

1

**ELETTROMAGNETISMO
APPLICATO ALL'INGEGNERIA
ELETTRICA ED ENERGETICA
(EAIEE)**

Giuliana Sias

Riferimenti

Ricevimento:

Prof. Giuliana Sias, per appuntamento su Teams

Indirizzo e-mail: giuliana.sias@unica.it, tel. 070 6755878

Codice Teams EAIEE: *hym1nhl*

Modalità svolgimento esame:

- Elettrici: un problema da risolvere con il software COMSOL + 2 domande orali
- Energetici: un problema da risolvere con il software COMSOL + 2 domande orali

Seminario 3 CFU: 1 domanda orale sugli argomenti del seminario

- Tesina facoltativa su un argomento scelto dallo studente: fino ad un massimo di 3 punti

Programma Elettrici (9 CFU)

Prof. G. Sias

- 1) Introduzione
- 2) Elettrostatica
- 3) Introduzione FEM
- 4) Campo di corrente stazionario
- 5) Magnetostatica
- 6) Circuiti magnetici
- 7) Forza ed Energia magnetica
- 8) Campi tempo-varianti
- 9) Campi armonici
- 10) Onde piane
- 11) Introduzione alla Fusione Termonucleare controllata

Seminari

Introduzione alla Magnetoidrodinamica (prof. Montisci)

Programma Energetici (6 CFU)

Prof. G. Sias

- 1) Introduzione
- 2) Elettrostatica
- 3) Introduzione FEM
- 4) Campo di corrente stazionario
- 5) Magnetostatica
- 6) Circuiti magnetici
- 7) Forza ed Energia magnetica
- 8) Campi tempo varianti I parte (fino a pagina 23)

Seminario di Trasmissione elettromagnetica dell'energia (3 CFU)

- 8) Campi tempo varianti II parte (da pagina 24)
- 9) Campi armonici
- 10) Onde piane
- 11) Introduzione alla Fusione Termonucleare controllata

Seminari

Introduzione alla Magnetoidrodinamica (MHD)

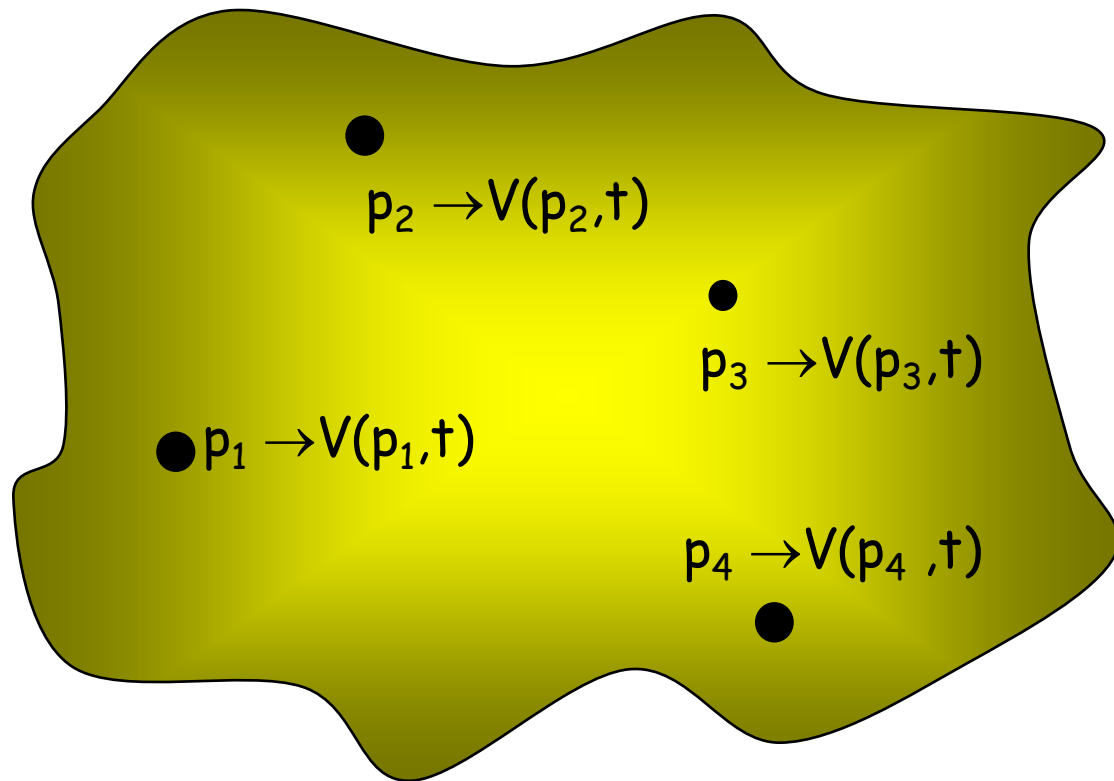
Testi

Testi consigliati:

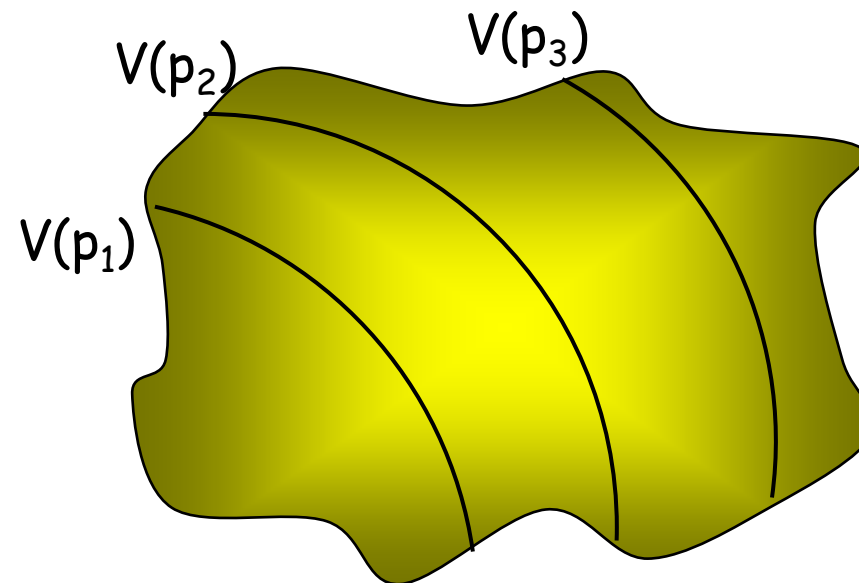
- **D. K. Cheng; Field and Wave Electromagnetics 2° ed, Addison-Wesley Longman**
- M. Malesani G. Guarnieri, Campi elettromagnetici, ed. Libreria Progetto, Padova
- P. P. Silvester R.L. Ferrari, Finite Elements for electrical Engineering, Cambridge university Press
- M.N.O. Sadiku - Numerical Techniques in Elettromagnetics - CRC Press
- R. Moreau, Magnetohydrodynamics, Kluwer Academic Pub.
- Lucidi delle lezioni (non sono delle dispense!)

CAMPO SCALARE

In una regione dello spazio diciamo che è presente un campo se in tale regione è definita una grandezza fisica funzione della posizione (e anche del tempo). Se la grandezza è uno scalare allora abbiamo un **campo scalare**, esempio: **campo di temperature**



Dato un campo scalare, e considerato un certo istante t , il luogo dei punti in cui $f(p)$ ha lo stesso valore costituisce una *linea* (o superficie se siamo in 3D) *di livello*

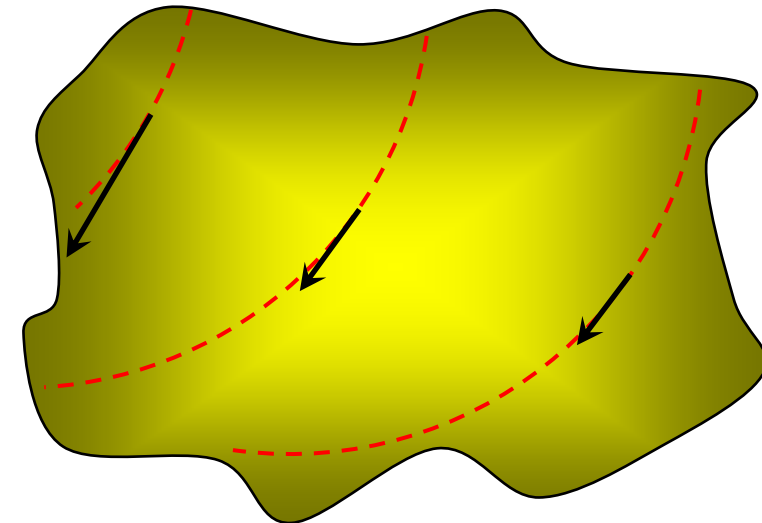
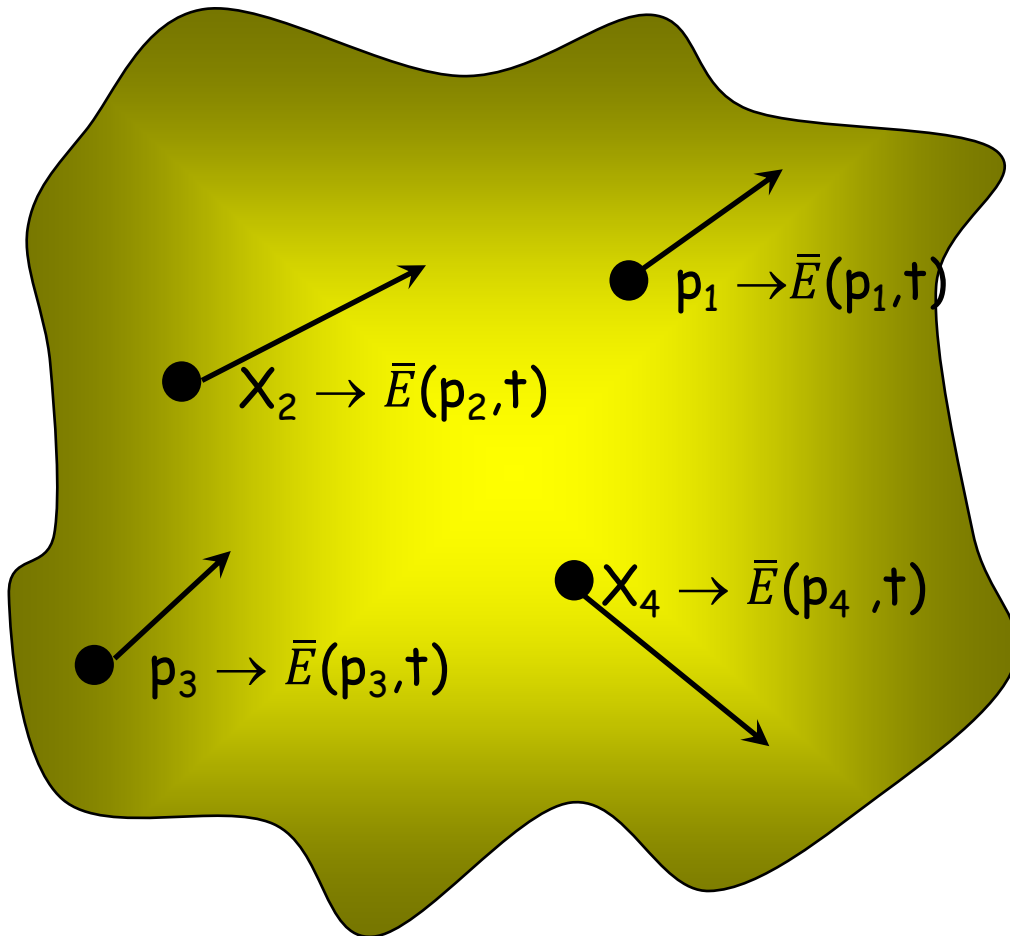


CAMPO VETTORIALE

Se la grandezza fisica che definisce il campo è vettoriale, il campo è detto vettoriale.

Esempio: **Campo di Velocità, Campo Elettrico.....**

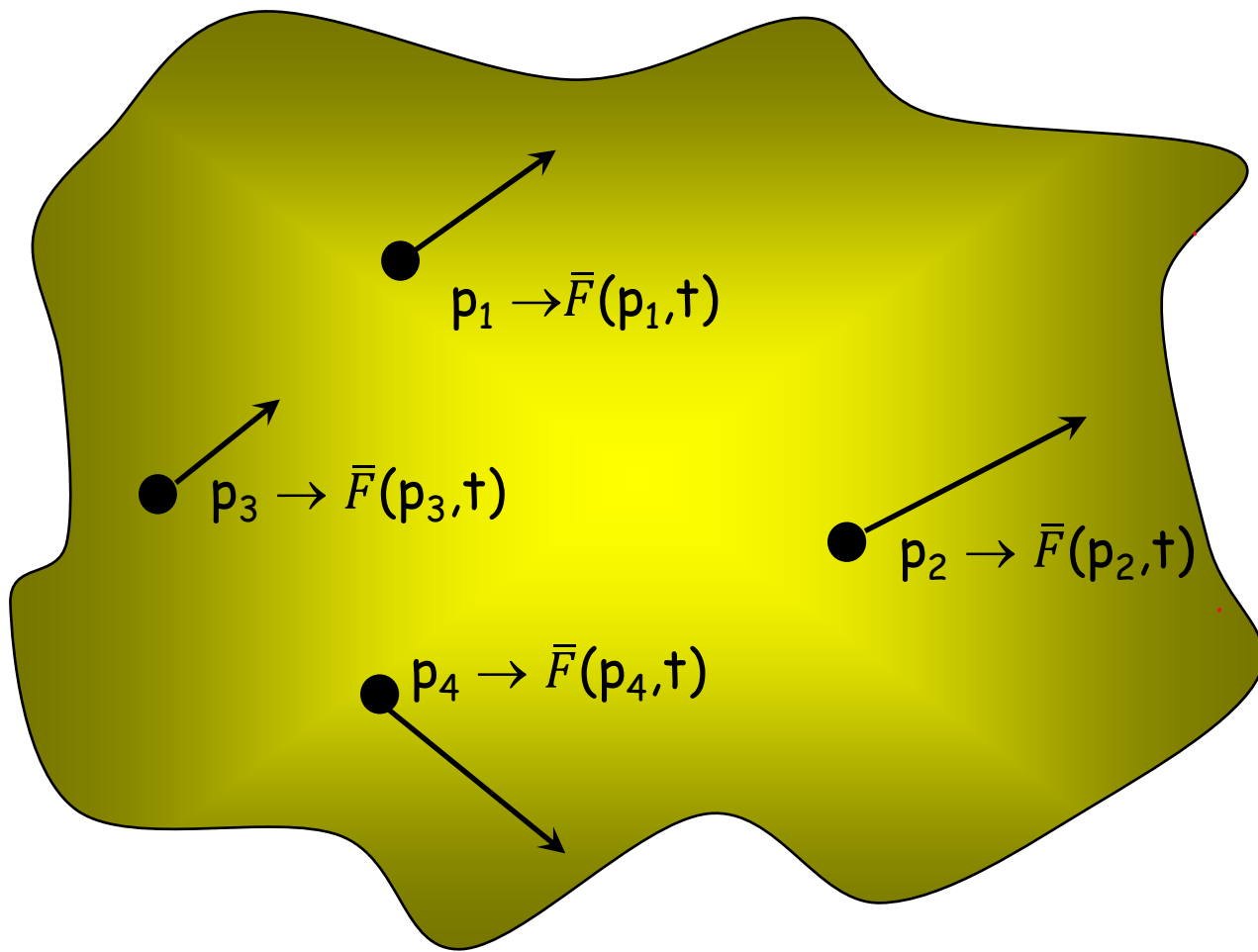
Dato un campo vettoriale, e considerato un certo istante t , una linea che sia in ogni punto tangente a $f(p)$ è detta **linea vettoriale o di campo (o detta anche di flusso)**. Due linee di campo nn si intersecano mai.



CAMPO DI FORZE

Se la grandezza fisica che definisce il campo è una forza, il campo è detto Campo di Forze.

Esempio: **Campo Elettrico**

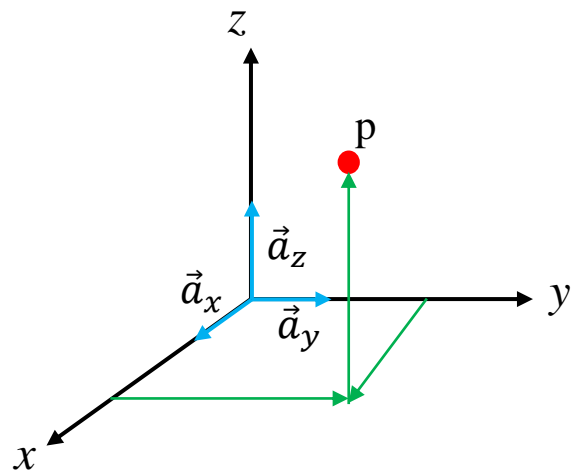


Le linee di campo possono essere:

- Chiuse
- Aperte di lunghezza finita
- Aperte di lunghezza infinita (se occupano una regione illimitata o se si avvolgono a spirale su una superficie limitata)

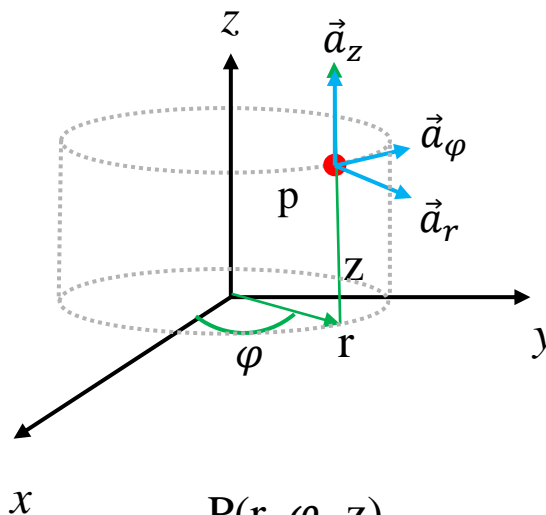
Sistemi di riferimento

coordinate cartesiane



$$P(x,y,z)$$

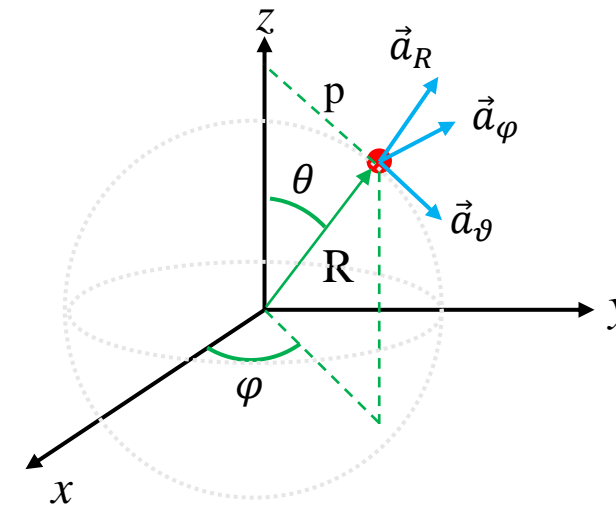
coordinate cilindriche



$$P(r, \varphi, z)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

coordinate sferiche



$$P(R, \varphi, \vartheta)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi$$

Campo scalare

$$V(p,t)=V(x,y,z)$$

$$V(P)=V(r, \varphi, z)$$

$$V(P)=V(R, \varphi, \vartheta)$$

Campo Vettoriale

$$\vec{E}(p,t) = E_x \vec{a}_x + E_y \vec{a}_y + E_z \vec{a}_z$$

$$\vec{E}(p,t) = E_r \vec{a}_r + E_\varphi \vec{a}_\varphi + E_z \vec{a}_z$$

$$\vec{E}(p,t) = E_R \vec{a}_R + E_\varphi \vec{a}_\varphi + E_\vartheta \vec{a}_\vartheta$$

$$\begin{cases} E_x = E_r \cos\varphi \\ E_y = E_r \sin\varphi \\ E_z = E_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = E_R \sin\vartheta \cos\varphi \\ E_y = E_R \sin\vartheta \sin\varphi \\ E_z = E_R \cos\vartheta \end{cases}$$

GRADIENTE

In uno spazio tridimensionale definito da un sistema di coordinate cartesiane con vettori indicati \vec{a}_x, \vec{a}_y e \vec{a}_z il nabla è definito come:

$$\nabla = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Si definisce **gradiente di un campo scalare** $V(P, t)$ in un punto p di coordinate (x, y, z) :

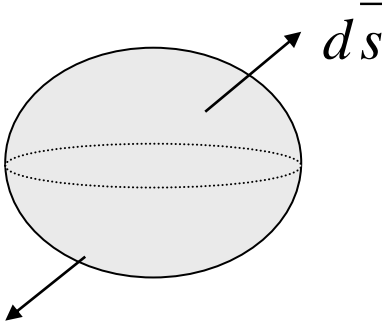
$$\text{grad}V = \nabla V = \vec{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

Pertanto l'operatore gradiente si applica ad una funzione scalare e restituisce una funzione vettoriale. Il vettore gradiente:

- indica la direzione e il valore della massima variazione in ciascun punto dello spazio e il suo modulo fornisce l'indicazione di tale variazione
- è ortogonale alle superfici di livello del campo scalare

DIVERGENZA

Si definisce **divergenza di campo un vettoriale** \vec{E} in un punto p , *il flusso netto attraverso la superficie S per unità di volume*, quando il volume tende a zero:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\Delta v}$$


In uno spazio tridimensionale definito da un sistema di coordinate cartesiane:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

La divergenza esprime la tendenza delle linee di flusso del campo a confluire o a divergere:

Teorema della divergenza

Il flusso totale di un campo vettoriale \vec{E} uscente da una superficie chiusa qualunque S è uguale all'integrale della divergenza del vettore, esteso al volume V racchiuso dalla superficie stessa

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dv$$

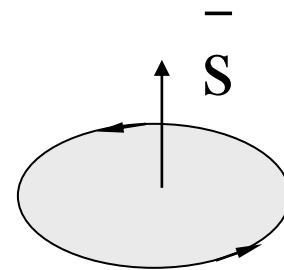
ROTORE

Si definisce **rotore di un di campo vettoriale** \bar{E} in un punto p , la *circuitazione lungo il bordo l per unità di superficie*, quando l'area della superficie tende a zero:

$$\text{rot } \bar{E} = \nabla \times \bar{E} = \max \left\{ \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \bar{E} \cdot d\bar{l}}{\Delta S} \right\}$$

esprime la tendenza della linea di campo ad effettuare una rotazione intorno ad un asse

In uno spazio tridimensionale definito da un sistema di coordinate cartesiane:



$$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Teorema di Stokes:

L'integrale superficiale del rotore di un campo vettoriale \bar{A} su una superficie aperta S è uguale all'integrale lineare del vettore lungo la linea chiusa C che delimita il contorno della superficie.

$$\int_S (\nabla \times \bar{E}) \cdot d\bar{s} = \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

Operatori del secondo ordine

siano $\begin{cases} V \text{ un campo scalare} \\ \bar{A} \text{ un campo vettoriale} \end{cases}$

	grad V	rot \bar{A}	div \bar{A}
grad	-	-	ok
rot	0	ok ^(**)	-
div	∇^2 ^(*)	0	-

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$(*) \nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$$

$$(**) \nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$$

Le seguenti identità sono sempre verificate

I identità nulla: $rot (grad (V)) = \nabla \times (\nabla V) \equiv 0$

II identità nulla: $div (rot (\bar{A})) = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) \equiv 0$

Identità differenziali

$$\text{grad } \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } V$$

$$\text{grad}(a_1 V_1 + a_2 V_2) = a_1 \text{grad}(V_1) + a_2 \text{grad}(V_2)$$

$$\text{grad}(V_1 \cdot V_2) = V_2 \text{grad}(V_1) + V_1 \text{grad}(V_2)$$

$$\text{rot } \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \bar{A}$$

$$\text{rot}(a_1 \bar{A}_1 + a_2 \bar{V}_2) = a_1 \text{rot}(\bar{V}_1) + a_2 \text{rot}(\bar{V}_1)$$

$$\text{rot}(f \bar{A}) = f \text{rot}(\bar{A}) + \text{grad}(f) \times \bar{A}$$

Identità differenziali

$$\operatorname{div} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{A}$$

$$\operatorname{div} (a_1 \bar{A}_1 + a_2 \bar{A}_2) = a_1 \operatorname{div} (\bar{A}_1) + a_2 \operatorname{div} (\bar{A}_2)$$

$$\operatorname{div} (f \bar{A}) = f \operatorname{div} (\bar{A}) + \operatorname{grad}(f) \cdot \bar{A}$$

$$\operatorname{div} (\bar{A}_1 \bar{A}_2) = \bar{A}_2 \operatorname{rot} (\bar{A}_1) + \bar{A}_1 \operatorname{rot} (\bar{A}_2)$$

$$\nabla^2 \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 V$$

$$\nabla^2 (a_1 V_1 + a_2 V_2) = a_1 \nabla^2 (V_1) + a_2 \nabla^2 (V_2)$$

$$\nabla^2 (V_1 \cdot V_2) = V_1 \nabla^2 V_2 + 2 \operatorname{grad} (V_1) \cdot \operatorname{grad} (V_2) + V_2 \nabla^2 V_1$$

ELETTROMAGNETISMO

La **teoria elettromagnetica** è indispensabile per comprendere i principi di diversi fenomeni fisici , ad esempio:

- Oscilloscopi a raggi catodici
- Radar e Comunicazione satellitare
- Ricezione televisiva e telerilevamento
- Telecomunicazione
- Radio astronomia
- Dispositivi a microonde
- Comunicazione con fibre ottiche
- Transitori nelle linee di trasmissione
- Problemi di compatibilità elettromagnetica
- Sistemi di atterraggio strumentale per la guida del pilota in casi di visibilità limitata
- Conversione della energia elettromeccanica
- Studio del funzionamento del corpo umano e animale
- Impianti nucleari a fissione e a fusione nucleare
- Applicazioni della magnetoidrodinamica

Quantità basilari dell'elettromagnetismo

campo	quantità	simbolo	unità
ELETTRICO	intensità di campo elettrico	E	V/m
	densità di flusso elettrico	D	C/m ²
MAGNETICO	densità di flusso magnetico	B	T=V s/m ²
	intensità di campo magnetico	H	A/m

E : è l'unico vettore necessario per lo studio del campo elettrico stazionario nel vuoto dovuto a cariche puntuali e localizzate

D : è necessario per lo studio del campo elettrico dovuto a cariche localizzate nel vuoto e in presenza di sorgenti distribuite nella materia

B : è l'unico vettore necessario per lo studio del campo magnetico stazionario nel vuoto

H : è necessario per lo studio del campo magnetico dovuto a sorgenti distribuite nel vuoto e nei materiali

Quantità basilari dell'elettromagnetismo

Carica elettrica Q [C]:

- E' una proprietà fondamentale della materia
- Esiste solo sotto forma di multiplo delle cariche elementari (protone ed elettrone)

$$e=1,60 \times 10^{-19}$$

In elettromagnetismo si finisce la densità di carica ρ (lineare / superficiale/ volumica) la grandezza di campo che integrata (su una linea/ superficie/ volume) da Q

Corrente elettrica I [A]: $I = \frac{dQ}{dt} = \left[\frac{C}{s} \right] = [A]$

In elettromagnetismo si definisce la *densità di corrente* \vec{J} che misura la quantità di corrente che fluisce attraverso l'unità di superficie normale al flusso di corrente.

ELETTROMAGNETISMO

In un *mezzo conduttore*, possono coesistere *un campo elettrico* e *un campo magnetico*, che insieme costituiscono un *campo elettromagnetico*.

In un mezzo conduttore un **campo elettrico statico** \bar{E} causa un flusso costante di correnti di densità \bar{j} , e questo genera a sua volta un campo **magnetico statico** \bar{H} che non varia nel tempo e **non può generare f.e.m indotte**. Per cui, il campo elettrico statico \bar{E} è indipendente dal campo magnetico statico generato \bar{H} , che non interferisce con esso.

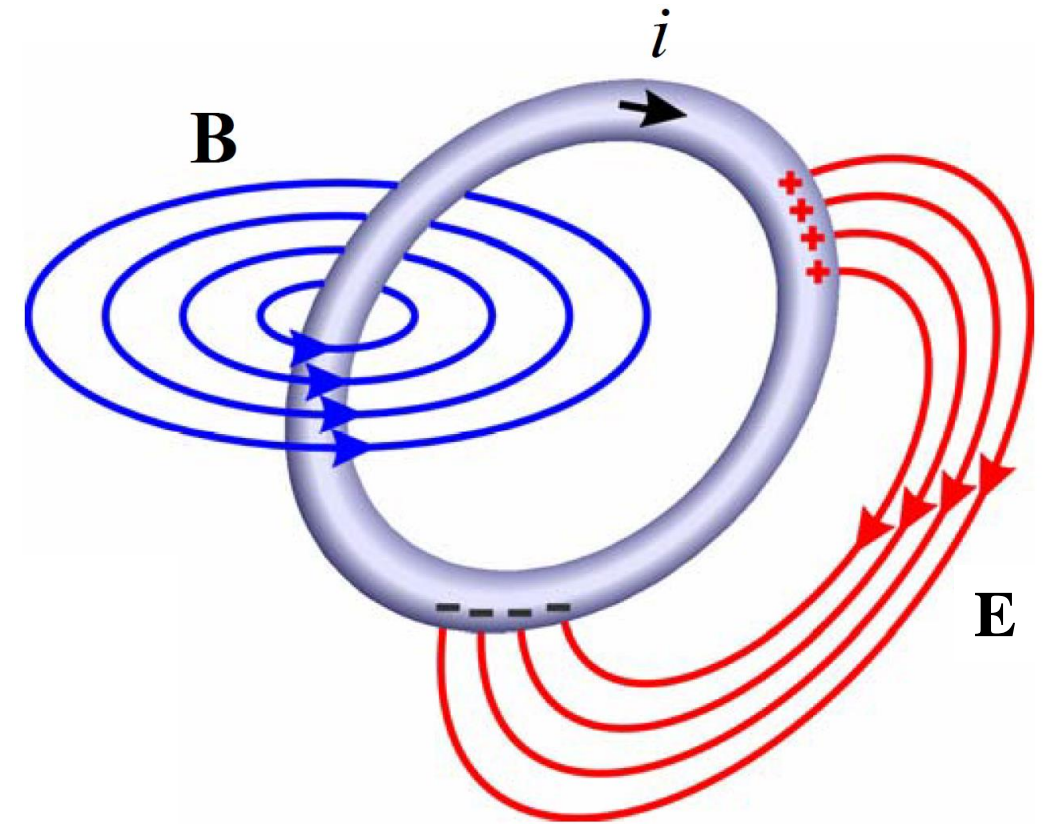
Gli effetti cambiano se il **campo elettrico non è statico**. Per comprendere questi effetti si deve studiare come una variazione di campo elettrico generi una variazione di campo magnetico e viceversa.

Per comprendere i **fenomeni elettromagnetici in regime tempo-variante**, è necessario introdurre un **modello elettromagnetico** nel quale le grandezze relative al modello elettrostatico \bar{E} e \bar{D} e quelle relative al modello magnetostatico \bar{B} e \bar{H} e quelle del campo elettrico \bar{E} e \bar{j} siano **propriamente correlate**.

ELETTROMAGNETISMO

In **condizioni stazionarie** è possibile studiare il campo di corrente prescindendo dalla presenza di un campo magnetico all'esterno del conduttore

In **condizioni non stazionarie** le equazioni che governano il campo elettrico e il campo magnetico all'esterno del conduttore sono accoppiate con le equazioni del campo di corrente



ELETTROMAGNETISMO

modello matematico generalizzato

Leggi di Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{\mathbf{H}} &= \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} &= \rho \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} &= 0\end{aligned}$$

Equazioni costitutive

Per i mezzi lineari e isotropi (non necessariamente omogenei):

$$\bar{\mathbf{D}} = \varepsilon \bar{\mathbf{E}}$$

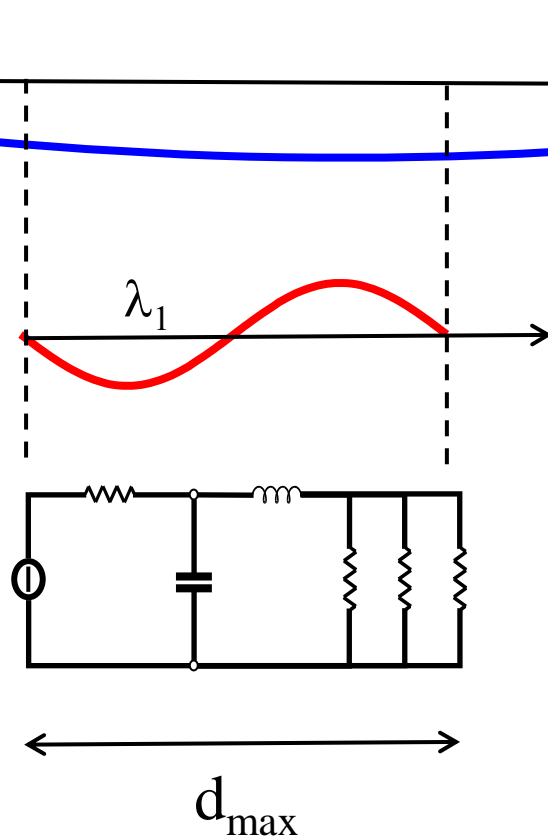
$$\bar{\mathbf{E}} = \rho \bar{\mathbf{J}}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu \bar{\mathbf{H}}$$

Equazione di continuità

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

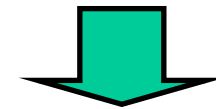
Ipotesi di quasi stazionarietà



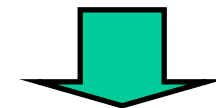
$\Delta t \ll T$ dove $\Delta t = \frac{d_{\max}}{c}$ è il ritardo di propagazione

$$\frac{d_{\max}}{c} \ll T \Rightarrow d_{\max} \ll cT = \frac{c}{f} = \lambda$$

Hp: $d_{\max} \ll \lambda$



Non ci sono fenomeni di propagazione



Parametri concentrati

Per $f=50\text{Hz}$ l'ipotesi non è ammissibile per:

- Microprocessori
- Antenne

Limiti di validità dell'approssimazione quasi stazionaria

f	T	$\lambda = c_0 T$
50 Hz	20 ms	6000 km
100 Hz	10 ms	3000 km
1 kHz	1 ms	300 km
10 kHz	100 μ s	30 km
20 kHz	50 μ s	15 km
100 kHz	10 μ s	3 km
1 MHz	1 μ s	300 m
10 MHz	100 ns	30 m
100 MHz	10 ns	3 m
1 GHz	1 ns	300 mm
10 GHz	100 ps	30 mm

QUASI-STAZIONARIETÀ

- Equazione I: $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cong 0 \Rightarrow \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cong 0$ Il campo \bar{E} è irrotazionale

$$\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \quad \text{Il campo } \bar{E} \text{ è conservativo su un insieme a connessione lineare semplice}$$

- Equazione II: $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cong 0 \Rightarrow \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cong \bar{J}$

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = I \quad \text{la circuitazione del campo } \bar{H} \text{ su } L \text{ è pari alla corrente concatenata}$$

- Equazione di continuità: $\frac{\partial \rho}{\partial t} \cong 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = 0$ Il campo \bar{J} è solenoidale

Elettromagnetismo Stazionario

Modello elettrostatico

è definito tramite il vettore intensità del campo elettrico \mathbf{E} , e il vettore densità di flusso elettrico (spostamento dielettrico) \mathbf{D} .

Le **equazioni fondamentali** sono:

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{\mathbf{E}} &= 0 \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} &= \rho\end{aligned}$$

$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = 0 \rightarrow$ il campo è irrotazionale

$\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = \rho \rightarrow$ \mathbf{D} non è solenoidale

Per i **mezzi lineari e isotropi** (non necessariamente omogenei), vale la relazione costitutiva:

$$\bar{\mathbf{D}} = \varepsilon \bar{\mathbf{E}} \rightarrow \bar{\mathbf{E}} = \frac{\bar{\mathbf{D}}}{\varepsilon}$$

Elettromagnetismo Stazionario

Modello del campo di corrente stazionario

è stato definito con il vettore intensità del campo elettrico \mathbf{E} , e il vettore densità di corrente \mathbf{J}

Le *equazioni differenziali fondamentali* sono:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = 0$$

$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = 0$ rappresenta la *legge delle tensioni in forma locale*

$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = 0$ rappresenta la *legge delle correnti in forma locale*

Per i **mezzi lineari e isotropi** (non necessariamente omogenei), vale la relazione costitutiva:

$$\bar{\mathbf{E}} = \rho \bar{\mathbf{J}} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{J}} = \gamma \bar{\mathbf{E}}$$

Elettromagnetismo Stazionario

Il modello magnetostatico

è stato definito con il vettore densità di flusso magnetico \mathbf{B} e il vettore intensità del campo magnetico \mathbf{H} .

Le *equazioni differenziali fondamentali* sono:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}}$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} \rightarrow \bar{\mathbf{H}} \text{ non è un campo irrotazionale}$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0 \rightarrow \bar{\mathbf{B}} \text{ è solenoidale}$$

Per i mezzi **lineari e isotropi** (non necessariamente omogenei), vale la relazione costitutiva:

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \bar{\mathbf{B}} \rightarrow \bar{\mathbf{B}} = \mu \bar{\mathbf{H}}$$

Elettromagnetismo Stazionario

