4
CAMPO di CORRENTE STAZIONARIO

Equazione di continuità

Nella regione dello spazio nella quale si studiano i campi, in ogni istante devono essere considerate:

- tutte le **cariche fisse**
- tutte le **cariche in movimento**.

Il moto delle cariche in equilibrio dinamico (moto uniforme) é caratterizzato:

- dalla densità di carica ρ
- dal vettore velocità delle cariche $\bar{v}$

il moto delle cariche in equilibrio dinamico é governato dal **Principio di conservazione della carica**: ***la carica elettrica totale di un sistema fisico isolato rimane costante.***

La carica elettrica è una grandezza fisica *conservativa*, cioè essa non può ne essere creata, ne distrutta.

La corrente elettrica

Particelle cariche in movimento danno origine ad una flusso di corrente elettrica. Esistono diverso tipi di corrente elettrica:

Corrente di conduzione: si ha nei conduttori o nei semiconduttori ed è generata dal drift degli elettroni o delle lacune per effetto di un campo elettrico. Questa corrente è governata dalla ***legge di Ohm.***

Corrente elettrolitica: è il risultato del moto di ioni positivi e negativi in una soluzione elettrolitica sottoposta ad un campo elettrico

Corrente di convenzione: è il risultato del moto di cariche positive e negative nel vuoto o in un gas rarefatto. Essa è caratterizzata dal movimento idrodinamico che coinvolge un *trasporto di massa*. Non sono valide le leggi di Ohm.

In questo capitolo ci occuperemo di ***corrente di conduzione***.

Campo di Corrente Stazionario

Si definisce *campo di corrente* la regione dello spazio nella quale ha sede una ***distribuzione continua di corrente elettrica***. Esso è ***stazionario***, se le grandezze che caratterizzano la sua distribuzione sono indipendenti dal tempo.

In assenza di campo elettrico che le forzi al movimento in una certa direzione, le *cariche proprie* del conduttore si muovono in maniera disordinata con velocità $\bar{v}_d$. Il loro moto disordinato, macroscopicamente, non da origine ad alcuna corrente elettrica. Se invece il conduttore è collegato ad un generatore di tensione che applica una differenza di potenziale ai sui capi, il campo elettrico che ne consegue forza le cariche proprie del conduttore ad un movimento ordinato, e il conduttore diventa sede di una corrente elettrica.

Densità di corrente elettrica

Sia N il numero di portatori di carica q per unita di volume. Nell'intervallo di tempo Δt, la quantità di carica che attraversa una superficie finita ΔA del conduttore, nella direzione normale ad essa, è:

$$\Delta q = \pm(Nq\,\bar{v}_d \cdot \Delta\bar{\mathrm{A}})\Delta t$$

Definiamo il vettore densità di corrente elettrica $\bar{J}$:

$$\bar{J} = \pm Nq\bar{v}_d = \pm\rho\bar{v}_d$$

Il segno e il valore della velocità dipende dal tipo di portatore di carica (positivo o negativo). Mentre la velocità degli elettroni nel loro moto disordinato è enorme ($\simeq 10^5$ m/s), la velocità del flusso di carica elettrico all'interno di un conduttore è piccolissima ($\simeq 10^{-3}$ m/s).

Densità di corrente elettrica

La corrente elettrica attraverso la superfice ΔA può essere espressa in funzione di $\bar{J}$:

$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = Nq\bar{v}_d \cdot \Delta\bar{\mathrm{A}} = \bar{J} \cdot \Delta\bar{\mathrm{A}}$$

Il modulo della densità di corrente è la corrente per unità di superficie

$$\left|\bar{J}\right| = \frac{\Delta \mathrm{I}}{\Delta \mathrm{A}} \quad \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

Se $\bar{J}$ è uniforme, indipendente dalla posizione la corrente è deducibile dalla relazione

$$\mathrm{I} = \bar{\mathrm{J}} \cdot \bar{\mathrm{A}}$$

Se $\bar{J}$ è funzione dello spazio, **la corrente I** che fluisce attraverso la superficie finita A **è il flusso di vettore $\bar{J}$**:

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{A}} \bar{\mathrm{J}} \cdot \mathrm{d}\bar{\mathrm{A}}$$

Dove d$\bar{A}$ è il vettore normale in ogni punto della superficie A

Corrente elettrica

Se si considera una superficie orientata A dal suo versore normale $\bar{n}$ la corrente elettrica è definita come il rapporto tre la carica netta $\Delta q = \sum q^+ + \sum q^-$ che transita attraverso s nella direzione $\bar{n}$

$$\mathrm{I} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{q}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{dq}{dt} \quad [\mathrm{C}/s]$$

La corrente elettrica è una grandezza scalare, che a parità di moto delle cariche dipende da superficie A e dalla sua orientazione.
La descrizione locale del moto delle cariche è fornita dal vettore densità di corrente $\bar{J}$, tale che:

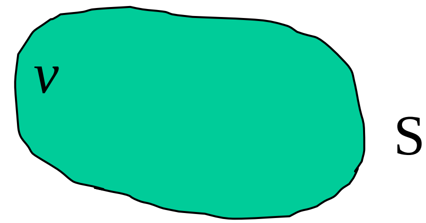
$$I = \int_A \bar{J} \cdot d\bar{A}$$

Perciò $\bar{J}$ misura la quantità di corrente che fluisce attraverso l'unità di superfice ed è misurata in A/m^2.

Equazione di continuità

Si consideri un volume arbitrario *v* delimitato da una superficie *S*. All'interno di questa regione esiste una ***carica netta Q***:

$$Q = \sum Q^{+} - \sum Q^{-}$$



La carica si conserva, perciò se c'è una ***corrente I uscente*** dalla superficie *A*, la carica netta nel volume *Q* deve ***diminuire*** a una velocità pari alla corrente *I*. Se al contrario la ***corrente I è entrante,*** la carica netta *Q* nel volume *v* deve ***aumentare*** con una velocità pari alla corrente *I*. Conseguentemente, la corrente *I* che esce/entra dalla regione di volume *v* è pari al flusso totale verso l'esterno del vettore densità di corrente $\bar{J}$ attraverso la superficie:

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = -\frac{dQ}{dt}$$

Equazione di continuità

Se la distribuzione delle cariche è continua: $Q = \int_v \rho \, dv$

La legge della conservazione della carica viene espressa matematicamente dalla relazione:

$$-\frac{d}{dt}\int_v \rho \ dv = \oint_S \bar{J} \cdot \ d\bar{S}$$

la variazione della densità spaziale di carica ρ nel tempo, entro un volume v è pari al flusso della densità di corrente $\bar{J}$, attraverso la superficie S che delimita il detto volume v.

Inoltre, la carica elettrica totale di un sistema ***Q è un invariante relativistico*** ossia il suo valore non dipende dal sistema di riferimento

Equazione di continuità

Applicando il teorema della divergenza si può scrivere:

$$\int_v \nabla \cdot \bar{\mathrm{J}}\, dv = -\int_v \frac{d\rho}{dt}\, dv$$

Da cui:

$$\nabla \cdot \overline{J} = -\frac{d\rho}{dt} \qquad \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

La relazione puntuale che deriva dal principio della conservazione della carica, è chiamata ***equazione di continuità:***

Quando le cariche sono in movimento la derivata temporale della densità di carica all'interno dell' integrale volumico, deve essere calcolata usando le derivate parziali, perché la densità di carica potrebbe essere sia funzione del tempo che funzione delle coordinate spaziali: $\rho=\rho(x,y,z,t)$.

Equazione di continuità

Per le ***correnti stazionarie*** la densità di carica non varia nel tempo, ossia:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

e l'equazione di continuità diventa:

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{J} = 0$$

Che ci dice che le correnti elettriche stazionarie sono solenoidali.

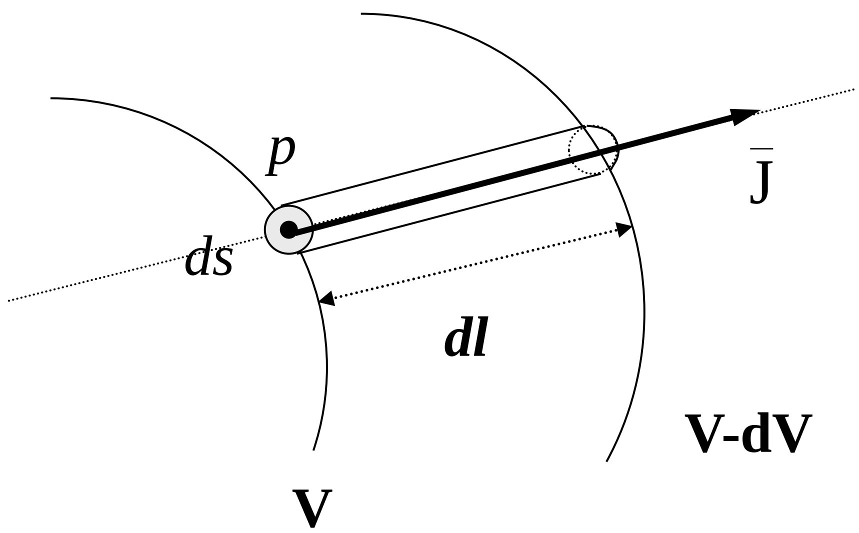
La relazione precedente in forma integrale è:

$$I_{netta} = \oint_S \overline{J} \cdot d\overline{S} = 0$$

Che equivale a dire che il flusso della densità di corrente stazionaria attraverso una superficie chiusa è nullo.

Legge di Kirchhoff delle correnti in forma locale

Si consideri un campo di corrente $\bar{J}$ stazionario. Definiamo una superficie elementare *ds* staccata su una superficie equipotenziale e definita da tante linee di flusso, tali da costituire un tubo di flusso elementare di altezza *dl***:**



$$\nabla \cdot \bar{J} = 0$$

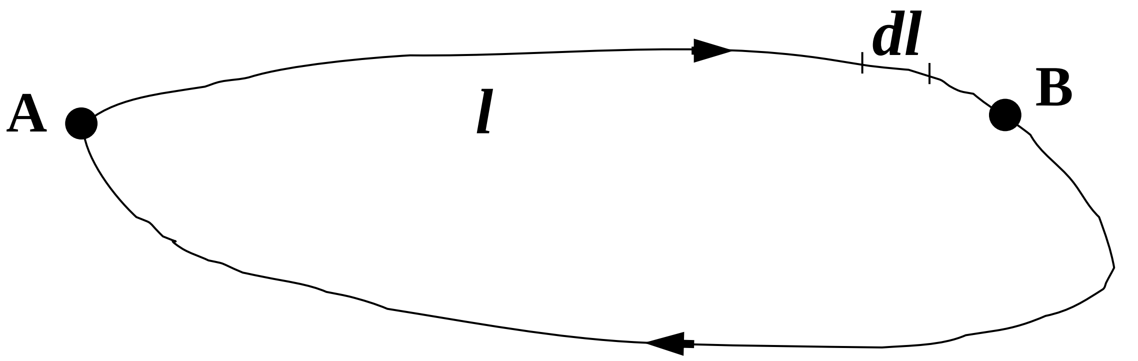
$$I_{netta} = \oint_s \bar{J} \cdot d\bar{s} = 0$$

$\nabla \cdot \bar{J} = 0$ esprime per la conservazione della corrente elettrica attraverso una superficie chiusa, perciò rappresenta la **legge di Kirchhoff delle correnti in forma locale.**

Legge di Kirchhoff delle tensioni in forma locale

Il postulato $\overline{\nabla} \times \overline{E} = 0$ rappresenta la legge di Kirchhoff in forma locale. Infatti, se il campo $\overline{E}$ è irrotazionale, la sua circuitazione lungo una qualsiasi linea chiusa è nulla:

$$\oint_{l} \overline{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\bar{\mathrm{l}} = 0 \;\Rightarrow \oint_{l} -\nabla V \cdot \mathrm{d}\bar{\mathrm{l}} = \oint_{l} dV = 0$$



$$\oint_{l} dV = \int_{A}^{B} \overline{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\bar{\mathrm{l}} + \int_{B}^{A} \overline{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\bar{\mathrm{l}} = -\mathrm{U}_{BA} - \mathrm{U}_{AB} = -\mathrm{U}_{BA} + \mathrm{U}_{BA} = 0$$

dove A e B sono due punti generici del campo.

Grandezze caratteristiche del campo di corrente

Sono state definite complessivamente

- Due grandezze **scalari globali**

Tensione V associata a una coppia di punti [V]

Corrente I associata a una superficie [A]

- Due grandezze **vettoriali locali (o puntuali)**

Campo elettrico $\bar{E}$ (o forza elettrica) associata ad un punto $\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$

Densità di corrente $\bar{J}$ associata ad un punto $\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$

Legge di Ohm in forma locale

$$\bar{J} = Nq\bar{v}_d = \rho\ \bar{v}_d$$

Nei metalli la velocità degli elettroni è proporzionale al campo elettrico applicato: $\bar{v}_d = -\mu_e \bar{E}$

$$\bar{J} = -qN\bar{v}_d = -qN\mu_e\bar{E}$$

$\bar{J} = \gamma\ \bar{E}$ forma locale della legge di Ohm

γ è la conducibilità del metallo ed è una caratteristica del materiale. Nella forma locale della legge di Ohm $\bar{\boldsymbol{E}}$ e $\bar{\boldsymbol{J}}$ hanno la stessa direzione, perciò *per convenzione la corrente è considerata come un flusso di cariche positive*. Definiamo la resistività del materiale ρ:

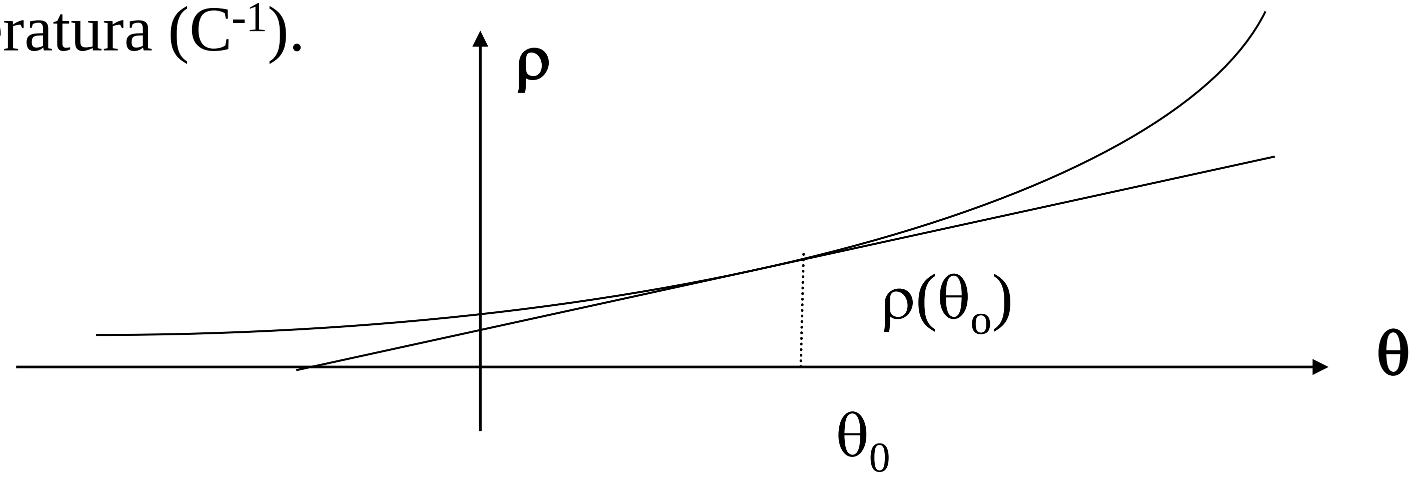
$$\rho = \frac{1}{\gamma}\,[\Omega\, m] \Longrightarrow \bar{E} = \rho\,\bar{J}$$

Resistività

La resistività ρ alla generica temperatura θ è ricavabile da una relazione approssimata lineare

$$\rho(\theta) = \rho(\theta_0) \left[1 + \alpha(\theta_0) \cdot (\theta - \theta_0)\right]$$

Dove $\rho(\theta_0)$ è la resistività alla temperatura θ_0 di riferimento, e $\alpha(\theta_0)$ il coefficiente di variazione della resistività in funzione della temperatura (C^{-1}).



I materiali passivi in regime stazionario sulla base del valore di resistività si classificano in *super conduttori*, *conduttori*, *semiconduttori e isolanti.*

Resistività

Superconduttori sono metalli o leghe di metallo che a temperature di pochi kelvin mantengono **resistività nulla**. Alcuni metalli perdono le proprietà appena il materiale è immerso in un debole campo magnetico o attraversato da una debole corrente, alcune leghe invece mantengono le proprietà anche se immersi in campi magnetici di diversi tesla o quando percorse da densità di corrente dell'ordine dei kA/mm^2. Questi materiali sono usati per costruire magneti ad alto campo in applicazioni mediche, negli acceleratori di particelle e nelle macchine a fusione termonucleare controllata.

Conduttori. I *metalli* sono i conduttori per eccellenza, in essi la conduzione è affidata agli nuvola di elettroni periferici meno vincolati dalle forze nucleari. I metalli che hanno resistività nell'ordine di $\mathbf{10^{-8} \div 10^{-6}\ \Omega m}$ e coefficiente $\alpha(\theta_0)>0$. I più usati nelle costruzione elettriche sono il rame e l'alluminio.

Resistività

Invece, nelle soluzioni *soluzione elettrolitiche* le forze elettriche provocano un moto il moto ordinato degli ioni positivi e negativi. La resistività si mantiene nell'ordine di **10^{-2}÷10^{-1} Ωm**, l'acqua di mare e l'acqua dolce demineralizzata ($\rho \cong 100\ \Omega m$) sono soluzioni elettrolitiche.

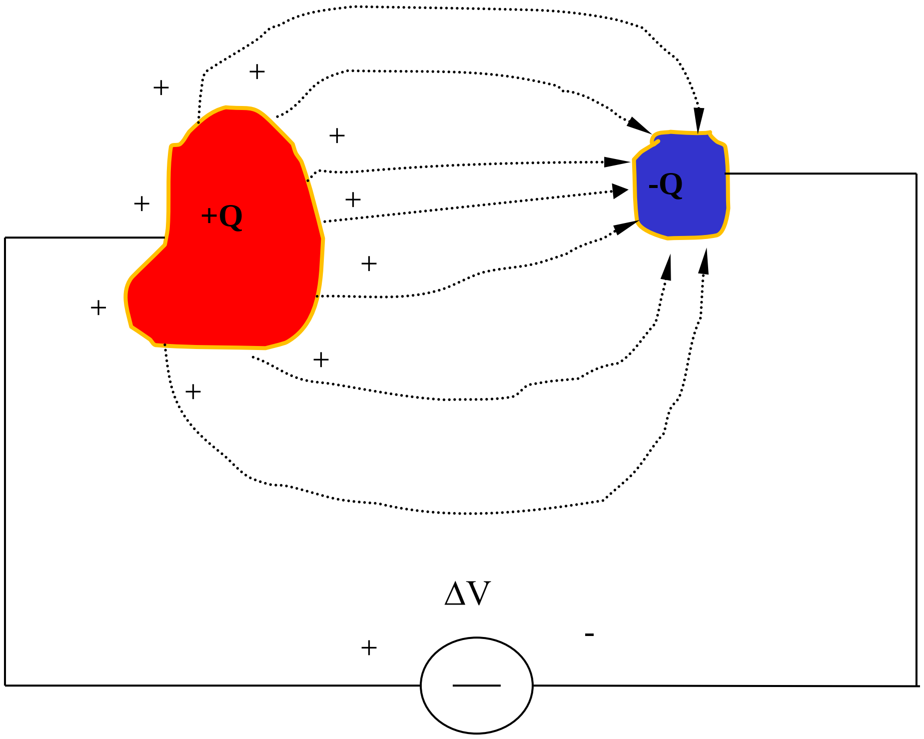
Semiconduttori: la conduzione è affidata sia agli elettroni sia alle lacune (atomi in difetto di un elettrone), la resistività si mantiene nell'ordine di **10^{-1}**, ma può essere ulteriormente ridotta se drogati. I semiconduttori hanno primaria importanza nell'elettronica.

Isolanti: sono tutti quei materiali che hanno una resistività nell'ordine di **10^{8} Ωm**. Sono isolanti gli oli minerali, i vetri il quarzo le ceramiche molte sostanze plastiche. In alcune applicazioni possiamo ritenere con buona approssimazione $\gamma = 0$.

Legge di Ohm in forma locale

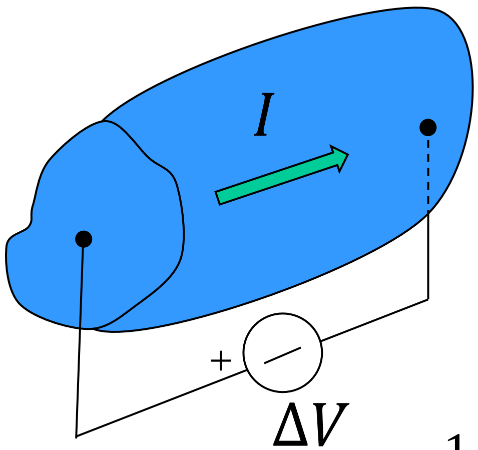
Si consideri 2 conduttori mantenuti a potenziale costante, sia il materiale interposto un mezzo non ideale (con perdite), la resistenza del tubo di flusso delimitato dalle superfici equi-flusso disegnate in figura è :

$$R = \frac{-\int E \cdot dl}{\oint J \cdot dA} = \frac{\Delta V}{I} \; [\Omega]$$



Dove al superfice dell'integrale al denominatore contiene il conduttore a potenziale più alto

Resistenza elettrica

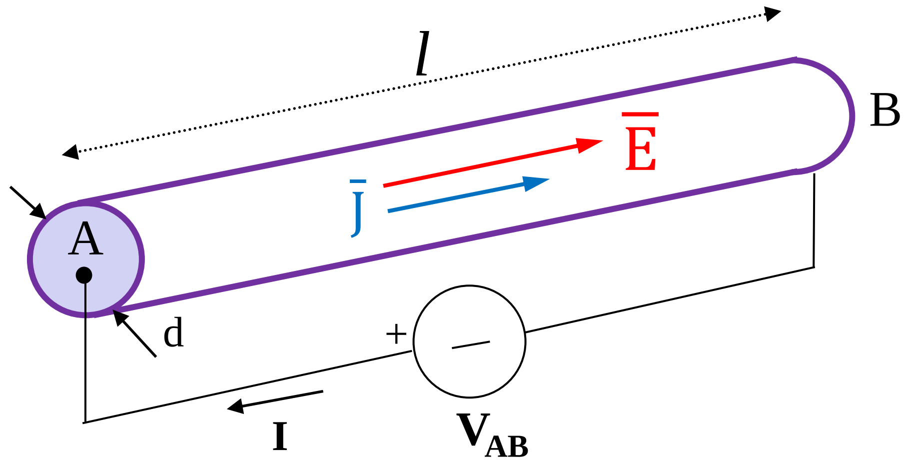


$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{V^+ - V^+}{I} = \frac{-\int_-^+ \bar{E}\cdot d\bar{l}}{\int_A \bar{J}\cdot ds} = \frac{-\int_1^2 \bar{E}\cdot d\bar{l}}{\int_s \rho\bar{E}\cdot ds}$$

Metodo generale per la determinazione della resistenza di un tubo di flusso in un materiale conduttore:

1. Scelta del sistema di ***coordinate***
2. Calcolo della ***densità di corrente*** in funzione della corrente elettrica I $\qquad I = \int_A \bar{J}\cdot d\bar{A}$
3. Calcolo del ***campo elettrico*** in funzione della densità di corrente J $\qquad \bar{E} = \bar{J}/\gamma = \rho\bar{J}$
4. Calcolo della ***differenza di potenziale*** in funzione del campo $\qquad \Delta V = -\int_-^+ \bar{E}\cdot\bar{dl}$
5. Calcolo della ***resistenza elettrica*** $\qquad R = \frac{\Delta V}{I}$

Conduttore filiforme



Si suppone l >> d;

✓ che il materiale del tubo sia omogeneo isotropo e passivo

✓ che il tubo sia circondato da materiale di resistività infinita

Con queste ipotesi:

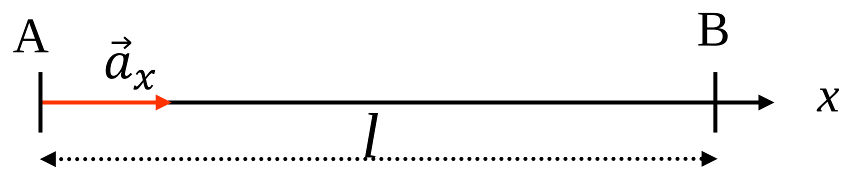
❖ le linee di flusso risultano parallele all'asse del cilindro

❖ le superfici equipotenziali sono perpendicolari ad esse

❖ Il campo e la densità di corrente risultano indipendenti dal punto

Conduttore filiforme

Sistema di riferimento cartesiano



Il campo e la densità di corrente risultano indipendenti dal punto, per cui si può scrivere:

$$\left.\begin{aligned} V_A - V_B &= \mathrm{E}\cdot \mathrm{l} \\ \mathrm{I} &= \mathrm{J}\cdot \mathrm{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \mathrm{R} = \frac{\Delta \mathrm{V}}{\mathrm{I}} = \frac{-\int_B^A \overline{\mathrm{E}}\cdot \overline{\mathrm{dl}}}{\int_{\mathrm{A}} \bar{J}\cdot d\bar{A}} = \frac{\mathrm{El}}{\mathrm{JA}} = \rho\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{A}}$$

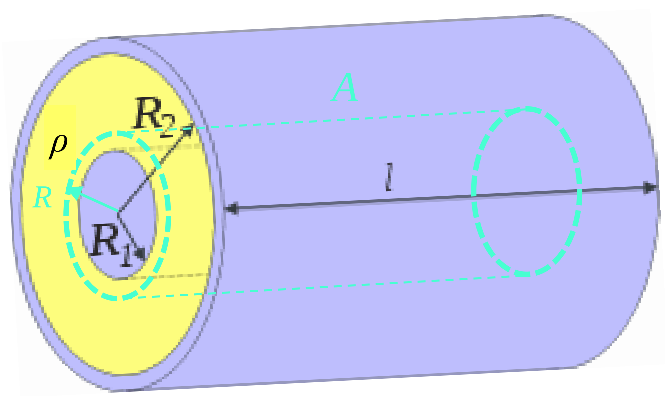
$$R = \rho\frac{l}{A} \quad \Rightarrow \quad G = \gamma\frac{A}{l}$$

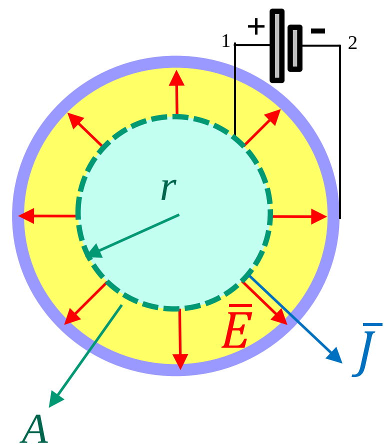
Si noti come l'espressione della conduttanza presenta una analogia con l'espressione della capacità per un condensatore ad armature piane.

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}_{12}} = \frac{\varepsilon \mathrm{A}}{\mathrm{d}}$$

Conduttori coassiali

Si considerino due conduttori perfetti cilindrici coassiali di raggi R_1 ed R_1 separati da un mezzo ad elevata resistività ρ





In queste condizioni se si applica una differenza di potenziale tra i due conduttori si genera un campo radiale. In ciascun punto del materiale isolante si può scrivere

$$\bar{J} = \gamma \cdot \bar{E} \quad \text{e} \quad J = \gamma \, E$$

Conduttori coassiali

Il sistema di riferimento è cilindrico. Il vettore densità di corrente è radiale e se è uniforme su una qualunque superficie cilindrica A:

$$\mathrm{J} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{I}}{2\pi\,\mathrm{Rl}} \qquad \text{dalla legge di Ohm} \Rightarrow \; \mathrm{E} = \frac{\mathrm{I}}{\gamma 2\,\pi\,\mathrm{R\,l}}$$

$$\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_2 = -\int_{\mathrm{r}_2}^{\mathrm{r}_1} \mathrm{E}\,\mathrm{dR} = \frac{\mathrm{I}}{\gamma 2\pi l}\int_{\mathrm{r}_1}^{r_2} \frac{1}{\mathrm{r}}\,dr = \frac{\mathrm{I}}{2\pi\mathrm{l}\gamma}\,\ln\frac{\mathrm{r}_2}{\mathrm{r}_1}$$

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_2}{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{l}}{2\pi\mathrm{l}\gamma}\ln\frac{\mathrm{r}_2}{\mathrm{r}_1}$$

Si noti come l'espressione della conduttanza presenta una analogia con l'espressione della capacità per un condensatore ad armature cilindriche

$$G = \frac{2\pi\gamma\, l}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2\pi\varepsilon\, l}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}$$

Legge di Joule in forma locale

Il lavoro fatto dal campo elettrico per ***spostare una carica*** è:

$$\mathrm{d}p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{qE\Delta l}{\Delta t} = qE \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = qEv_d$$

Se consideriamo un ***volume di materiale*** $\boldsymbol{dv}$, con N numero di cariche per unità di volume

$$\mathrm{d}P = \left(\sum_{i}^{N} Nqv_d E\right) dv = EJdv$$

La ***potenza elettrica specifica*** (per unità di volume) o legge di Joule in forma locale:

$$\frac{dP}{dv} = EJ = \rho J^2 = \gamma E^2$$

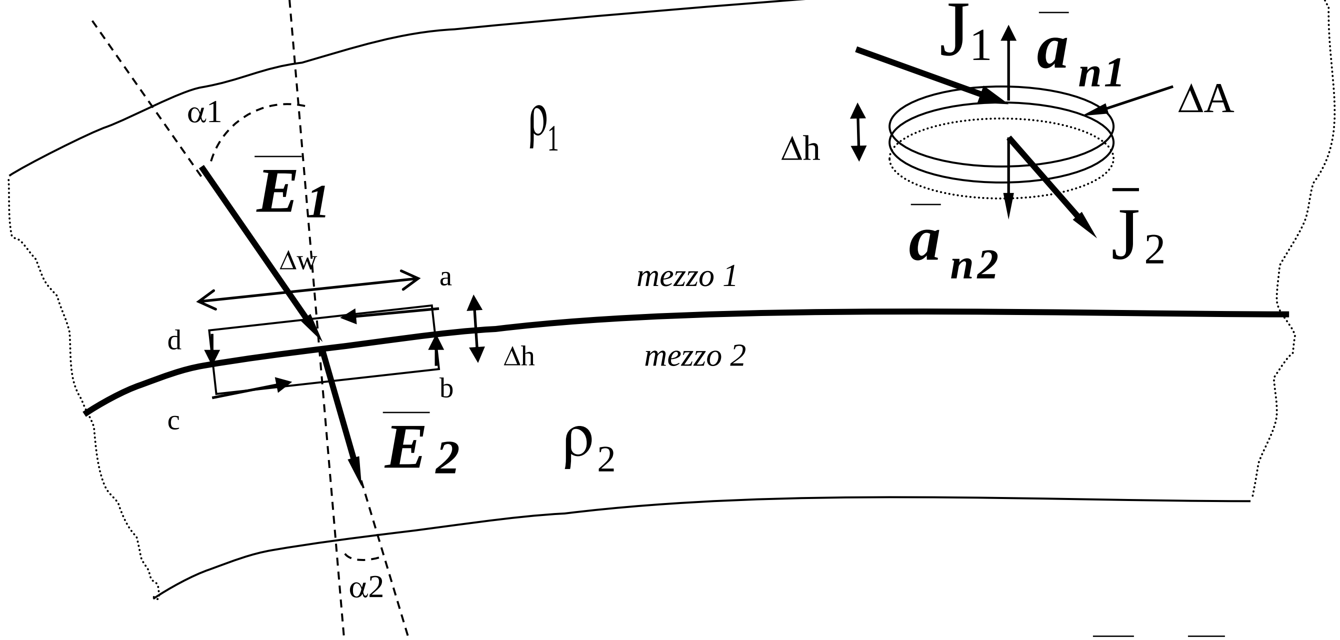
Da cui si ricava, integrando su tutto il volume, l'espressione della ***potenza elettrica*** P:

$$\mathrm{P} = \int EJ\, dv = \int EJ\, ds\, \mathrm{dl} = \mathrm{I} \int E\, dl = \mathrm{VI}\ [\mathrm{W}]$$

Condizioni al contorno

Consideriamo un percorso *l* infinitesimo rettangolare ABCD in corrispondenza della superficie di separazione di due conduttori con resistività diversa come riportato in figura con

AD=BC>>AB=CD:



Si applichi la legge delle tensioni in forma locale $\overline{\nabla} \times \overline{E} = 0$, imponendo che la circuitazione di E lungo il percorso ABCD sia uguale a zero.

Condizioni al contorno

Trascurando i contributi della integrazione uguali e opposti sui tratti AB e DC, si ha:

$$\int_a^d \overline{E}_1 \cdot d\bar{l} + \int_c^b \overline{E}_2 \cdot d\bar{l} = 0$$

$$-E_1 \, dl \, sen(\alpha_1) + E_2 \, dl \, sen(\alpha_2) = 0$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Passando da un mezzo a conducibilità γ_1 a un mezzo a conducibilità γ_2, le componenti tangenziali del campo rimangono invariate.

Se il campo di corrente è uniforme:

$$\frac{J_{1t}}{\gamma_1} = \frac{J_{2t}}{\gamma_2} \Rightarrow \frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

Condizioni al contorno

Se si considera il cilindretto infinitesimo disposto in corrispondenza della superficie di separazione dei due mezzi e avente la superficie laterale trascurabile rispetto alla superficie delle basi, per la legge delle correnti in forma locale si ha:

$$\int_A \bar{J}_1 \cdot d\bar{A} + \int_A \bar{J}_2 \cdot d\bar{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A J_1 \, dA \cos(\alpha_1) + \int_A J_2 \, dA \cos(\alpha_2) = 0$$

integrando

$$-J_1 \, A \cos\alpha_1 + J_2 \, A \cos\alpha_2 = 0$$

$$J_{n1} = J_{n2}$$

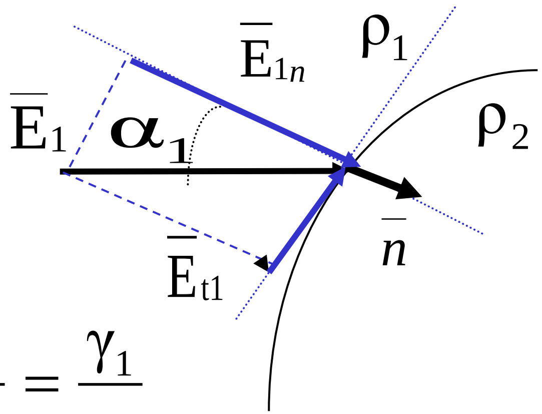
ossia la componente normale della densità di corrente è continua attraverso la superficie di separazione. Se il campo è uniforme:

$$\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}$$

Legge della Rifrazione

L'angolo α_i, che il vettore campo elettrico $\bar{\boldsymbol{E}}$ forma con la normale alla superficie di separazione nel mezzo i, è definito dalla relazione:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_i = \frac{E_{it}}{E_{in}}$$



Dividendo le relazioni trovate, tra di loro:

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ \gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2}{\gamma_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

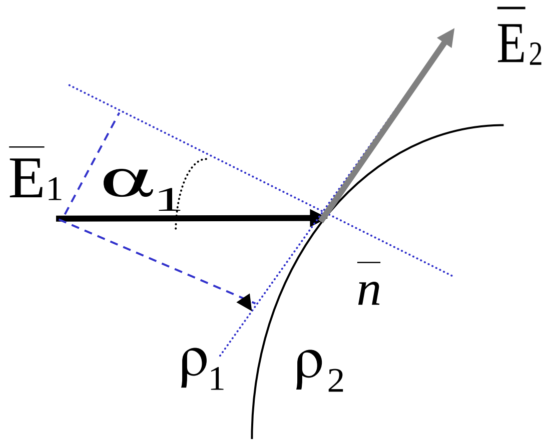
Questa relazione rappresenta la **legge della rifrazione** delle linee di forza elettrica e di corrente, secondo la quale α è maggiore nel mezzo a conducibilità più elevata. Ossia $\bar{\boldsymbol{E}}$ ***devia allontanandosi dalla normale alla superficie di separazione, passando in mezzo a conducibilità maggiore.***

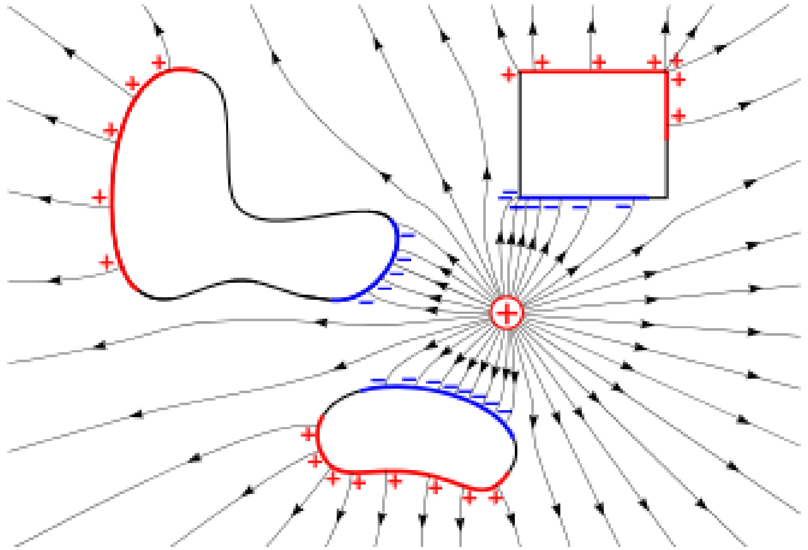
Legge della Rifrazione

Passando dall'aria al conduttore, se il conduttore è ideale

$$\text{se } \gamma_2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 \to 90^\circ$$

Dunque il campo viene rifesso e non riesce a penetrare dentro il conduttore, quindi il campo all'interno del conduttore è nullo.





Se sulla superficie del conduttore sono presenti delle cariche libere il campo incidente sarà perpendicolare.