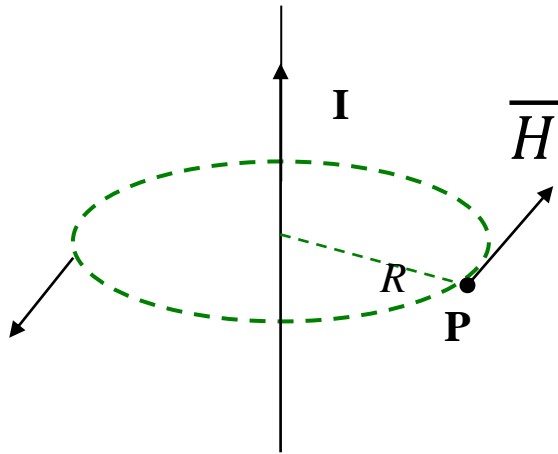
μ = permeabilità assoluta del mezzo

Campo elettrostatico VS Campo magnetostatico

Si sono così trovate delle relazioni analoghe tra le grandezze elettrostatiche e quelle magnetostatiche, in base alle quali la maggior parte delle equazioni che legano le grandezze fondamentali in elettrostatica possono essere convertite nelle corrispondenti relazioni analoghe nella magnetostatica.

<i>Elettrostatica</i>	<i>Magnetostatica</i>
\bar{E}	\bar{B}
\bar{D}	\bar{H}
ϵ	$1/\mu$
\bar{P}	$-\bar{M}$
ρ	\bar{J}
V	\bar{A}
\cdot	\times

Conduttore rettilineo indefinito

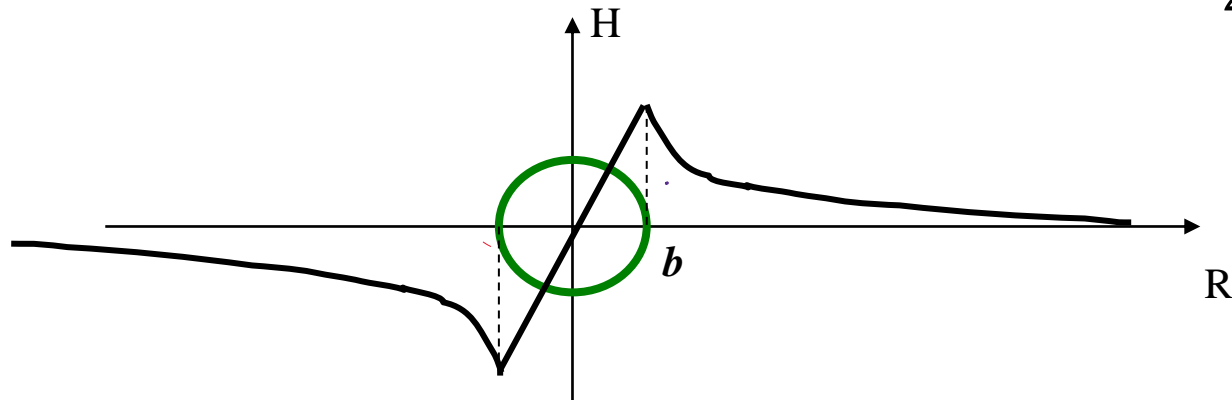


Si consideri un conduttore cilindrico rettilineo in aria, di lunghezza l e raggio b ($l \gg b$), percorso dalla corrente I . Il campo \vec{H} può essere determinato direttamente da \vec{B} :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Nella regione interna al conduttore, per $R < b$: $H(R) = \frac{I}{2\pi b^2} R$

nella regione esterna al conduttore, per $R \geq b$: $H(R) = \frac{I}{2\pi R}$



Magnetostatica

I postulati fondamentali della magnetostatica:

forma differenziale

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \cdot \bar{B} &= 0 \\ \bar{\nabla} \times \bar{H} &= \bar{J}\end{aligned}$$

forma integrale

$$\begin{aligned}\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} &= 0 \\ \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} &= I\end{aligned}$$

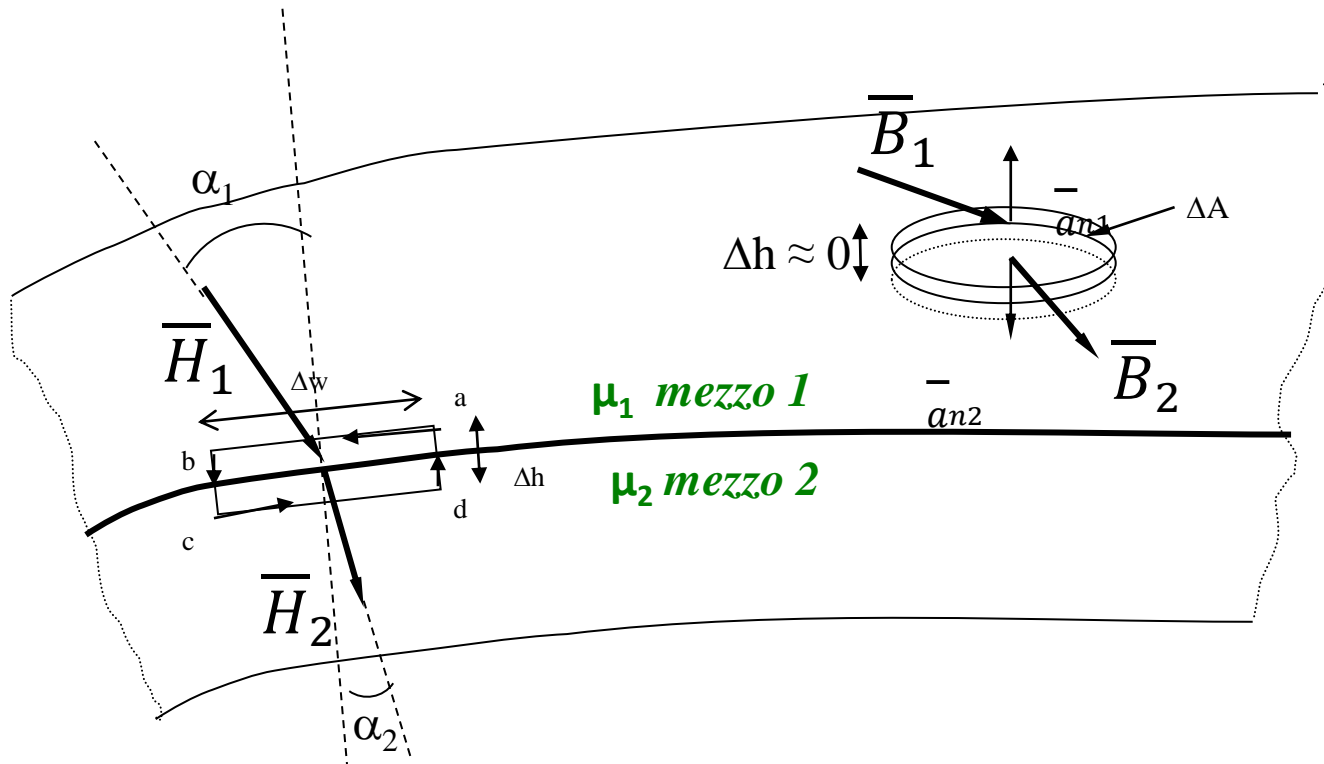
Se il materiale è lineare ed isotropo: $\bar{H} = \frac{1}{\mu} \bar{B} \quad \left[\frac{A}{m} \right]$

legge di circuitazione di Ampere

$$\oint_C \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu I \quad [A]$$

Condizioni al contorno per i campi magnetostatici

Se il vettore \vec{B} o \vec{H} attraversa una superficie di separazione di due mezzi quando nessuno dei due è un conduttore perfetto, si ha una rifrazione delle linee di campo.



$$ab = cd = \Delta h \approx 0$$

$$\Delta W \gg \Delta h$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \\ \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \end{cases}$$

Condizioni al contorno per i campi magnetostatici

$$\text{Dalla } \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

dove S è la superficie che racchiude il volume cilindrico elementare v a cavallo della superficie di separazione tra due materiali. Trascurando i contributi sulla superficie laterale del cilindro elementare, si può ricavare:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad [T]$$

$$\text{Da: } \int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

se si calcola l'integrale lineare lungo un percorso elementare chiuso $a-b-c-d$ che passi per entrambi i mezzi e trascurando i contributi relativi ai tratti di percorso normali alla interfaccia, si ottiene:

$$H_{1t} \Delta w - H_{2t} \Delta w = I_n \quad [A]$$

Dove I_n è il flusso di \vec{J} in direzione normale alla superficie delimitata dal percorso $a-b-c-d$. La normale è legata al verso di percorrenza di $a-b-c-d$ dalla regola della mano destra.

Condizioni al contorno per i campi magnetostatici

Quando la densità di corrente superficiale J è uguale a zero e i due mezzi sono lineari ed isotropi, essendo $B = \mu H$, troviamo che:

$$H_{t1} = H_{t2} \quad \text{e} \quad B_{1n} = B_{2n}$$

Quindi se la densità di corrente superficiale J_s è uguale a zero, anche la componente tangenziale è continua.

Dal $B_{1n} = B_{2n}$ esprimendo B in funzione di H , si ottiene:

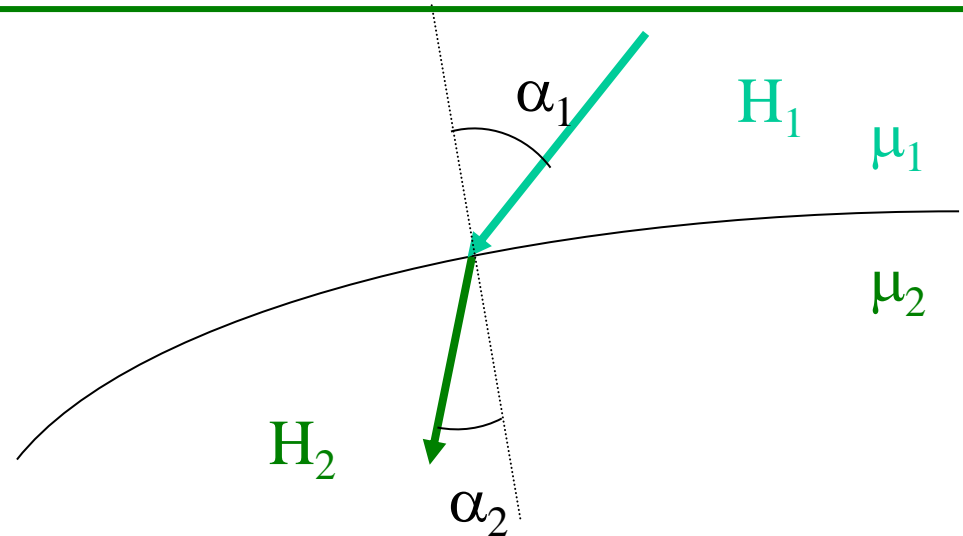
$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Questo implica che:

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Condizioni al contorno per i campi magnetostatici

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$



Se la densità superficiale di corrente libera J è nulla, il campo attraversando una superficie di separazione tra due mezzi forma un angolo α_2 con la normale alla superficie minore di quello di incidenza ($\alpha_2 < \alpha_1$) passando da un mezzo a permeabilità μ_1 ad un mezzo a permeabilità più bassa ($\mu_2 < \mu_1$). Ossia, la direzione del campo nel mezzo 2 tende ad avvicinarsi alla direzione della normale, questo per effetto della diminuzione della componente tangente, mentre la componente normale si conserva .

Condizioni al contorno per i campi magnetostatici

In particolare se il mezzo 1 non è un materiale magnetico (ad esempio l'aria, $\mu_1 = \mu_0$) e il mezzo 2 ha $\mu_2 \gg \mu_1$ (materiale ferromagnetico), dalla relazione:

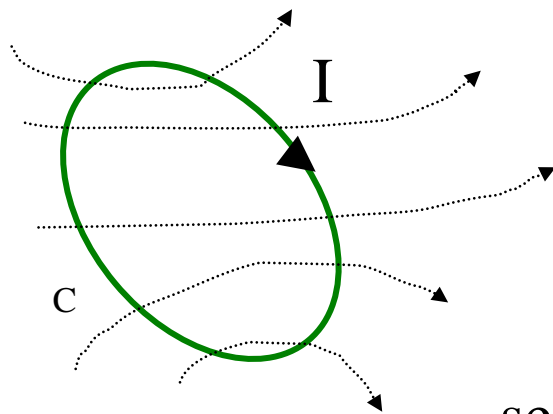
$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$\tan \alpha_2 \rightarrow \infty$ e dunque $\alpha_2 \rightarrow 90^\circ$.

Ciò significa che per angolo arbitrario di incidenza del campo α_1 , *il campo magnetico nel mezzo ferromagnetico diventa quasi parallelo alla interfaccia.*

Se il mezzo 1 è ferromagnetico e il mezzo 2 è aria $\mu_2 \ll \mu_1$, risulta che $\tan \alpha_2 \rightarrow 0$ e $\alpha_2 \rightarrow 0^\circ$; quindi se il campo magnetico passa da un mezzo ferromagnetico all'aria, le *linee di flusso assumono nell'aria una direzione quasi normale alla interfaccia.*

Induttanza e induttori



Il flusso del campo B prodotto dalla corrente I

$$\Phi = \int_{S_2} \bar{B} \cdot d\bar{s} \text{ [Wb]}$$

se assumiamo che B sia costante $\Phi = B \cdot S$

Se il mezzo è lineare che la permeabilità del non cambi con la corrente e I , in base alla legge di Biot-Savart: $B \propto I$, perciò:

$$\Phi = B \cdot S \propto I$$

Se il circuito C è formato da N spire, il rapporto tra il *flusso magnetico concatenato* $\Phi_c = N\Phi$ e la corrente che circola nello stesso circuito si definisce *autoinduttanza del circuito C*:

$$L = \frac{\Phi_c}{I} \text{ [H]}$$

Induttanza e induttori

Un conduttore disposto in aria o su un nucleo secondo una certa forma è chiamato *induttore*. L'autoinduttanza dipende:

- dalla forma geometrica e dalla natura fisica del materiale del conduttore con il quale è stata realizzata la spira o il circuito
- dalla permeabilità del mezzo.

In un mezzo lineare l'autoinduttanza non dipende dalla corrente I nella spira o nel circuito né dalla intensità del campo magnetico H o dal flusso Φ . Essa esiste (e dunque può essere definita) indipendentemente dal fatto che la spira o circuito siano aperti o chiusi, o che siano posti in prossimità di un altro circuito o spira.

Come il condensatore è in grado di immagazzinare energia elettrica, analogamente un induttore è in grado di immagazzinare *energia magnetica*.

Induttanza e induttori

La procedura generale per determinare l'autoinduttanza di un induttore è la seguente:

1. Stabilire il sistema di coordinate appropriato in base alla geometria dell'induttore (coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche);
2. Assumere il valore della corrente I nel filo conduttore, e in funzione di questa determinare \bar{B} per mezzo della:

✓ *legge della circuitazione di Ampere*, se \bar{B} si può ritenere costante lungo il percorso chiuso scelto l' che si concatena con la corrente

$$\oint_{l'} \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu I$$

✓ *legge di Biot-Savart*, in tutti gli altri casi:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\bar{l}' \times \bar{a}_r}{R^2}$$

Induttanza e induttori

3. calcolare il flusso Φ che si concatena con ciascuna spira. Se l'induttore è formato da N spire, calcolare il flusso concatenato Φ_c moltiplicando il flusso Φ per il numero delle spire:

$$\Phi_c = N \int_S \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{s}}$$

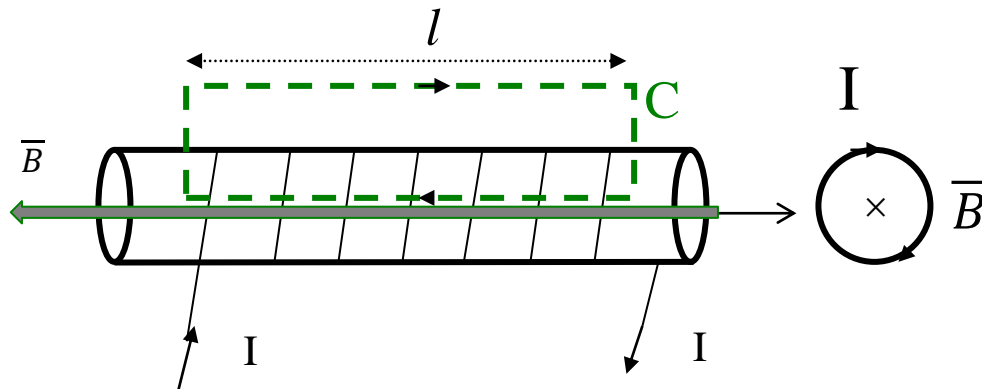
4. calcolare L dal rapporto: $L = \frac{\Phi_c}{I}$

Autoinduttanza di una bobina lineare

Per determinare \vec{B} in funzione della corrente I , si applica la legge della circuitazione di Ampere lungo un percorso rettangolare C che si sviluppa parzialmente all'interno e parzialmente all'esterno del conduttore. Lungo C si ha:

$$H l = NI \rightarrow B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

con N numero delle spire concatenate con il percorso C



\vec{B} è uniforme e parallelo all'asse del solenoide con il verso dato dalla regola di Maxwell.

Autoinduttanza di una bobina lineare

Il *flusso per unità di lunghezza* sarà: $\Phi = BS = \mu_o \frac{NI}{l} S$

dove S é sezione trasversale del solenoide. Il *flusso concatenato* è:

$$\Phi_c = N\Phi = \mu_o \frac{N^2 I}{l} S$$

Quindi *l'induttanza* é:

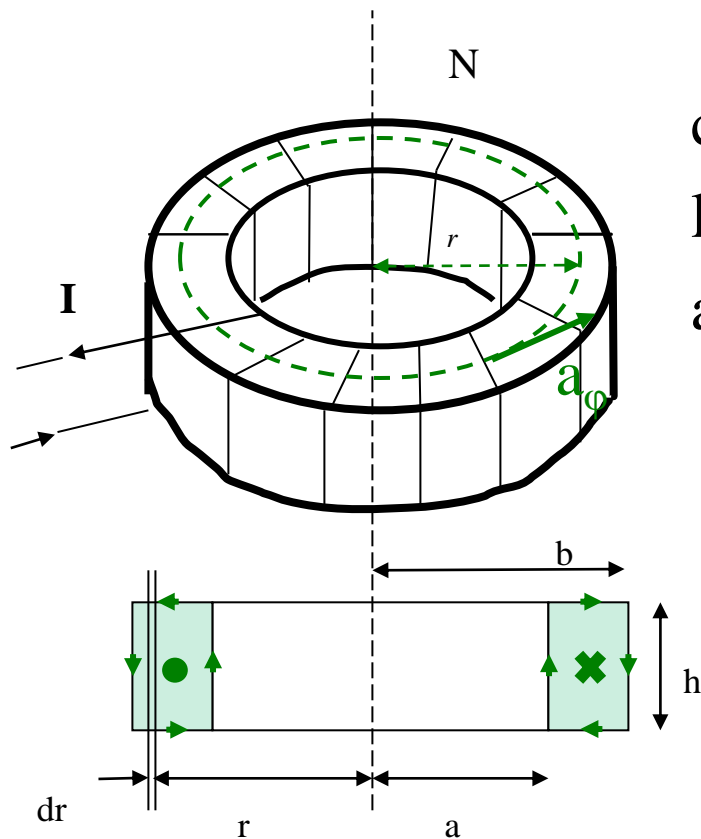
$$L = \frac{\Phi_c}{I} = \mu_o \frac{N^2 S}{l} [H]$$

Il valore effettivo della induttanza é minore di quello ottenuto: $L_{\text{effettivo}} < L$, poiché sono state fatte le seguenti approssimazioni:

- assumere il solenoide di lunghezza infinita
- trascurare l'effetto dei bordi alle due estremità del solenoide.

Autoinduttanza di una bobina toroidale

Bobina toroidale con N spire avvolte su un supporto a sezione rettangolare. Per la geometria é consigliabile usare un sistema di coordinate cilindriche:



$$\vec{B} = B \vec{a}_\varphi \quad d\vec{l} = r d\varphi \vec{a}_\varphi$$

calcolando la circuitazione al vettore \vec{B} lungo un percorso circolare di raggio r con $a < r < b$:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_c \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = NI$$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c B \vec{a}_\varphi \cdot r d\varphi \vec{a}_\varphi = \mu_0 NI$$

$$\int_0^{2\pi} B \cdot r d\varphi = 2\pi r B = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Autoinduttanza di una bobina toroidale

Il *flusso* sarà:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S \left(\frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{a}_\varphi \right) \cdot (h dr \vec{a}_\varphi) = \\ &= \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}\end{aligned}$$

il *flusso concatenato* e l'*autoinduttanza* saranno:

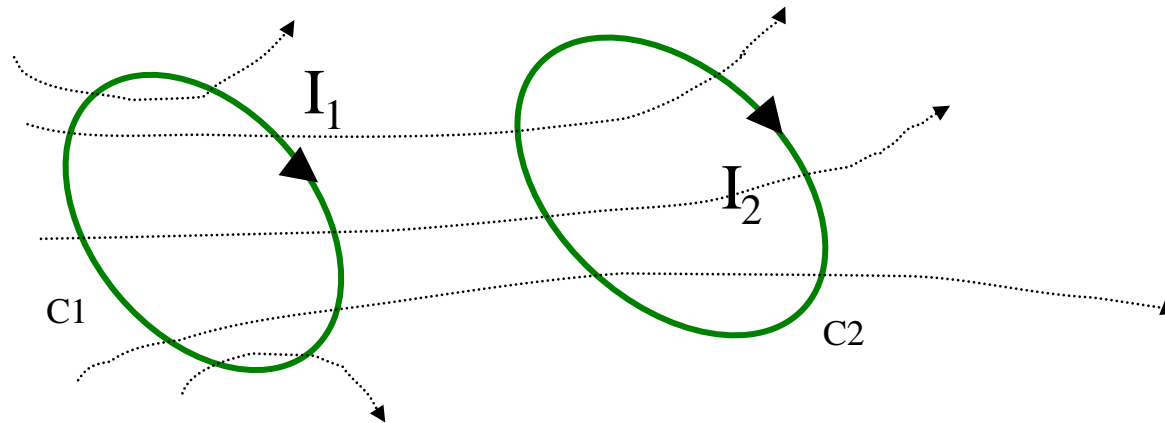
$$\Phi_c = N\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

L'autoinduttanza L non dipende dalla corrente I (per un mezzo a permeabilità costante) e neanche dalla intensità del flusso

Φ_c

Auto e muta induttanza

Si considerano due circuiti elementari C_1 e C_2 costituiti da due spire chiuse poste in vicinanza l'una rispetto all'altra come riportato in figura:



il campo \bar{B}_1 prodotto dalla I_1 si concatena anche con il circuito C_2 messo in prossimità di C_1 , passando attraverso la superficie S_2 delimitata dal contorno C_2 . Allo stesso modo il campo \bar{B}_2 prodotto dalla I_2 si concatena anche con il circuito C_1 passando attraverso la superficie S_1 delimitata dal contorno C_2 .

$$\text{Nel circuito } C_1 \quad L_{11} = \frac{\Phi_{C11}}{I_1} \quad [\text{H}]$$

Auto e muta induttanza

Nel circuito C_2

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \bar{B}_1 \cdot d\bar{s}_2 = B_1 \cdot S_2 \quad [Wb]$$

$$B_1 \propto I_1 \Rightarrow \Phi_{21} = B_1 S_2 \propto I_1$$

l'espressione generalizzata del flusso concatenato con C_2 che ha N_2 spire sarà: $\Phi_{c21} = N_2 \Phi_{21} = L_{21} I_1$, dove L_{21} è chiamata *mutua induttanza tra i due circuiti C_1 e C_2* .

$$L_{21} = \frac{\Phi_{c21}}{I_1}$$

Reciprocamente quando il circuito inducente è C_2 e quello indotto è C_1 , i *coefficiente di auto e mutua induzione* saranno:

$$L_{22} = \frac{\Phi_{c22}}{I_2} \quad [H] \qquad L_{12} = \frac{\Phi_{c12}}{I_2} \quad [H]$$

Auto e muta induttanza

I coefficienti di mutua induttanza L_{21} e L_{12} sono uguali e vengono indicati con M . I coefficienti di autoinduttanza vengono indicati semplicemente con L_1 e L_2 .

Quando si ha un accoppiamento perfetto i flussi dispersi Φ_{1d} e Φ_{2d} sono nulli (bobine concentriche perfettamente serrate), e i flussi concatenati per singola spira tra circuito che genera il campo e circuito che lo subisce sono uguali: $\Phi_{1d} = \Phi_{11} - \Phi_{21} = 0$ e $\Phi_{2d} = \Phi_{22} - \Phi_{12} = 0$

$$\Phi_{11} = \Phi_{21} \Rightarrow \frac{L_1 I_1}{N_1} = \frac{M I_1}{N_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{L_1}{M}$$

$$\Phi_{22} = \Phi_{12} \Rightarrow \frac{L_2 I_2}{N_2} = \frac{M I_2}{N_1} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{M}{L_2}$$

dalle due ultime relazioni si ottiene la *condizione di accoppiamento perfetto*:

$$L_1 \cdot L_2 = M^2 \Rightarrow M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

Auto e muta induttanza

Si definisce coefficiente di accoppiamento K :

$$K = \pm \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{con } K=0 \div 1, \Rightarrow M = \pm K \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

$|K| \rightarrow 1$ quando l'accoppiamento tende a essere perfetto

il segno dipende dal senso di avvolgimento delle spire e dal verso delle correnti.

In generale nei casi reali si hanno dei flussi dispersi e l'*accoppiamento non è perfetto* per cui:

$$L_1 \cdot L_2 > M^2 \Rightarrow M < \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

Si definisce inoltre il coefficiente di dispersione dell'accoppiamento mutuo :

$$\sigma = 1 - K^2$$

Auto e muta induttanza

Esempi di accoppiamento tra due spire elementari 1 e 2:

