

**3**

**INTRODUZIONE  
AL FINITE ELEMENT METOD  
(FEM)**

# Problemi vincolati al contorno

I problemi vincolati al contorno possono essere risolti analiticamente ottenendo soluzioni esatte, quando il contorno del dominio in esame e la distribuzione delle sorgenti sono semplici.

Nei casi in cui **il contorno del dominio e la distribuzione delle sorgenti è complessa**, tali problemi possono essere risolti in modo approssimato mediante **metodi numerici**. Le principali tecniche impiegate per questo scopo sono:

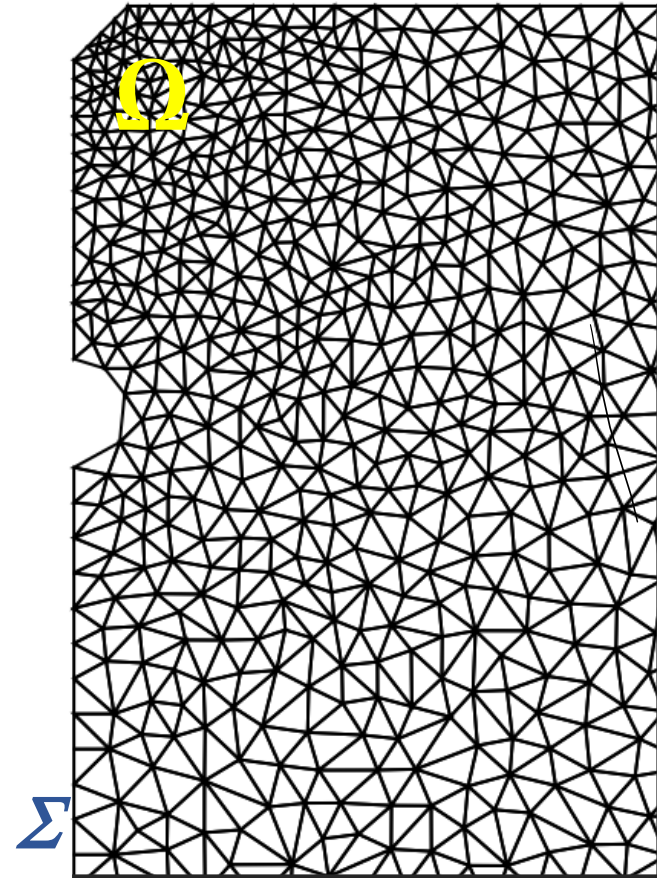
- ✓ il metodo delle differenze finite
- ✓ il metodo degli elementi finiti.

Lo sviluppo dei metodi numerici è stato, ed è favorito dalla crescita rapidissima della “potenzialità di calcolo“ dei computer.

# Problemi vincolati al contorno

In entrambi i metodi:

- il dominio  $\Omega$  è suddiviso (discretizzato) in sottodomini di forma semplice
- all'equazione differenziale alle derivate parziali (es.: equazione di Laplace) si sostituisce con un sistema di equazioni algebriche
  - ✓ lineari (se il materiale è lineare)
  - ✓ non lineari (materiale non lineare)



Un modo per discretizzare una struttura è quello di dividerla in un sistema equivalente di strutture più piccole. Attraverso la **discretizzazione** è possibile descrivere una struttura con un numero finito di punti (**nodi**).

# Problemi vincolati al contorno

*Le equazioni algebriche legano i valori che la funzione incognita assume nei nodi dei sottodomini creati con la discretizzazione.* Le relazioni algebriche forniscono una rappresentazione tanto più accurata della funzione incognita quanto più spinta è la discretizzazione fatta, cioè quanto maggiore è il numero dei nodi.

Con l'implementazione in un codice di algoritmi iterativi, relativamente semplici, è possibile determinare soluzioni quasi "esatte", ossia *con una approssimazione accettabile*, di problemi molto complessi, altrimenti non ottenibili per altra via, e con *tempi di calcolo sensibilmente ridotti*.

Con questa metodologia è possibile risolvere problemi i cui modelli analitici descritti con un sistema di equazioni alle derivate parziali non presentano una soluzione.

# Metodo FEM

Il Metodo degli Elementi Finiti è una tecnica di Analisi Numerica volta ad ottenere soluzioni approssimate per una molteplicità di problemi di Fisica e di Ingegneria.

Benché originariamente sviluppato per studiare il campo tensionale nelle strutture aeronautiche, è stato poi esteso ed applicato al vasto campo della Meccanica dei Continui e a tutti i problemi che presentano analogie formali nei modelli analitici.

Per la sua varietà di impiego e duttilità quale strumento di analisi è attualmente utilizzato nelle Università e nelle Industrie in tutto il mondo, grazie anche allo sviluppo dei software commerciali, come *Ansys(Maxwell)*, *FEM*, *COMSOL* e altri.

# Metodo FEM

Oggigiorno, considerata la complessità delle forme dei sistemi elettromagnetici, il metodo degli elementi finiti è diventato uno strumento di calcolo indispensabile per la **progettazione di dispositivi elettrici e magnetici** in diverse aree, come:

- Problemi con guide d'onda
- Macchine elettriche
- Dispositivi con semiconduttori
- Microstrips
- Assorbimento di radiazioni elettromagnetiche nei materiali e nei corpi biologici.
- Plasma sottoposto a campi elettromagnetici

# Principio Variazionale

Il metodo FEM si basa sulla possibilità di formulare in forma variazionale il problema della **determinazione della funzione potenziale V**, su **dominio  $\Omega$  delimitato da un contorno  $\Sigma$**  per la quale vale la relazione:

$$\nabla^2 V = 0$$

in coordinate cartesiane:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0$$

- ✓ Dove i valori V o della sua derivata sono definiti in  $\Sigma$  (contorno)
- ✓ la costante dielettrica  $\varepsilon$  è definita in  $\Omega$ .

# Principio Variazionale

Secondo il **principio variazionale** in un sistema isolato le configurazioni di equilibrio sono quelle e solo quelle per le quali è minima l'energia  $W$  immagazzinata o dissipata nel sistema stesso (funzionale). In elettrostatica, su regione  $\Omega$  priva di cariche:

$$W = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon |E|^2 d\tau$$

Tale punto di minimo viene identificato attraverso l'annullamento del differenziale dell'energia potenziale:

$$\nabla W = \mathbf{0}$$

In questo modo, è possibile sostituire il problema della risoluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, con il problema equivalente della determinazione del minimo di un integrale espresso con una equazione algebrica.

# Metodo FEM

La discretizzazione del dominio continuo  $\Omega$  racchiuso da un contorno vincolato  $\Sigma$  di partenza in un *dominio discreto (mesh)* avviene mediante l'uso di primitive (*elementi finiti*) di forma semplice.

Per il perfetto ricoprimento della regione spaziale in esame le primitive possono avere dimensioni diverse. Inoltre non è necessario che le caratteristiche costitutive del materiale (permettività, resistività, permeabilità) siano omogenee per tutti gli elementi.

I potenziali in tutti i vertici, *nei quali non sia già stato assegnato il loro valore*, vengono determinati, con approssimazione, imponendo il vincolo basato sul *principio variazionale*.

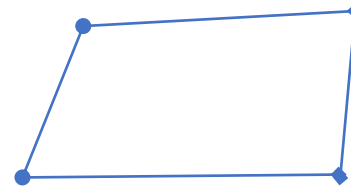
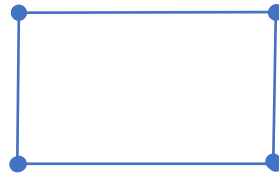
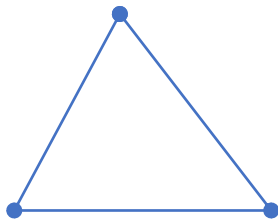
La precisione dei risultati dipende anche dal tipo, dalla forma e dall'ordine dell'elemento usato.

# Metodo FEM

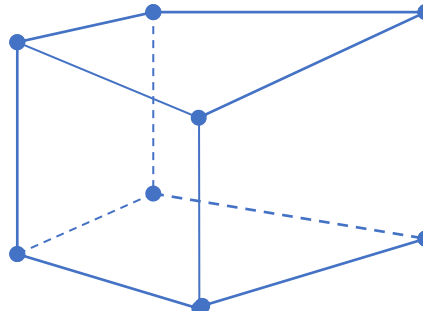
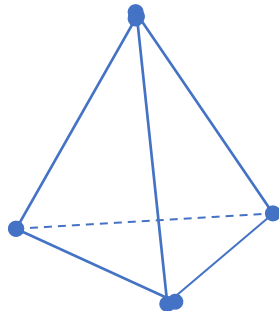
- *Tratti lineari*.... per domini *1D*



- *Triangoli, rettangoli e quadrilateri* etc .... per domini *2D*



- *Tetraedri, esaedri, ottaedri, dodecaedro* etc ..... per domini *3D*



# Metodo FEM

La funzione soluzione è approssimata, e non necessariamente **i valori che essa assume nei nodi del reticolo** sono i valori esatti della funzione, ma **sono quelli che forniranno il minor errore su tutta la soluzione.**

Su ciascun elemento elementare, la soluzione del problema è espressa dalla combinazione lineare di funzioni dette *funzioni di base* o *funzioni di forma (shape functions)*. L'esempio tipico è quello che fa riferimento a *funzioni polinomiali*, sicché la soluzione complessiva del problema viene approssimata con una funzione polinomiale a tratti.

Il numero di coefficienti che identifica la soluzione su ogni elemento è dunque legato al grado del polinomio scelto. Questo, a sua volta, governa l'accuratezza della soluzione numerica trovata.

# Metodo FEM

- Il metodo degli elementi finiti è una *procedura numerica* utilizzata per trasformare un sistema di equazioni differenziali che governano un sistema continuo in un sistema di equazioni algebriche con un numero finito di incognite.
- Il metodo degli elementi finiti, qualunque sia il problema che si voglia risolvere, si basa sempre sulle seguenti fasi fondamentali:
  1. Fase di **preprocessing**
  2. Fase di **solution**
  3. Fase di **postprocessing**

# Metodo FEM

## **PREPROCESSING**

- 1) suddividere il dominio di analisi del problema in un numero finito di elementi
- 2) determinare l'equazione che descrive il fenomeno fisico del problema
- 3) scrivere le equazioni che caratterizzano un elemento
- 4) assemblare tra loro gli elementi
- 5) applicare le condizioni al contorno e i carichi

## **SOLUTION:**

- 6) Risolvere il sistema algebrico di equazioni lineari o non lineari per ricavare il valore della funzione incognita nei nodi degli elementi

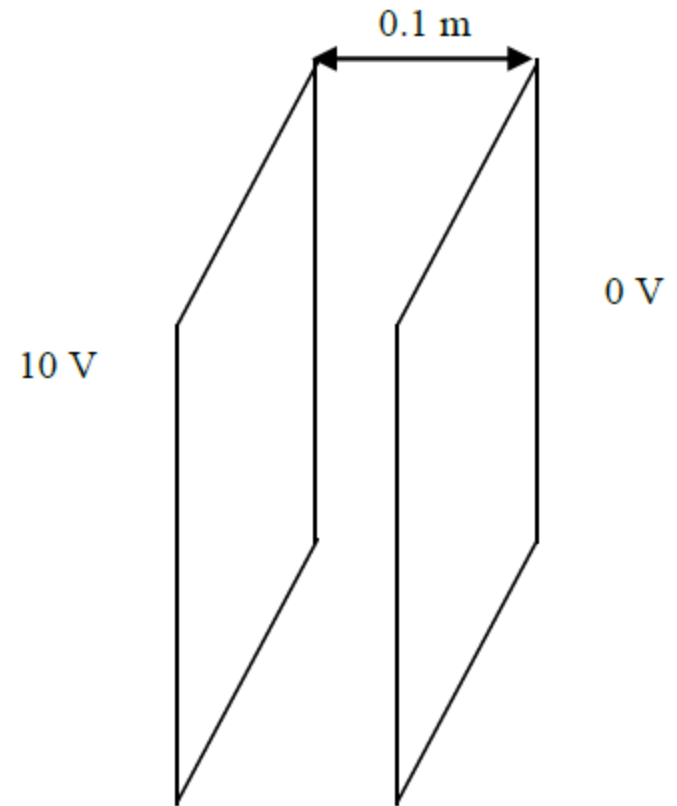
## **POSTPROCESSING**

- 7) ottenere altre informazioni sul problema, per esempio la distribuzione delle grandezze di campo.

# Metodo FEM

Calcolare la distribuzione di potenziale e del campo elettrico tra le armature di un condensatore piano, distanti 10 cm, sulle quali sia applicata una differenza di potenziale di 10V. Si faccia l'ipotesi che il dielettrico tra le armature sia lineare, omogeneo e isotropo.

Nell'ipotesi che le armature siano di dimensioni infinite il problema può essere studiato tramite un modello monodimensionale.



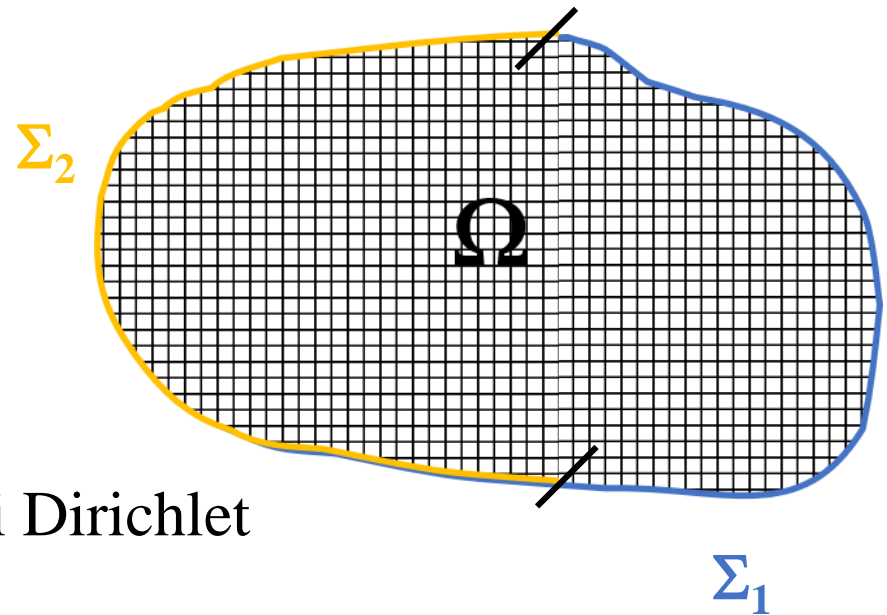
# Metodo FEM

Problema vincolato al contorno: determinare la distribuzione del potenziale  $V$  all'interno della regione  $\Omega$  che è soluzione dell'equazione:

$$\nabla^2 V = 0$$

Condizioni al contorno:

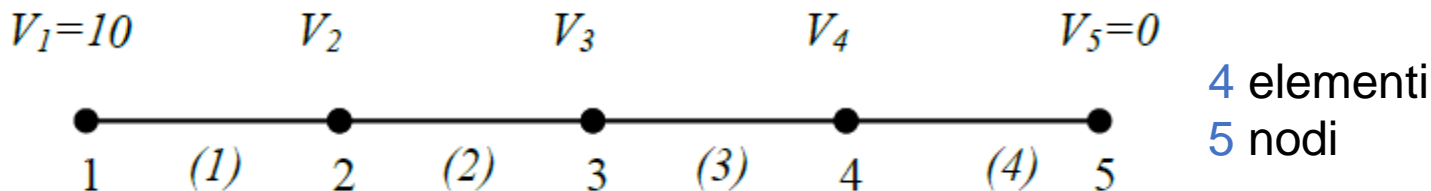
- $V = V_c$  su  $\Sigma$  problemi di Dirichlet
- $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$  su  $\Sigma$  problemi di Neumann
- $\begin{cases} V = V_c & \text{su } \Sigma_1 \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 0 & \text{su } \Sigma_2 \end{cases}$  mixed-boundary problem



# Metodo Variazionale - preprocessing

**1) Suddividere il dominio di analisi del problema in un numero finito di elementi.**

Modello monodimensionale del sistema fisico che può essere rappresentato tramite il seguente modello agli elementi finiti:



**2) determinare l'equazione che descrive il fenomeno fisico del problema.**

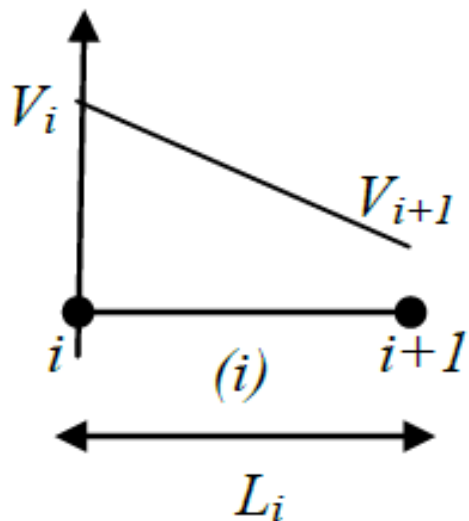
Campo Elettrostatico  $\rightarrow$  eq.ne di Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Carica libera nulla, quindi:  $\nabla^2 V = 0 \rightarrow$  eq.ne di Laplace

# Metodo Variazionale - preprocessing

3) scrivere le equazioni che caratterizzano un elemento  $i$ -esimo



Considerando l' $i$ -esimo elemento di lunghezza  $L_i = x_{i+1} - x_i$

$$\begin{cases} V_i = -mx_i + a \\ V_{i+1} = -mx_{i+1} + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \frac{V_i - V_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \\ a = \frac{x_{i+1} \cdot V_i - x_i \cdot V_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \end{cases}$$

$$V(x) = -mx + a = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} V_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} V_{i+1}$$

Questa equazione può essere riscritta come:

$$V(x) = \alpha_i(x) V_i + \alpha_{i+1}(x) V_{i+1}$$

$\alpha_i(x)$   $\alpha_{i+1}(x)$  funzioni di forma

Sostituendo l'espressione approssimata per il potenziale  $i$ -esimo all'interno del funzionale:

$$W_i = \frac{1}{2} \varepsilon \int_{\Omega} |E_i|^2 d\Omega = \frac{1}{2} \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla V(x)|^2 d\Omega =$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( V_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} + V_{i+1} \frac{\partial \alpha_{i+1}}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\alpha_i = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \Rightarrow \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} = -\frac{1}{L_i};$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \Rightarrow \frac{\partial \alpha_{i+1}}{\partial x} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{1}{L_i};$$

$$W_i = \frac{1}{2} \varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( V_i \left(-\frac{1}{L_i}\right) + V_{i+1} \left(\frac{1}{L_i}\right) \right)^2 dx =$$

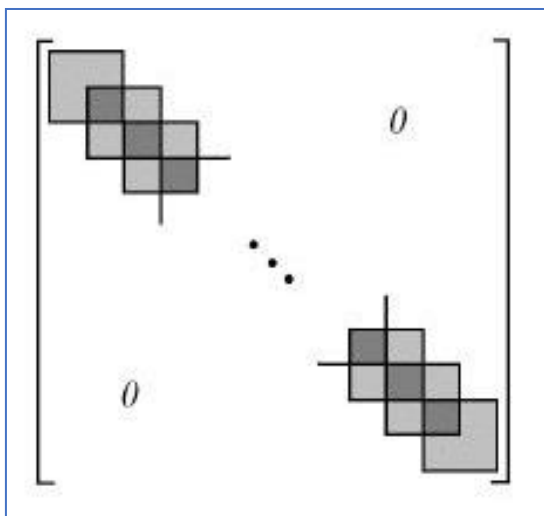
$$= \frac{1}{2} \varepsilon \left( \frac{V_i^2}{L_i^2} - 2 \frac{V_i \cdot V_{i+1}}{L_i^2} + \frac{V_{i+1}^2}{L_i^2} \right) \cdot L_i =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon [V_i \ V_{i+1}] \cdot \frac{1}{L_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} \rightarrow$$

Matrice di rigidezza  
dell'elemento  $i$ -simo

# Metodo Variazionale - preprocessing

## 4) Assemblare tra loro gli elementi



$$F(V) = V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_3} & \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} & -\frac{1}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_4} & \frac{1}{L_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

$$W = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{V}^T \underline{k}^e \underline{V}$$

# Metodo Variazionale - preprocessing

Minimizzare  $W$  in funzione di  $V(x)$  ai nodi

$$W = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{V}^T \underline{k}^e \underline{V}$$

Minimo della Potenza in funzione dei potenziali nei nodi:

$$\frac{\partial W}{\partial V} = \nabla W = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot 2 \underline{k}^e \underline{V} = 0$$

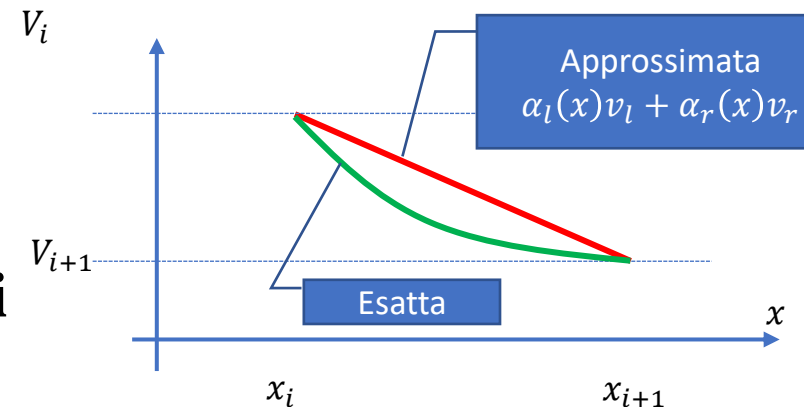
$$\underline{k}^e \underline{V} = 0 \quad \leftarrow \text{Sistema di Equazioni Lineari}$$



**Tensioni nei nodi**



**Approssimazione nei punti intermedi**



# Metodo Variazionale - preprocessing

## 5) Applicare le condizioni al contorno e ai carichi

$$\begin{cases} k^e \underline{V} = 0 \\ V_1 = 10 \\ V_5 = 0 \end{cases}$$

L'applicazione delle condizioni al contorno permette la risoluzione del sistema di equazioni che potrà essere eseguita tramite una procedura automatica.



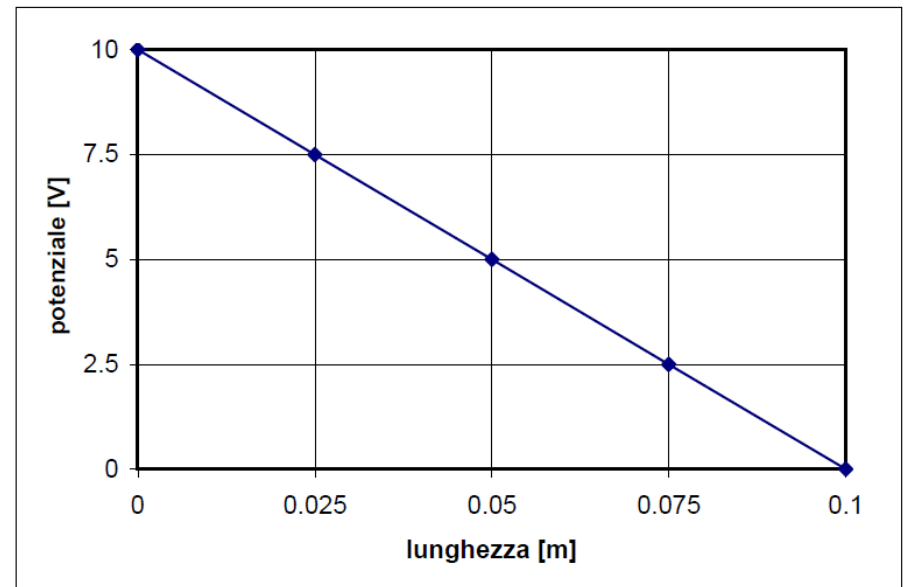
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_3} \\ 0 & -\frac{1}{L_3} & \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} V_1 \\ 0 \\ \frac{1}{L_4} V_5 \end{bmatrix} \quad L_i = 0.025m \quad \begin{bmatrix} 80 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & -40 \\ 0 & -40 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Metodo Variazionale - solution

**6) Risolvere il sistema algebrico di equazioni lineari (o non lineari) per ricavare il valore del potenziale nei nodi degli elementi**

Una volta che si conoscono le caratteristiche del sistema fisico che si vuole studiare, la costruzione della matrice di rigidezza può essere eseguita tramite un approccio sistematico.

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$



# Metodo Variazionale - Postprocessing

## 7) Ottenere altre importanti informazioni sul problema

Campo elettrico tra le armature:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$E = \frac{(V_1 - V_2)}{L_1} = \frac{(V_2 - V_3)}{L_2} = \frac{2.5}{0.025} = 100 \frac{V}{m}$$

# Principio Variazionale-generale

Il metodo FEM si basa sulla possibilità di formulare in forma variazionale il problema della **determinazione della funzione continua  $\Phi$** , in un **dominio  $\Omega$  delimitato da un contorno  $\Sigma$** , dove la funzione  $\Phi$  soddisfa alle seguenti proprietà:

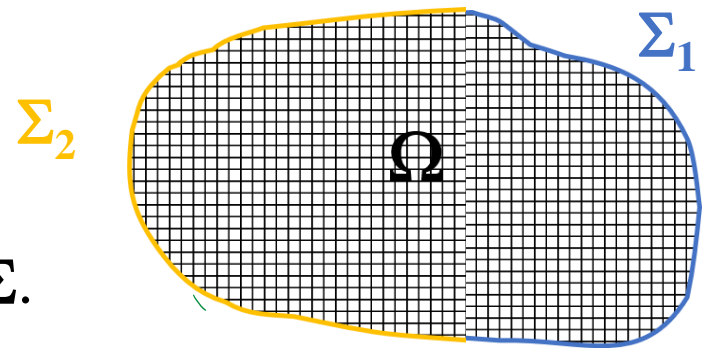
1) nel dominio  $\Omega$ :  $\rightarrow k \nabla^2 \Phi = -\chi$

dove  $k$  e  $\chi$  sono funzioni scalari, generalmente continue, assegnate in  $\Omega$

2) nel contorno  $\Sigma$  di  $\Omega$ :

$\Phi$  assegnata su una parte di  $\Sigma$ ;

$k \frac{\partial \Phi}{\partial n}$  assegnata sulla parte restante di  $\Sigma$ .



Il metodo FEM consente di ottenere un sistema di equazioni algebriche minimizzando un funzionale  $F(\Phi)$

$$\nabla F(\Phi) = 0$$

# Principio Variazionale-generale

Per equazioni aventi la forma

$$\nabla^2 \Phi = -f(x, y)$$

il funzionale è una funzione così fatta:

$$F(x, y, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right) - f(x, y) \Phi \right] dx dy$$

Equazione di Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad F(V) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} ((\nabla V)^2) - \frac{\rho}{\varepsilon} V \right] d\Omega$$

Equazione di Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad \longrightarrow \quad F(V) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla V)^2 d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} |E|^2 \right] d\Omega$$