2
CAMPI ELETTRICI STATICI (ELETTROSTATICA)

Elettrostatica

L'*elettrostatica* studia i campi dovuti a cariche elettriche (sorgenti) **a riposo** (fisse nello spazio).

L'elettrostatica studia il campo più semplice, ma ha una importanza fondamentale per comprendere i modelli elettromagnetici più complessi e generali.

Sono basati sulla elettrostatica la spiegazione di molti fenomeni naturali come:

- ✓ fulmini (lightining), effetto corona, St. Elmo fire, grain explosion
- ✓ I principi di diverse applicazioni industriali come: l'oscilloscopio

Elettrostatica

La teoria dei campi elettrostatici è finalizzata a definire le relazioni che **legano tra loro**:

- la **distribuzione delle cariche** sui conduttori e il dielettrico interposto
- la **configurazione geometrica e la natura** dei conduttori e dei dielettrici
- **le differenze di potenziale fra i conduttori**
- **la distribuzione del campo nel dielettrico**.

Si tratta essenzialmente della **risoluzione di un problema all'equilibrio.**

Elettrostatica

la studio del campo elettrostatico è fondamentale per determinare:

- la capacità fra conduttori C
- la rigidità dielettrica (gradiente massimo di isolamento)
- il valore del campo fra le placche di deflessione in un oscilloscopio
- il campo agente su elettroni e lacune di un transistore
- la forza di accelerazione che agisce su un elettrone in un cannone elettronico.

Carica elettrica

Le cariche elettriche consentono di descrivere le forze di interazione che si manifestano tra particelle (o corpi solidi) cariche. Queste forze sono dette elettrostatiche o coulombiane e possono essere di attrazione o di repulsione.

La **carica elettrica q** a è una proprietà fondamentale della materia ed esiste come *multiplo positivo o negativo* della carica elettrica elementare di un elettrone:

$$e = -1.60 \times 10^{-19} \quad [\mathrm{C}]$$

Così come la massa, la carica può essere considerata, a seconda dei casi, concentrata in un punto, e si parla di carica puntiforme, o distribuita o su un volume, o su una superfice o lungo una linea.
Se la carica è contenuta in un volume che ha dimensioni lineari trascurabili rispetto a quelle delle distanze in gioco allora è lecito parlare di carica localizzata in un punto.

Desità di carica elettrica

Si definisce ***densità di carica volumica*** $\boldsymbol{\rho_v}$ la quantità di carica netta Δq in un volume infinitesimo Δv :

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad [C/m^3]$$

Se la quantità di carica Δq può essere identificata con un elemento di superficie A o di linea l, si definiscono la ***densità di carica superficiale*** $\boldsymbol{\rho_s}$ o la ***densità di carica lineare*** $\boldsymbol{\rho_l}$:

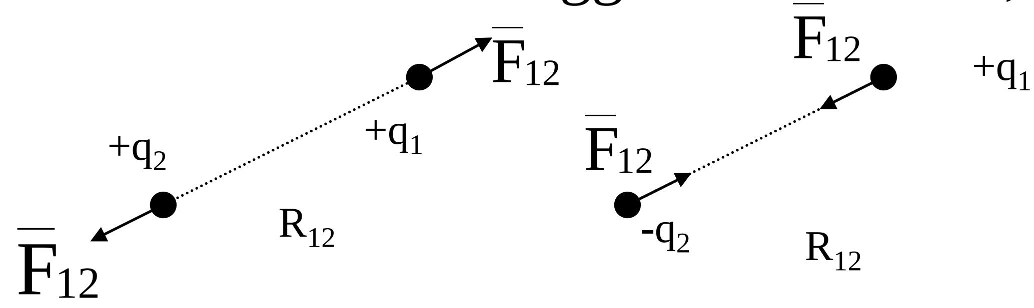
$$\rho_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \quad [C/m^2] \qquad \rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad [C/m]$$

La ***densità di carica*** può variare da punto a punto con le coordinate spaziali e può essere funzione del tempo, dunque è rappresentabile con una campo scalare.

Legge di Coulomb

Lo sviluppo dell'elettrostatica inizia con la legge di Coulomb, espressa dalla relazione:

$$\overline{F}_{12} = \vec{a}_{R_{12}} \; K \frac{q_1 \, q_2}{R_{12}^2} \quad [N]$$



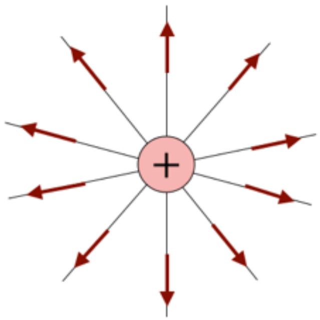
q_1 e q_2 sono di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza di separazione R_{12}.

Il campo elettrico $\overline{E}$ è definito come la forza che agisce per unità di carica

$$\overline{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\overline{F}}{q} \quad \left[\frac{N}{C}\right]$$

Il caso più semplice si ha per campo elettrostatico dovuto ad una carica q fissa nello spazio vuoto e illimitato

$$\overline{E} = \overline{a}_R E_R = \overline{a}_R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad \left[\frac{N}{C}\right]$$



Campo Elettrico

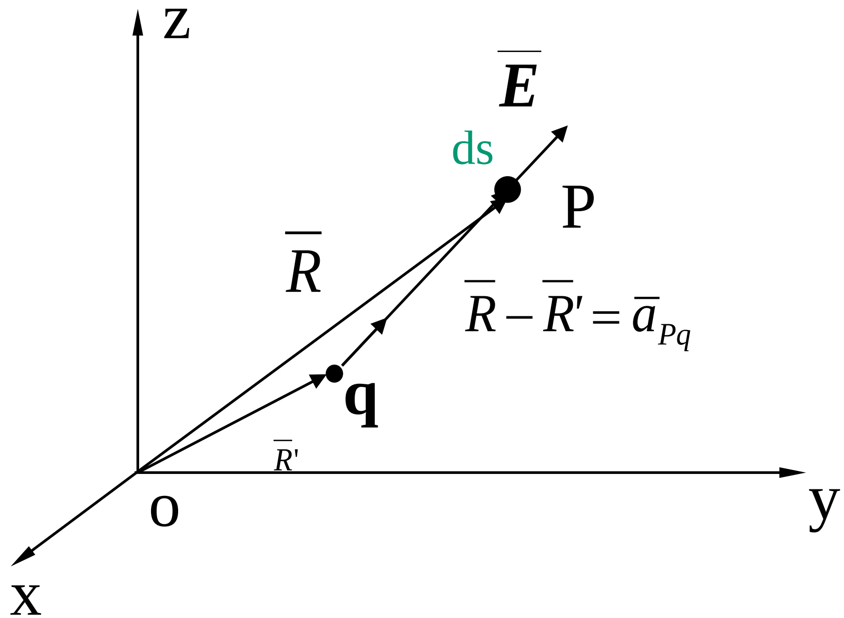
Campo elettrostatico nel punto P dovuto ad una carica q non localizzata nell'origine:

$$\overline{E}(\mathrm{P}) = \overline{a}_{Pq} \frac{q}{4\pi\varepsilon_o \left|\overline{R}-\overline{R}'\right|^2}$$

$$\mathrm{a}_{Pq} = \frac{\overline{\mathrm{R}}-\overline{\mathrm{R}}'}{\left|\overline{\mathrm{R}}-\overline{\mathrm{R}}'\right|}$$

l'espressione del campo diventa:

$$\overline{E}(\mathrm{P}) = \frac{q\left(\overline{\mathrm{R}}-\overline{\mathrm{R}}'\right)}{4\pi\varepsilon_o\left|\overline{\mathrm{R}}-\overline{\mathrm{R}}'\right|^3} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$



Campo elettrico dovuto a un insieme discreto di cariche $q_1, q_2,, \ldots, q_n$:

$$\overline{\mathbf{E}}(\mathrm{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k\left(\overline{R}-\overline{R}_k^{'}\right)}{\left|\overline{R}-\overline{R}_k^{'}\right|^3} \quad \left[\frac{\mathrm{N}}{C}\right]$$

Campo Elettrico

Il campo dovuto a una distribuzione continua di carica di densità ρ si può ottenere integrando (sovrapponendo) i contributi di ciascuna carica elementare dq:

$$d\overline{E} = \overline{a}_R \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$

Densità di carica su:

- ***volume finito v'*** $$\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'} \overline{a}_R \frac{\rho_v\, dv'}{R^2} \quad \left[\frac{V}{m}\right] \quad \text{con } \rho_v \left[\frac{C}{m^3}\right]$$
- ***superficie finita s'*** $$\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{s'} \overline{a}_R \frac{\rho_S}{R^2} ds' \quad \left[\frac{V}{m}\right] \quad \text{con } \rho_s \left[\frac{C}{m^2}\right]$$
- ***lunghezza finita ℓ'*** $$\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\ell'} \overline{a}_R \frac{\rho_\ell}{R^2} d\ell' \quad \left[\frac{V}{m}\right] \quad \text{con } \rho_\ell \left[\frac{C}{m}\right]$$

Proprietà del Campo Elettrico nel vuoto

$$I) \quad div\,\overline{E} = \overline{\nabla} \cdot \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad dove: \begin{cases} \rho \text{ é la densità di carica volumica} \\ \varepsilon_0 \text{ é la permettività nel vuoto} \end{cases}$$

II) il campo elettrico stazionario è conservativo:

$$\mathrm{rot}\,\overline{\mathrm{E}} = \overline{\nabla} \times \overline{\mathrm{E}} = 0$$

Queste due equazioni sono il **modello matematico dell'elettrostatica nel vuoto.** Il campo elettrostatico nel vuoto è descritto tramite il solo campo elettrico $\overline{E}$.

$\nabla \cdot \overline{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow$ il campo $\overline{\mathrm{E}}$ non è solenoidale

$\nabla \times \overline{E} = 0 \;\rightarrow\;$ il campo $\overline{\mathrm{E}}$ è irrotazionale

Proprietà del Campo Elettrico nel vuoto

Il I° postulato esprime analiticamente che il flusso del campo elettrico che passa attraverso una superficie chiusa è uguale alle cariche contenute in quella superficie diviso ε_0.

$$div\,\overline{E} = \overline{\nabla} \cdot \overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \int_V \overline{\nabla} \cdot \overline{E}\; dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dv$$

Per il teorema della divergenza $\displaystyle\int_V \nabla \cdot \overline{E}\; dv = \oint_S \overline{E} \cdot d\overline{s}$

Da cui: $\displaystyle\oint_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

che rappresenta la **legge di Gauss:** il flusso totale di un campo elettrico nel vuoto attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica totale racchiusa nella superficie diviso ε_0.

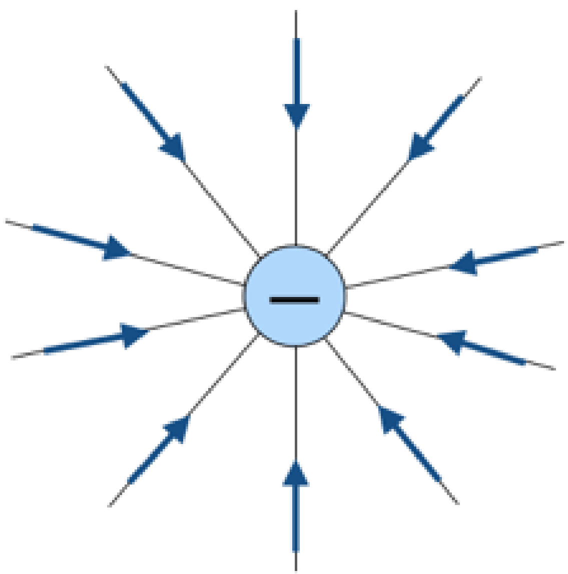
Proprietà del Campo Elettrico nel vuoto

Forma differenziale

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

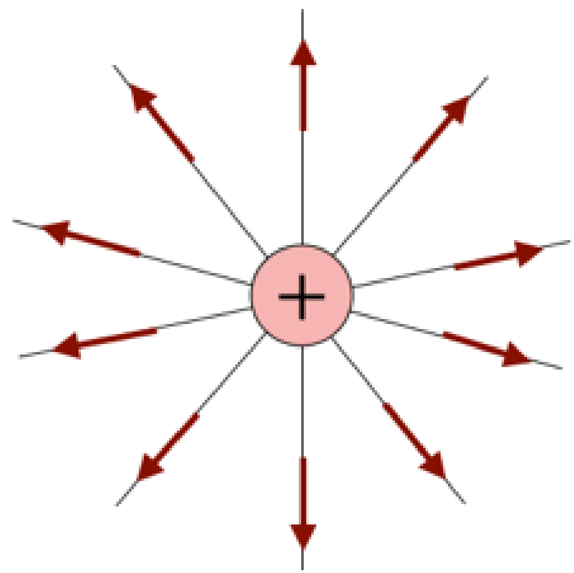
Forma integrale

$$\oint_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



$\nabla \cdot \bar{E} < 0$

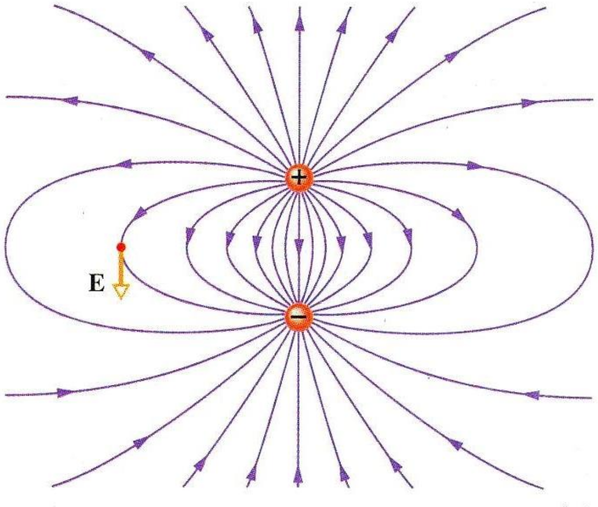
pozzo



$\nabla \cdot \bar{E} > 0$

sorgente

Tubo di flusso



Le superfici di flusso o di campo, indicano in ogni punto la direzione del campo $\bar{E}$. *I tubi di flusso sono porzioni di spazio delimitate dalle linee di flusso*; se si considerano due sezioni trasversali del tubo di flusso con due riferimenti congruenti, il tubo può essere caratterizzato dal valore del flusso del campo attraverso una delle sezioni e si può costruire una funzione di flusso a partire da un arbitrario tubo di flusso; le superfici equiflusso saranno caratterizzate dallo stesso valore della funzione di flusso.

Proprietà del Campo Elettrico nel vuoto

Il II° postulato dice che il campo elettrostatico è irrotazionale:

$$\nabla \times \bar{\mathrm{E}} = 0$$

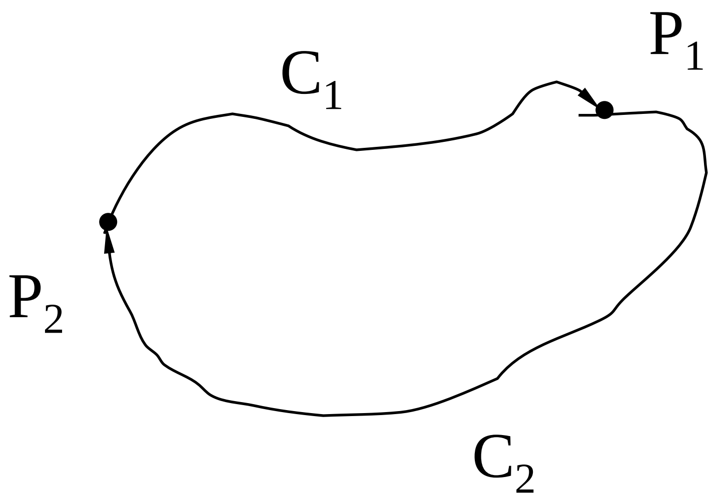
applicando il teorema di Stokes su un insieme a connessione lineare semplice si ha:

$$\int_{S} \left(\nabla \times \bar{\mathrm{E}}\right) \cdot \mathrm{d}\bar{\mathrm{s}} = \oint_{C} \bar{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\bar{\mathrm{l}} = 0$$

Da questo postulato si deducono 2 proprietà fondamentali del campo elettrostatico:

- ❖ Facendo percorrere ad una carica un *percorso chiuso*, non si compie *nessun lavoro* (proprietà conservativa del campo elettrostatico)
- ❖ *L'energia di un campo elettrostatico* in un dato istante *dipende* solo *dal valore e dalla posizione delle cariche in quell'istante* e non dipende da come esse si sono evolute.

Proprietà del Campo Elettrico nel vuoto



$$\oint_C \bar{\mathrm{E}} \cdot d\bar{\mathrm{l}} = \int_{C_1} \bar{\mathrm{E}} \cdot d\bar{\mathrm{l}} + \int_{C2} \bar{\mathrm{E}} \cdot d\bar{\mathrm{l}} = 0$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \bar{\mathrm{E}} \cdot d\bar{\mathrm{l}} = -\int_{P_2}^{P_1} \bar{\mathrm{E}} \cdot d\bar{\mathrm{l}}$$

Direttamente come conseguenza dell’irrotazionalità si ha che il lavoro elettrostatico (espresso l’integrale lineare del campo) lungo un qualunque percorso chiuso è uguale a zero. Ossia l’energia del campo elettrostatico è indipendente dal percorso e dipende solo dai punti estremi del percorso, perciò *dipende* solo *dalla posizione delle cariche in quell’istante* e non dipende da come esse si sono evolute

Potenziale Elettrico

Facendo riferimento al II postulato dell'elettrostatica e alla 1° identità nulla (rot(gradV)=0)(*), con V campo scalare, si può sempre definire una funzione scalare chiamata potenziale elettrico tale che:

$$\nabla \times \bar{\mathrm{E}} = \nabla \times (\nabla \mathrm{V}) = 0$$

Per il teorema di Stokes posso scrivere:

$$\int_S [\nabla \times (\nabla \mathrm{V})] \cdot d\bar{s} = \oint_C (\nabla V) \cdot d\bar{l}$$

ed essendo:

$$(\nabla V) \cdot d\bar{l} = dV \Rightarrow \oint_C (\nabla V) \cdot d\bar{l} = \oint_C dV = 0 \qquad \text{LKV}$$

(*) vedi capitolo 1, pagina 11

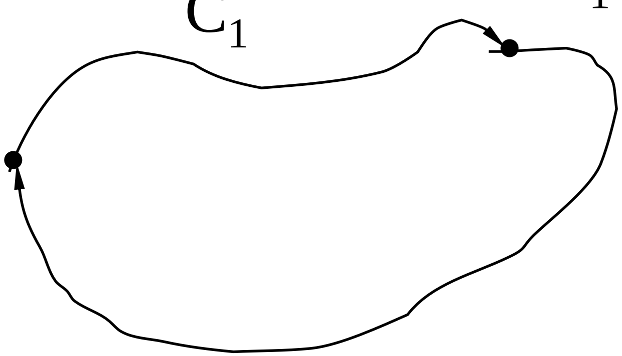
Potenziale Elettrico

$(\nabla V)\cdot d\bar{l}$ esprime la variazione di V nella direzione della tangende alla curva C

$$\nabla \mathrm{V} = \left(\vec{a}_x \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\right)\mathrm{V}, \quad d\bar{l} = \vec{a}_x \mathrm{dx} + \vec{a}_y \mathrm{dy} + \vec{a}_z \mathrm{dz}$$

$$\nabla \mathrm{V}\cdot d\bar{l} = \left(\vec{a}_x \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}} + \vec{a}_y \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}} + \vec{a}_z \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}}\right)\cdot\left(\vec{a}_x \mathrm{dx} + \vec{a}_y \mathrm{dy} + \vec{a}_z \mathrm{dz}\right)$$

$$= \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz} = \mathrm{dV}$$



$$\oint_C \mathrm{dV} = \int_{C_1} \mathrm{dV} + \int_{C2} \mathrm{dV} = 0$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathrm{dV} = -\int_{P_2}^{P_1} \mathrm{dV}$$

L'energia potenziale è legata alla posizione e la sua variazione non dipende dal percorso seguito.

Potenziale Elettrico

Poiché le grandezze scalari sono più facili da trattare rispetto a quelle vettoriali, si definisce il potenziale elettrico scalare V tale che:

$$\overline{\mathrm{E}} = -\nabla \mathrm{V}$$

e si calcola il campo attraverso l'operatore gradiente del potenziale. Il **segno negativo** nella relazione è necessaria per essere conformi con la convenzione per la quale **il potenziale elettrico V aumenta spostandosi in direzione opposta a quella del campo elettrico.**

Significato fisico: equivale al lavoro fatto per portare una carica unitaria da un punto a distanza infinita alla posizione *P*, in *senso contrario alla direzione* del campo elettrico:

$$V_P - V_\infty = V_P = -\int_\infty^P \overline{E} \cdot d\overline{l} \quad [\mathrm{V}]$$

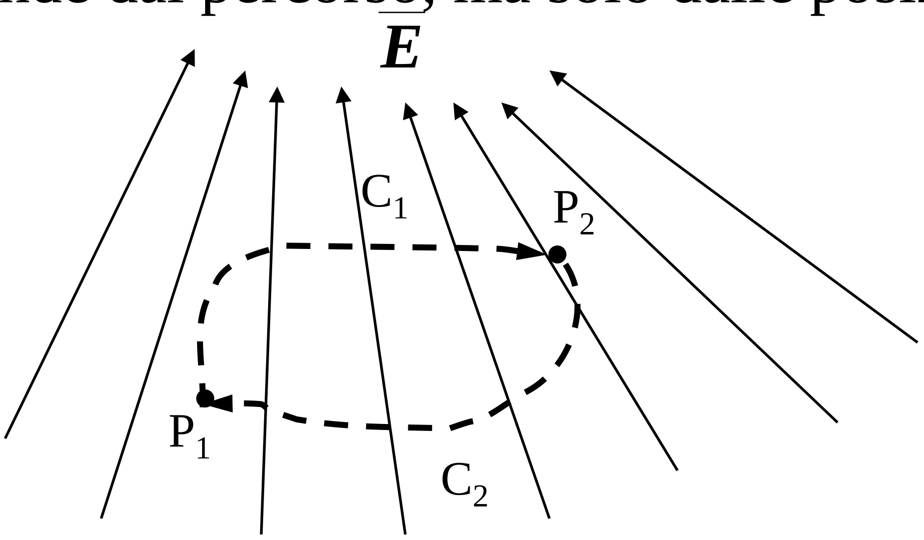
Per convenzione si assume $V_\infty = 0$

Differenza di potenziale

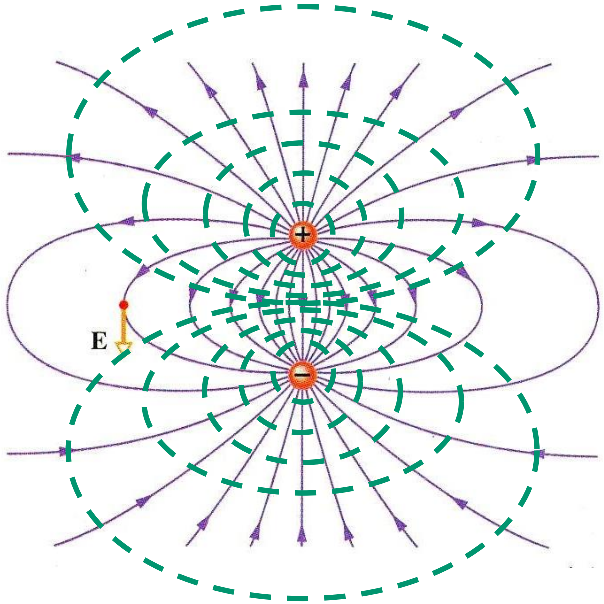
La differenza di potenziale tra i punti P_1 e P_2 è il lavoro fatto per portare una carica unitaria da un punto P_1 ad un altro P_2 del campo, in *senso contrario* a quello del campo:

$$V_2 - V_1 = \frac{L}{q} = -\int_{P_1}^{P_2} \overline{E} \cdot d\overline{l} \quad \left[\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{C}} = \frac{J}{C}\right] \text{ o } [\mathrm{V}]$$

Esso non dipende dal percorso, ma solo dalle posizioni dei punti



Potenziale Elettrico



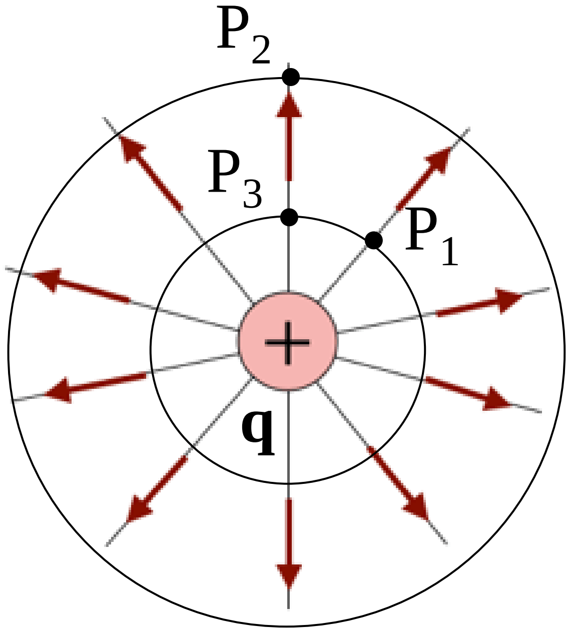
Le superfici equipotenziali (linee verdi tratteggiate) sono superfici sulle quali il potenziale ha valore costante. Poiché, per definizione, il campo $\bar{E}$ è uguale al gradiente del potenziale V, in ogni punto di una superficie equipotenziale $\bar{E}$ è sempre perpendicolare ad essa.

Potenziale Elettrico

Lungo le linee equipotenziali la differenza di potenziale è nulla, in quanto la forza di campo non compie nessun lavoro essendo la forza perpendicolare al trattino *dl* in ciascun punto.

Lungo il percorso P_1- P_3 il lavoro è uguale a zero

Lungo il percorso P_3-P_2 il lavoro è diverso da zero.

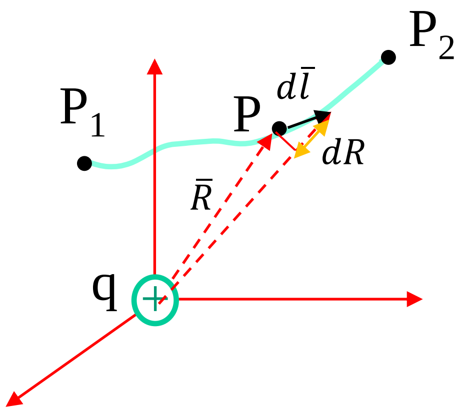


$V(P_1)=V(P_3)>V(P_2)$:

- da P_3 a P_2 è campo elettrico a compie lavoro
- da P_2 a P_3 dobbiamo compiere lavoro contro il campo elettrico
- Per portare una carica dal ∞ a P_3 dobbiamo compiere un lavoro maggiore di quello necessario per portarla in P_2

Potenziale Elettrico

Il potenziale elettrico in un punto P, a distanza R, **dovuto ad una carica puntiforme q**, riferito all'infinito, si può determinare dalla equazione:



$$V(\mathrm{P}_2) - V(\mathrm{P}_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} =$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} \left(\bar{a}_R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right) \cdot (d\bar{l})$$

$\bar{a}_R \cdot d\bar{l} = dR$ proiezione di d$\bar{l}$ nella direzione di $\bar{a}_R$

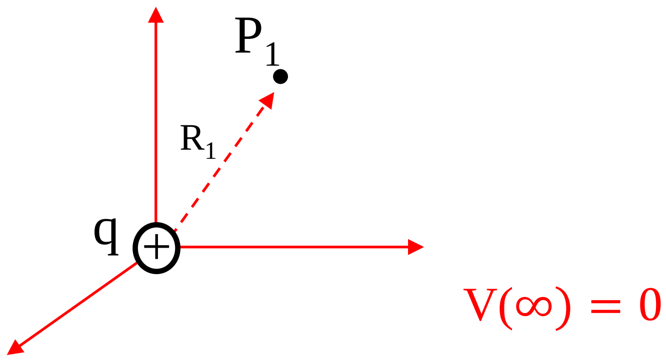
$$V(\mathrm{P}_2) - V(\mathrm{P}_1) = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot dR = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \left[-\frac{1}{R} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]$$

Se q è positiva e $R_2 > R_1$ $V_{P2} < V_{P1}$

Se q è negativa e $R_2 > R_1$ $V_{P2} > V_{P1}$

Potenziale Elettrico

La differenza di potenziale, **dovuto ad una carica puntiforme q,** tra due punti P_2 e P_1 alla distanza R_2 e R_1 rispettivamente dalla carica q è:



$$V_1 = V_{P_1} - V(\infty) = -\int_{\infty}^{P_1} \overline{E} \cdot d\overline{l} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{R}\right]_{\infty}^{R_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R} \quad [V]$$

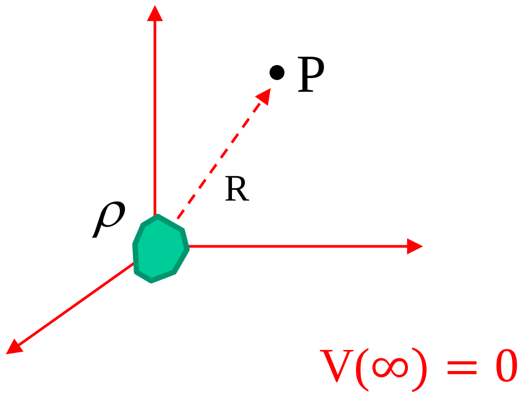
Se abbiamo un sistema di cariche ***q₁, q₂,…,qₙ*** disposte nell'origine del sistema di riferimento

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k}{R_k} \quad [V]$$

Potenziale Elettrico

Il potenziale dovuto a una **distribuzione continua** di carica di densità ρ si può ottenere integrando (sovrapponendo) i contributi di ciascuna carica elementare *dq***:**

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o R}$$



Densità di carica su:

- ✓ ***volume finito*** v': $$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'} \frac{\rho_v}{R}\, dv' \ [V]$$

- ✓ ***superficie finita*** s': $$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s'} \frac{\rho_S}{R}\, ds' \ [V]$$

- ✓ ***lunghezza finita*** ℓ': $$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\ell'} \frac{\rho_\ell}{R}\, d\ell' \ [V]$$

Postulati dell’elettrostatica nel vuoto

forma differenziale

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{E}} = 0$$

Forma integrale

$$\oint_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

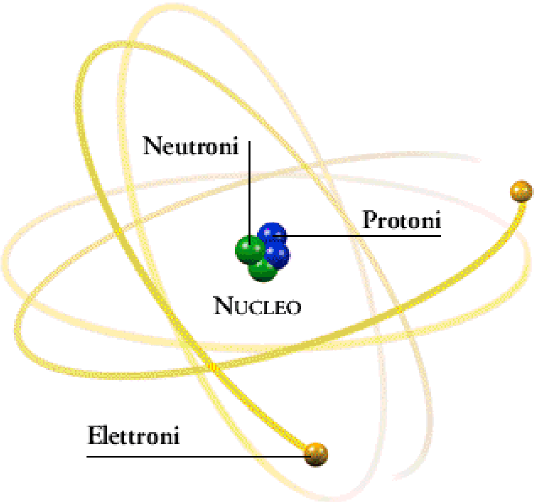
$$\oint_l \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0$$

Legge di Gauss nel vuoto

$$\oint_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Materiali nei campi elettrostatici

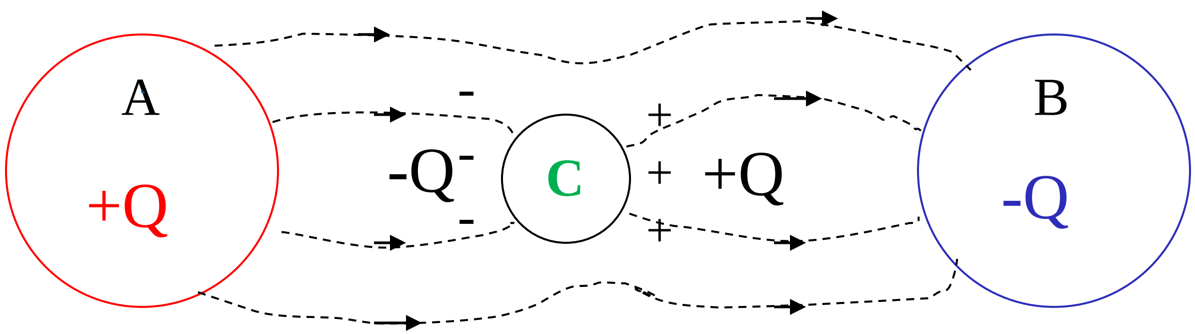
La classificazione dei materiali in base alle loro **proprietà elettriche** è la seguente:



- ❑ ***Conduttori:*** gli elettroni delle orbite più esterne sono **debolmente vincolati** alle loro orbite e *migrano facilmente* da un atomo all'altro
- ❑ ***Isolanti o dielettrici:*** in condizioni normali gli elettroni sono **vincolati fortemente** alle loro orbite ed è necessario applicare un campo esterno perché gli elettroni migrino.
- ❑ ***Semiconduttori:*** hanno proprietà intermedie tra quelle dei conduttori e quelle degli isolatori, essi possiedono un **numero limitato di cariche mobili libere**.

Conduttori nei campi elettrostatici

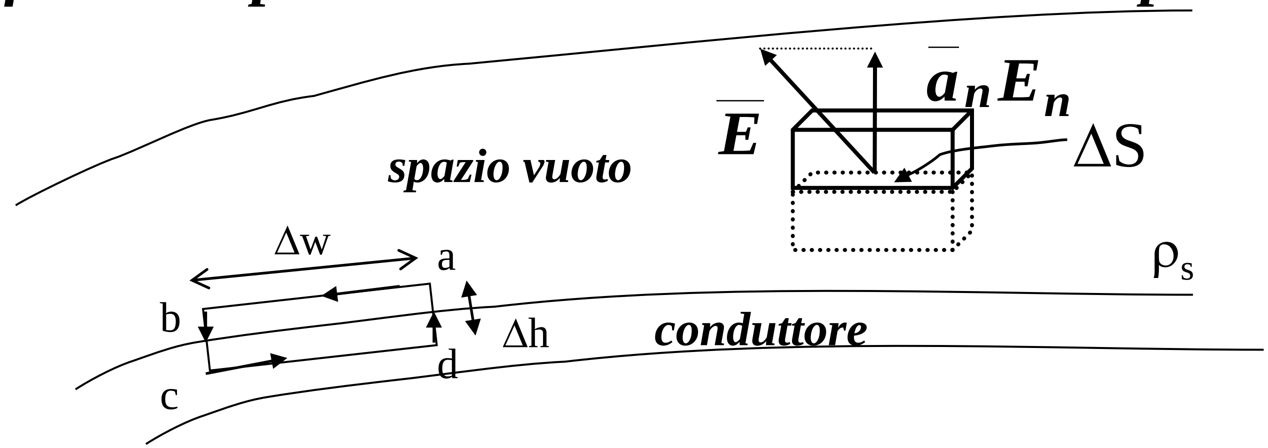
In un conduttore gli elettroni si muovono effettivamente quando sono sottoposti ad una *forza attiva*, *quindi un campo elettrico*, che può essere generato da per induzione o portando per contatto le cariche direttamente sul conduttore.



Il campo Elettrico esercita sulle **cariche libere** una forza $\bar{F} = q\bar{E}$ che fa si che si muovano una rispetto all'altra. In un conduttore isolato, questo movimento continuerà sino al raggiungimento di una **condizione di equilibrio** nella quale tutte le cariche avranno raggiunto la superficie del conduttore e si saranno distribuite in modo tale che **all'interno** $\boldsymbol{\bar{E}}$**=0**. Se così non fosse, le cariche soggette alla forze elettrostatica continuerebbero a muoversi.

Condizioni al contorno

Superficie di separazione tra un conduttore e lo spazio vuoto



<u>*Componente tangenziale del campo*</u>

si calcoli la circuitazione del campo elettrostatico lungo il contorno *abcda*, avente:

- larghezza: ab=cd=Δw
- altezza: bc=da= Δh con $\Delta h \to 0$ (contributi nullo dei tratti *bc* e *da*)
- Il campo nullo nel conduttore (tratto della circuitazione cd)

$$\oint_{abcda} \overline{E} \cdot d\overline{l} = \int_{ab} \overline{E} \cdot d\overline{l} = E_t \Delta w = 0 \;\Rightarrow\; E_t = 0$$

Condizioni al contorno

la componente normale del campo:

si applica il teorema di Gauss, considerando una superficie Gaussiana, con la superficie superiore nello spazio vuoto e quella inferiore nel conduttore (come riportato in figura).

Nella superficie di separazione tra il conduttore e lo spazio vuoto:

•la componente tangenziale del campo è nulla

•la componente normale del campo è uguale alla densità di carica superficiale diviso per la permettività dello spazio vuoto.

$$\oint_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad \oint_{\mathrm{S}} \overline{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overline{s} = \mathrm{E_n}\, \Delta S = \frac{\rho_s\, \Delta S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E_n} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$

Conduttori isolati nei campi elettrostatici

Quando un conduttore isolato (*non collegato ad un generatore*) è investito da un campo elettrico statico, gli elettroni all'interno del conduttore si muovono in direzione opposta a quella del campo e le cariche positive in direzione concorde con quella del campo. Le cariche si distribuiranno sulla superficie esterna del conduttore in maniera tale:

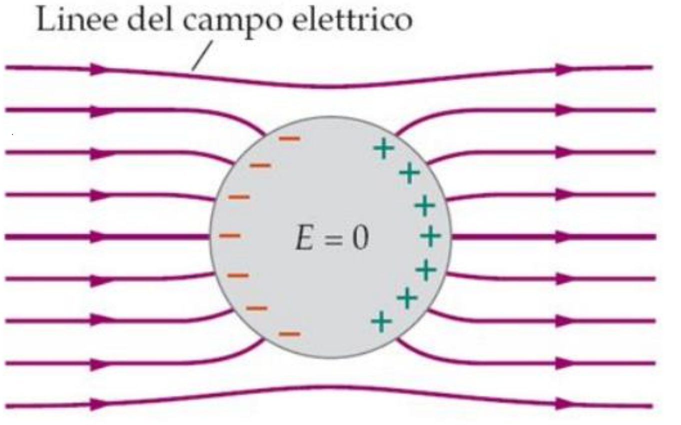
- creare un campo indotto all'interno del conduttore tale da annullare il campo esterno
- annullare il campo in direzione tangenziale alla sua superficie

$\mathrm{E_t} = 0$ ➡ Le cariche non si muovono più

$E_n = \dfrac{\rho_s}{\varepsilon_o}$ ➡ Il conduttore sia di nuovo un corpo equipotenziale

Conduttori isolati nei campi elettrostatici

In condizioni di equilibrio:



All'interno del conduttore $\begin{cases} \rho = 0 \\ \overline{E} = 0 \end{cases}$

- ✓ le **componenti tangenziali** del campo elettrico sono nulle, quindi le cariche sulla superficie del conduttore sono fisse
- ✓ il campo in tutti i punti della superficie del conduttore risulta ovunque normale alla superficie
- ✓ la superficie di un conduttore è una superficie equipotenziale
- ✓ poiché E=0 in tutti i punti all'intero del conduttore si ha lo stesso potenziale elettrico V.

Conduttori carichi nei campi elettrostatici

Se su un conduttore viene disposta una carica Q (per induzione e o contato), sia positiva che negativa, *all'equilibrio la carica può essere presente solo sulla superficie:*

- ✓ se è stato caricato negativamente, gli elettroni in eccesso si portano in superficie
- ✓ se è stato caricato positivamente, gli ioni positivi (atomi sprovvisti degli elettroni sottratti) si portano in superficie.

Questo è una diretta conseguenza della legge di Gauss. Infatti appiccando al legge di Gauss ad una qualunque superficie Σ interna al conduttore, essendo $\overline{E}$ =0:

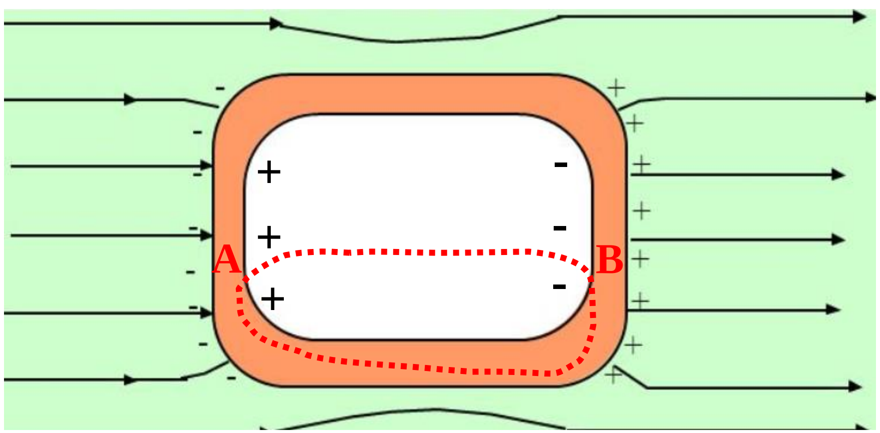
$$\oint_{\Sigma} \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 0$$

Questo garantisce che la carica netta interna al conduttore sia nulla.

Schermo elettrostatico

Si consideri in un conduttore cavo isolato, data una qualunque circuitazione l che taglia la superficie interna nei punti A e B, si ha: nel tratto AB di l interna al conduttore il campo E_{cond}=0. Se si *ipotizza per assurdo* che ci sia una distribuzione di cariche sulla superficie interna del conduttore che delimita la cavità la circuitazione del campo elettrico risulterebbe:

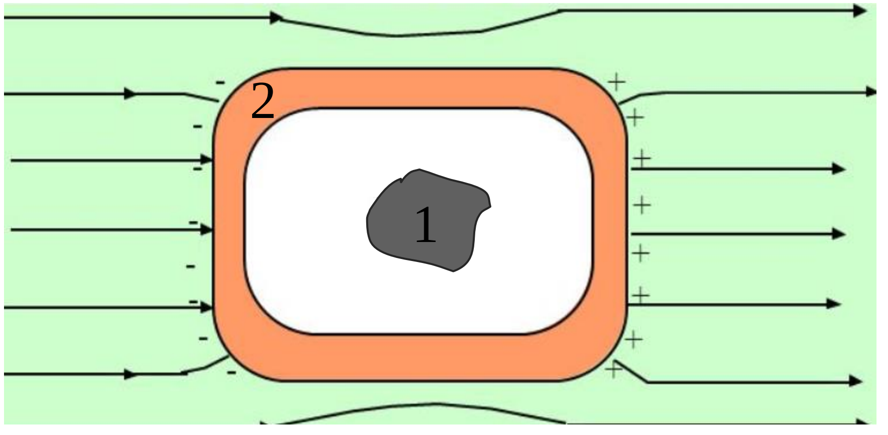
$$\oint_l \overline{E} \cdot d\bar{l} = \int_A^B \overline{E}_{cond} \cdot d\bar{l} + \int_B^A \overline{E}_{cavità} \cdot d\bar{l} = 0 + \int_B^A \overline{E}_{cavità} \cdot d\bar{l} \neq 0$$



in contraddizione con la proprietà di conservatività del campo. Perciò non ci può essere distribuzione di carica nella superfice interna del conduttore cavo.

Schermo elettrostatico

Si consideri un corpo conduttore 1 all'interno del conduttore cavo 2, *entrambi i conduttori non sono collegati ad un generatore*. Poiché non ci possono essere cariche sulla superficie interna di una cavità, il campo nella cavità è nullo, quindi il potenziale è costante in tutti i punti del conduttore, ma anche in quelli interni alla cavità, perciò anche il conduttore 1 è equipotenziale.

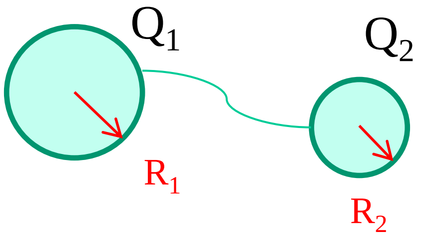


L'involucro metallico può essere adoperato per sottrarre la parte di spazio da esso delimitata, *all'influenza di campi elettrici esterni* (schermo elettrostatico).

Conduttori carichi nei campi elettrostatici

Si considerino due (o più) conduttori sferici carichi, che vengono collegati da un filo conduttore ideale, **essi assumeranno lo stesso potenziale**

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2}$$



se i 2 conduttori entrano in contato $V_1 = V_2 \rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$

per superficie sferica $\begin{cases} Q_1 = 4\pi R_1^2 \rho_1 \\ Q_2 = 4\pi R_2^2 \rho_2 \end{cases}$ con ρ densità superficiale di carica

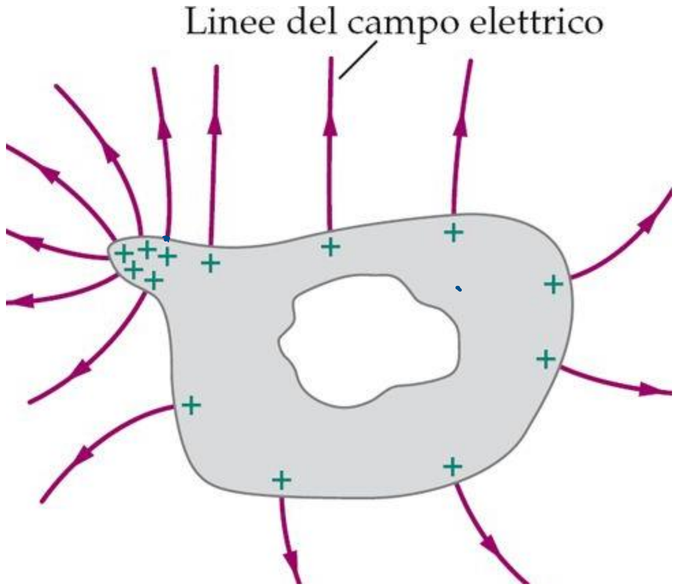
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{dal momento che } \frac{\rho_1}{\rho_2} \propto \frac{E_1}{E_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{E_2} \propto \frac{R_2}{R_1}$$

In generale: la carica che si stabilizza su un corpo è proporzionale alla sua superficie, la densità di carica e il campo elettrico sono inversamente proporzionali al raggio di curvatura.

Conduttori carichi nei campi elettrostatici

La densità di carica e il campo elettrico sono inversamente proporzionali al raggio di curvatura, questo fenomeno è il così detto potere delle punte:

quando il raggio di curvatura del conduttore è molto piccolo ed è ad alto potenziale, se in merso in un gas (o anche nell'aria) in cui è presente dalla carica elettrica vagante, allora si può verificare una scarica elettriche.



la scarica origina dall'energia cinetica che la particella carica acquisisce per effetto del forte campo elettrico. L'entità dell'energia può essere tale da generare, negli urti contro le molecole neutre, una ionizzazione a valanga del gas per urti successivi con elevate correnti locali.

Dielettrici nel campo elettrostatico

I ***dielettrici*** ideali non contengono cariche libere. Quando un corpo dielettrico è posto all'interno di un campo elettrostatico, ***non ci sono cariche libere*** che si muovono da un atomo all'altro ***per induzione,*** come nei conduttori.

Poiché i dielettrici contengono ***cariche vincolate*** queste agiscono sul campo elettrico.

Un campo elettrico agisce sul dielettrico in due modi diversi:

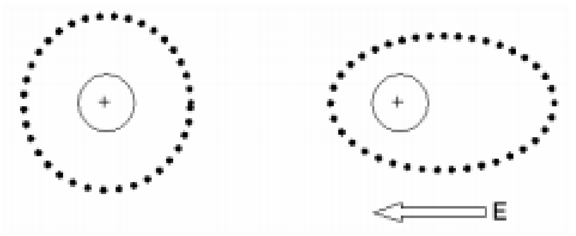
1. polarizzazione per *deformazione elettronica*
2. polarizzazione per *orientamento*.

Dielettrici nel campo elettrostatico

Polarizzazione per deformazione elettronica:

consiste in uno **spostamento relativo delle orbite** degli elettroni periferici degli atomi rispetto al nucleo e nella loro deformazione.

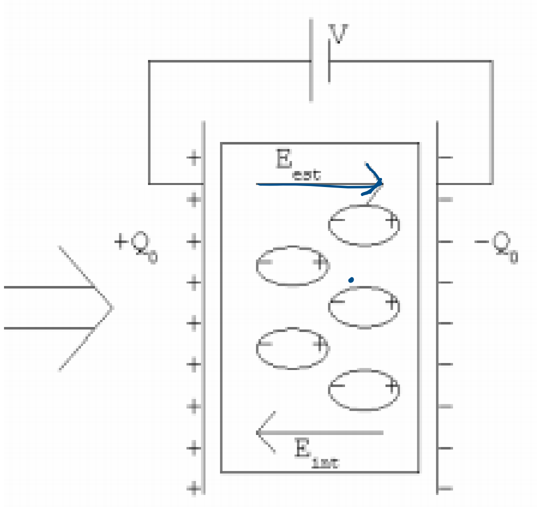
Sostanze non polari



Polarizzazione per orientamento

Si presenta in quei dielettrici in cui le **molecole costituiscono dei bipoli**, ma in assenza di campo esterno, per l'agitazione termica, il materiale risulta macroscopicamente neutro. In presenza di un campo esterno i dipoli si orientano contrastando e modificando il campo elettrico sia all'interno che all'esterno del materiale dielettrico.

Sostanze polari



In entrambi i casi il campo prodotto dai dipoli elettrici è di segno contrario al campo principale esterno.

Dielettrici nel campo elettrostatico

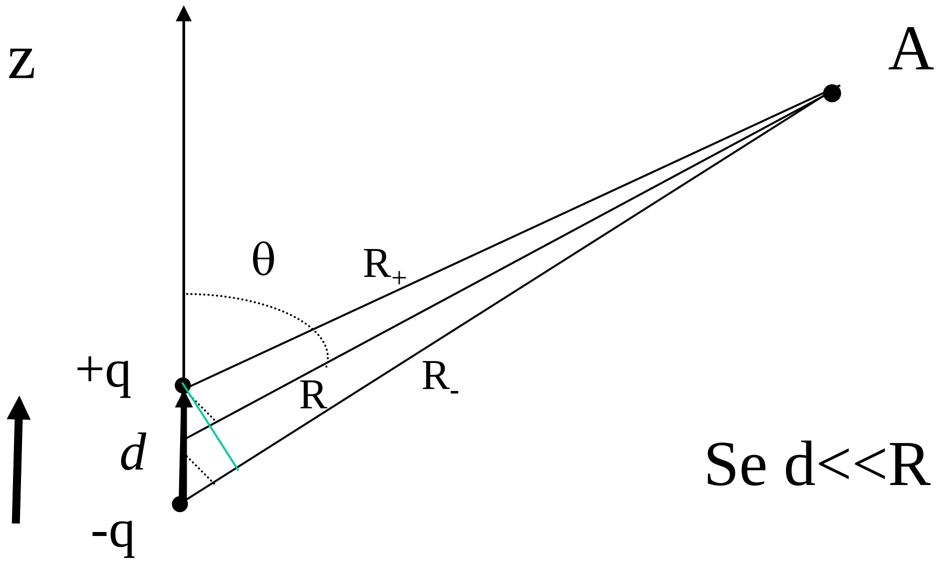
Alcuni materiali dielettrici: ***electrets*** conservano una ***polarizzazione permanente*** anche quando il campo si annulla, ossia cessa la causa che ha generato la polarizzazione.

Questi materiali si ottengono ponendo alcuni tipi di cere o materiali plastici in un campo elettrico, dopo averli precedentemente scaldati.

Gli **electrets** sono materiali che presentano un comportamento analogo ai magneti permanenti e hanno trovato una importante applicazione nei *microfoni ad alta fedeltà*.

Dipolo elettrico

Le distanze dalle cariche +q e -q del punto del campo P siano R_+ e R_- rispettivamente, il potenziale in P sarà:



$$V(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{R_- - R_+}{R_+ \cdot R_-}$$

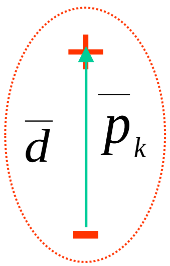
Se d<<R $\begin{cases} R_+ \cdot R_- \simeq R^2 \\ R_- - R_+ \simeq d\cos\theta \end{cases}$

Il contributo al potenziale nel generico punto dal singolo dipolo è:

$$V(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{R_- - R_+}{R_+ \cdot R_-} \cong \frac{q \cdot d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \frac{\overline{p} \cdot \vec{a}_r}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$

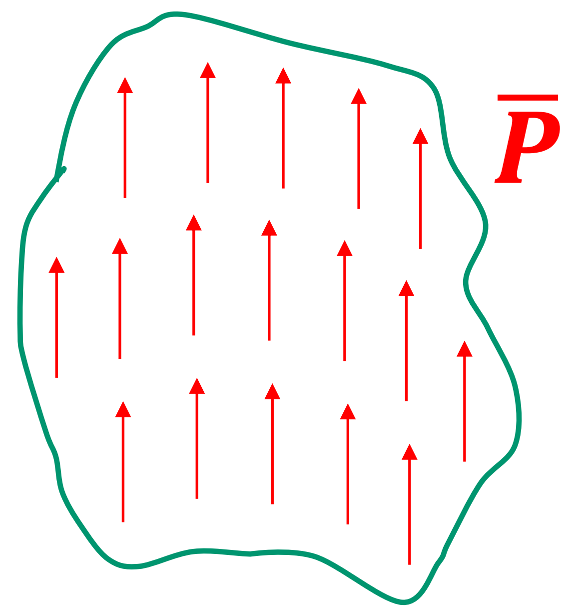
Momento elettrico specifico

Per analizzare l'effetto macroscopico dei dipoli indotti, si definisce un ***vettore di polarizzazione*** o ***momento elettrico specifico*** $\boldsymbol{\overline{P}}$:



$$\overline{P} = \lim_{\Delta v' \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n_{\Delta v}} \overline{p}_k}{\Delta v'} = \frac{d\bar{p}}{dv'} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

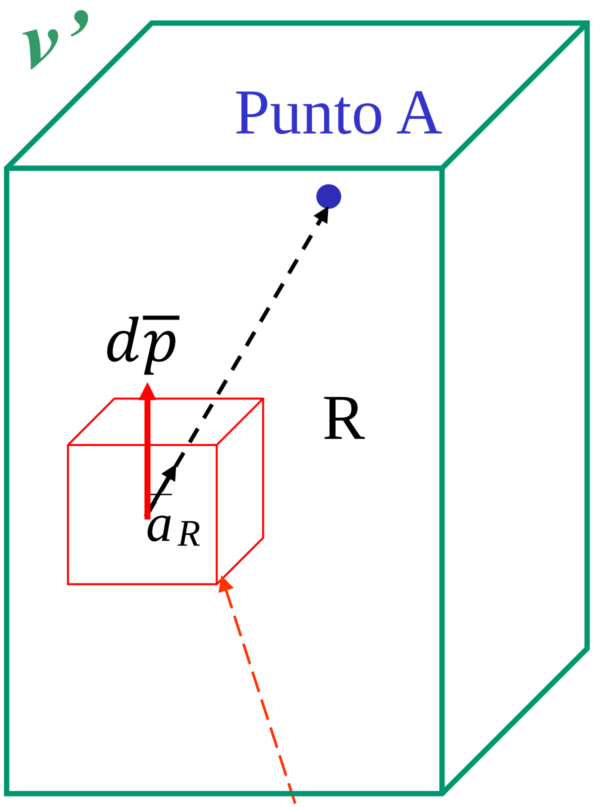
- $\bar{p}_k = q \cdot \bar{d}$ è il *momento indotto nel singolo dipolo*, *d* è l'asse del dipolo
- $n_{\Delta v}$ é il numero delle dipoli nel volume Δv



il numeratore quindi è la somma dei *momenti indotti* nelle singole molecole contenuti in un volume elementare.

Momento elettrico specifico

il potenziale elettrostatico dovuto un volume elementare *dv'* di dielettrico a cui è associato un $d\bar{p}$ è:



$$dV(A) = \frac{d\bar{p}\cdot\bar{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\bar{P}\cdot\vec{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}dv'$$

Il contributo al potenziale in A dovuto a tutto il dielettrico polarizzato di volume finito *v'* sarà espresso tramite il momento elettrico specifico $\bar{P}$ sarà:

$$V(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'}\frac{\bar{P}\cdot\vec{a}_R}{R^2}dv'$$

Momento elettrico specifico

La distanza *R* é misurata a partire da (x’,y’,z’) coordinate del baricentro del volume *v’* di dielettrico sino al punto dello spazio (x,y,z), perciò:

$$\frac{1}{R}=\left[\left(x\text{-}x'\right)^2+\left(y\text{-}y'\right)^2+\left(z\text{-}z'\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

dal momento che stiamo valutando ***il contributo della sorgente in un punto fisso nello spazio*** differenziamo rispetto alle coordinate (x’,y’,z’) della sorgente

$$\nabla'\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)=\vec{a}_x\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)+\vec{a}_y\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}'}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)+\vec{a}_z\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}'}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right)=$$

$$=\frac{\vec{a}_x(\mathrm{x}-\mathrm{x}')+\vec{a}_y(\mathrm{y}-\mathrm{y}')+\vec{a}_z(\mathrm{z}-\mathrm{z}')}{[(\mathrm{x}-\mathrm{x}')^2+(\mathrm{y}-\mathrm{y}')^2+(\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\overline{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}^3}=\vec{a}_R\frac{1}{\mathrm{R}^2}$$

dove $\bar{a}_R$ é il vettore unitario diretto dal punto sorgente al punto del campo.

Momento elettrico specifico

perciò $\quad \overline{\mathrm{P}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{a}}_{\mathrm{R}}}{R^2} = \overline{\mathrm{P}} \cdot \nabla'(\frac{1}{R})$

Applicando le proprietà del calcolo vettoriale secondo la quale:

$$\overline{P} \cdot \nabla'(\frac{1}{R}) = \nabla' \cdot (\frac{1}{R}\overline{P}) - \frac{1}{R}(\nabla' \cdot \overline{P})$$

$$\mathrm{V(A)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{v'} \nabla' \cdot (\frac{1}{R}\overline{P})\,\mathrm{d}v' - \int_{v'} \frac{1}{R}(\nabla' \cdot \overline{P})\,\mathrm{d}v'\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_{s'} \frac{1}{R}\overline{P} \cdot \mathrm{d}\,\overline{s}' + \int_{v'} \frac{-(\nabla' \cdot \overline{P})}{R}\,\mathrm{d}v'\right] \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v'} \frac{-(\nabla' \cdot \overline{P})}{R}\,\mathrm{d}v'$$

Trascurabile rispetto al secondo integrale perché tiene conto della polarizzazione delle sole molecole che stanno nelle superficie del dielettrico

Momento elettrico specifico

L'intensità del campo elettrico **in presenza di una data distribuzione di cariche vincolate in un dielettrico** è diversa da quella dello dovuta a cariche libere nello vuoto.

In presenza di un dielettrico si deve tenere conto della distribuzione di cariche presenti nel volume interno, perciò il postulato dell'elettrostatica diventa:

$$\varepsilon_o \nabla \cdot \overline{E} = \rho + \rho_p \qquad \text{ponendo} \qquad \rho_p = -\nabla \cdot \overline{P}$$

ρ <u>densità volumica delle cariche libere</u>

ρ_p <u>densità volumica di polarizzazione</u>

da cui: $\varepsilon_o \nabla \cdot \overline{E} = \rho - \nabla \cdot \overline{P} \Rightarrow \quad \varepsilon_o \nabla \cdot \overline{E} + \nabla \cdot \overline{P} = \rho$

$$\boxed{\nabla \cdot \left(\varepsilon_o \overline{E} + \overline{P} \right) = \rho}$$

Spostamento Elettrico specifico

Per tener conto anche delle sorgenti distribuite nello spazio sorge l'esigenza di introdurre una delle due grandezze fondamentali per lo studio dei campi elettrostatici:

la ***densità di flusso elettrico*** o ***spostamento elettrico*** $\overline{\mathrm{D}}$ ***:***

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_o \overline{E} + \overline{P} \right) = \rho \quad \Rightarrow \quad \overline{D} = \varepsilon_o \overline{E} + \overline{P} \quad \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \right]$$

L'unità di misura dello spostamento elettrico $\overline{D}$ nel S.I. è [C m^{-2}] (ossia la stessa dimensione della polarizzazione $\overline{P}$) .

Nel caso più generale applicando il principio di sovrapposizione degli effetti lo ***spostamento elettrico*** è espresso dalla somma di due termini:

1. $\varepsilon_o \overline{E}$ rappresenta lo ***spostamento proprio nel vuoto***
2. $\overline{P}$ lo ***spostamento dovuto alla polarizzazione della materia***.

Modello elettrostatico

L'uso del vettore $\overline{D}$ consente di legare, attraverso l'operatore divergenza, il campo elettrico e la distribuzione delle cariche libere in qualsiasi mezzo, senza la necessità di tener conto esplicitamente della polarizzazione del vettore $\overline{P}$ o della densità di polarizzazione di carica libera (di difficile valutazione):

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \, \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}}) = \nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \qquad \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3} \right)$$

Questa relazione insieme al postulato:

$$\boxed{\nabla \times \overline{\mathrm{E}} = 0 \qquad \left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \right)}$$

Rappresentano le due ***equazioni fondamentali dei campi elettrostatici in un mezzo qualsiasi, dovuti ad una distribuzione a sorgenti di qualsiasi forma***.

Modello elettrostatico

La **forma integrale** partendo dalla relazione:

$$\nabla \cdot \overline{D} = \rho \quad \left(\frac{C}{m^2} \right)$$

si ottiene facendo l'integrale volumico di entrambi i membri:

$$\int_v \nabla \cdot \overline{D} \, dv = \int_v \rho \, dv \quad [C]$$

da cui, applicando il teorema della divergenza: $\oint_S \overline{D} \cdot d\bar{s} = Q \quad [C]$

Questa è l'espressione generale della **legge di Gauss**:

il flusso totale del vettore $\overline{D}$ attraverso da una qualunque superficie chiusa, è uguale alla ***carica libera totale*** racchiusa dalla superficie.

Dielettrici lineari ed isotropi

Se il dielettrico è **isotropo** e per esso valgono relazioni lineari, la polarizzazione è direttamente proporzionale all'intensità del campo dielettrico esterno che la induce, e la costante di proporzionalità χ_e è indipendente dalla direzione del campo:

$$\overline{P} = \varepsilon_0 \, \chi_e \, \overline{E}$$

con χ_e **suscettività elettrica** (adimensionale)

La suscettività elettrica di un materiale dielettrico è una misura di quanto questo si polarizza in risposta ad un campo elettrico.

Un mezzo dielettrico è

- **lineare** se χ_e è indipendente dalla intensità del campo E
- **omogeneo** se χ_e è indipendente dalle coordinate spaziali.

Un mezzo si dice ***mezzo semplice*** quando è omogeneo, lineare e isotropo e per esso la suscettività χ_e è costante.

Dielettrici lineari ed isotropi

Se ***il dielettrico è isotropo***, sostituendo l'espressione di $\overline{P} = \varepsilon_o \chi_e \overline{E}$ in funzione della suscettibilità, nella relazione:

$$\overline{D} = \varepsilon_o \overline{E} + \overline{P} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

si ottiene:

$$\overline{D} = \varepsilon_o \overline{E} + \varepsilon_o \chi_e \overline{E} = \varepsilon_o (1 + \chi_e) \overline{E} = \varepsilon_o \varepsilon_r \overline{E} = \varepsilon \overline{E} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

con: $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r \quad \left[\frac{F}{m}\right]$

definita ***permettività assoluta*** o ***permettività,*** mentre

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = 1 + \chi_e$$

È una quantità adimensionale chiamata ***permettività relativa***. In caso di materiale isotropo la permettività è una costante e viene chiamata anche costante dielettrica.

Legge di Gauss per i dielettrici lineari ed isotropi

Se il dielettrico è isotropo: $\overline{D} = \varepsilon \overline{E} \quad \left[\frac{C}{m^2} \right]$ con $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r \quad \left[\frac{F}{m} \right]$

essendo:

$$\oint_S \overline{D} \cdot d\overline{s} = Q \quad \Rightarrow \quad \int_S \varepsilon \overline{E} \cdot d\overline{s} = Q$$

Si può scrivere:

$$\int_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\varepsilon} \quad [C]$$

La legge di Gauss è utile per determinare il campo elettrico in condizioni di simmetria.

Modello elettrostatico generale

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overline{D} = \rho \\ \nabla \times \overline{E} = 0 \end{cases}$$

Le proprietà elettriche del mezzo determinano le relazioni tra il vettore spostamento elettrico $\overline{D}$ e il campo $\overline{E}$.

Se il mezzo è lineare, isotropo e omogeneo, è valida la semplice ***relazione costitutiva***: $\overline{D} = \varepsilon\, \overline{E}$ dove la permettività $\boldsymbol{\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_r}$ è uno scalare.

Quando una carica test q fissa è posta in un punto all'interno di una regione di spazio dove è presente un campo elettrico $\overline{E}$, questa è sottoposta ad una forza elettrica $\overline{F}_e$, che dipende dal valore del campo e dalla carica:

$$\overline{F}_e = q\overline{E} \quad [N]$$

Costante dielettrica

Per ***i materiali anisotropi*** la costante dielettrica varia con la direzione del campo e i vettori $\overline{\mathrm{D}}$ ed $\overline{\mathrm{E}}$ hanno generalmente direzioni diverse e la permettività è un tensore. In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Per i cristalli le coordinate di riferimento possono essere scelte secondo le direzioni degli assi del cristallo così che i termini della matrice delle permettività diversi da quelli della diagonale risultino nulli. I mezzi aventi tali proprietà ($\varepsilon_{ij}=0$ per $i \neq j$) sono detti <u>biassiali </u>(biaxial). Se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, il mezzo è detto <u>uniassiale</u> (uniaxial). Se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, il mezzo è detto <u>isotropo.</u>

Rigidità dielettrica

Quando il campo elettrico è molto forte attrae fuori dalle molecole del dielettrico gli elettroni, che accelerati collidono violentemente con la struttura molecolare, causando dislocazioni permanenti e danni alla materia.

Si verifica un ***effetto valanga di ionizzazione*** dovuto alle collisioni e il materiale dielettrico diventa conduttore e si possono avere elevate correnti.

Questo fenomeno si chiama rottura del dielettrico.

La ***rigidità dielettrica*** del materiale è ***l'intensità del campo elettrico che un materiale dielettrico può sostenere, senza che si verifichi la rottura del dielettrico.***

Per l'aria, alla pressione atmosferica, la rigidità dielettrica è $3\ \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{mm}}$

Effetto Corona

L’effetto corona è una scarica elettrica parziale nella vicinanza di conduttori, dovuto ad un processo di ionizzazione dell’aria provocato da un elevato gradiente del campo elettrico.

L'effetto corona consiste nella ionizzazione dell'aria presente in un sottile strato cilindrico (la “corona”) attorno ad un conduttore elettricamente carico. La causa del fenomeno è l'intenso campo elettrico che in alcuni casi, si stabilisce in questa regione. La ionizzazione si determina quando il valore del campo elettrico supera una soglia detta “rigidità dielettrica” dell'aria, e si manifesta con una serie di scariche elettriche, che interessano unicamente la zona ionizzata e sono quindi circoscritte alla corona cilindrica in cui il valore del campo supera la rigidità dielettrica. Il fenomeno è, in piccolo, sostanzialmente equivalente alla generazione di lampi e fulmini, che si verificano proprio quando il campo elettrico dovuto alla differenza di potenziale tra nuvola e nuvola o tra nuvola e terreno supera la rigidità dielettrica

Effetto Corona

Nei gas come l'aria l'esistenza di ioni preesistenti al campo elettrico (generati per esempio da radiazioni ionizzanti come i raggi ultravioletti o i raggi cosmici) mette a disposizione un altro meccanismo: il campo elettrico accelera gli ioni preesistenti, facendo loro acquisire energia cinetica. Se questa è sufficiente lo ione accelerato può, quando urta una molecola di gas, causarne la ionizzazione, dando così luogo ad un fenomeno noto come “moltiplicazione a valanga”.

Rigidità dielettrica

Materiale	*Costante dielettrica*	*Rigidità dielettrica V/m*
Aria (pres. atmosferica)	1.0	3×10^6
Olio minerale	2.3	15×10^6
Carta	2÷4	15×10^6
Polistirolo	2.6	20×10^6
Gomma	2.3 ÷4	25×10^6
Vetro	4 ÷ 10	30×10^6
Mica	6	200×10^6

Postulati dell'Elettrostatica

Forma differenziale — ***Forma integrale***

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \, \overline{\mathrm{E}} + \overline{\mathrm{P}}) = \nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \quad \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}\right)$$

$$\oint_S \overline{\mathrm{D}} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathrm{s}} = \mathrm{Q} \quad [\mathrm{C}]$$

$$\nabla \times \overline{\mathrm{E}} = 0 \quad \left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)$$

$$\oint_C \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0$$

Espressione generale della Legge di Gauss

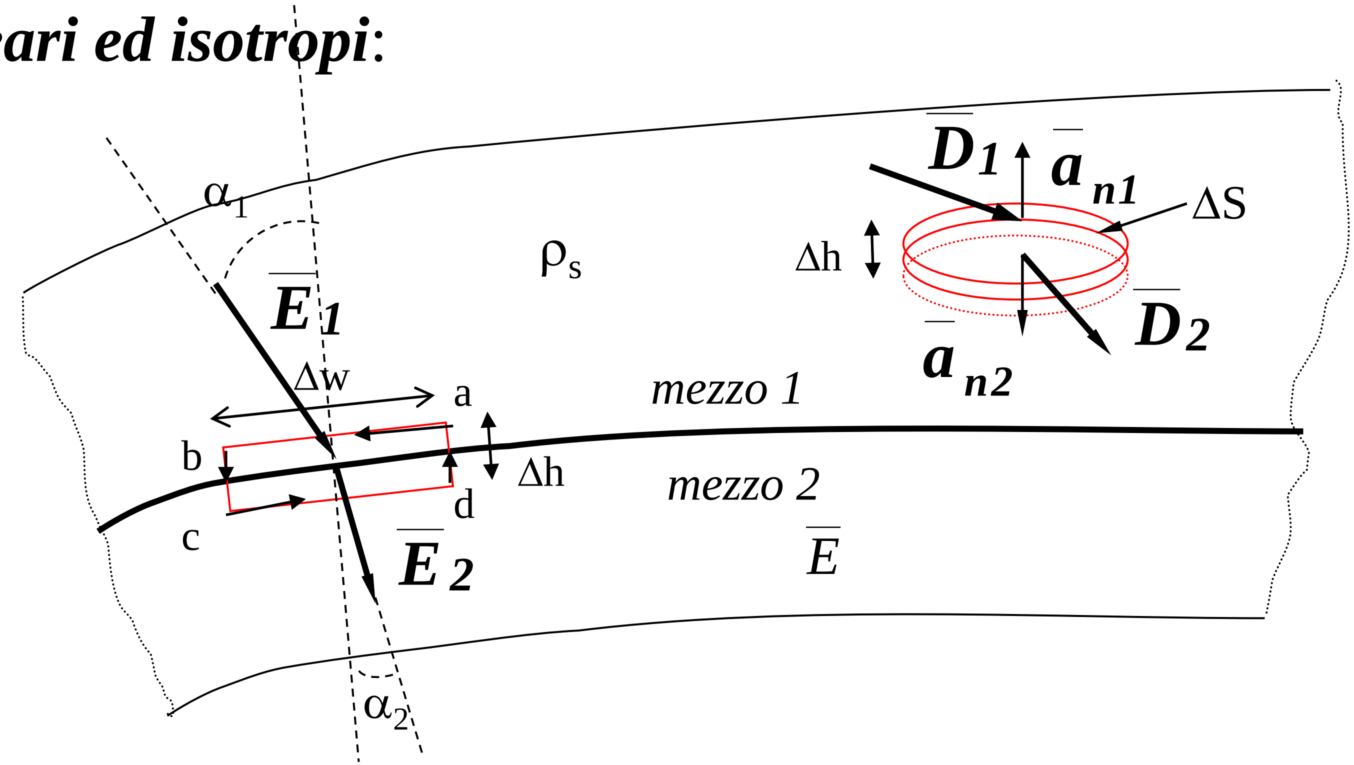
$$\oint_S \overline{\mathrm{D}} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathrm{s}} = \mathrm{Q} \quad [\mathrm{C}]$$

Legge di Gauss in presenza di dielettrici isotropi

$$\int_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\varepsilon} [\mathrm{C}] \qquad \overline{D} = \varepsilon \overline{E} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Condizioni al contorno del campo elettrostatico

Dielettrico non omogeneo: si consideri una interfaccia tra due ***mezzi lineari ed isotropi***:



Per determinate la relazione tra le ***componenti tangenziali*** del campo sul contorno si calcola la circuitazione del vettore $\bar{E}$ lungo il percorso elementare abcda e trascurando i contributi nei tratti bc = da $=\Delta h \approx 0$.

Condizioni al contorno del campo elettrostatico

$$\nabla \times \overline{\mathrm{E}} = 0 \;\Rightarrow \oint_{\ell} \overline{\mathrm{E}} \cdot d\bar{l} = 0$$

$$\oint_{\mathrm{abcda}} \overline{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\bar{\mathrm{l}} \cong \int_{a}^{b} \overline{\mathrm{E}_1} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathrm{w}} + \int_{c}^{d} \overline{\mathrm{E}}_2 \cdot \mathrm{d}\overline{\mathrm{w}} = -\mathrm{E}_{1\mathrm{t}}\Delta\mathrm{w} + \mathrm{E}_{2\mathrm{t}}\Delta\mathrm{w} = 0$$

Questo implica che: $\mathrm{E}_{1\mathrm{t}} = \mathrm{E}_{2\mathrm{t}} \quad [\mathrm{V/m}]$

che ci dice che la componente tangenziale del campo $\bar{E}$ è continua attraverso l'interfaccia.

Se i due mezzi hanno rispettivamente permettività ε_1 e ε_2 si ha:

$$\frac{\mathrm{D}_{1\mathrm{t}}}{\varepsilon_1} = \frac{\mathrm{D}_{2\mathrm{t}}}{\varepsilon_2}$$

Condizioni al contorno del campo elettrostatico

Per determinate la relazione tra le ***componenti normali*** del campo sul contorno si applica la legge di Gauss a un cilindretto elementare con una base nel mezzo 1 e una nel mezzo 2, come riportato in figura.

L'altezza del cilindretto sia trascurabile per cui, applicando la legge di Gauss, si ha:

$$\oint_S \overline{D} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathrm{s}} \cong \int_{s_1} \overline{D} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathrm{s}} + \int_{s_2} \overline{D} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathrm{s}} = Q$$

$$\oint_S \overline{\mathrm{D}} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathrm{s}} \cong \left(\overline{\mathrm{D}}_1 \cdot \overline{\mathrm{a}}_{\mathrm{n}1} + \overline{\mathrm{D}}_2 \cdot \overline{\mathrm{a}}_{\mathrm{n}2}\right)\Delta S = \left(-\mathrm{D}_{1\mathrm{n}} + D_{2\mathrm{n}}\right)\Delta S = \rho_S \Delta S$$

Dove $\overline{\mathrm{a}}_{\mathrm{n}1}$ e $\overline{\mathrm{a}}_{\mathrm{n}2}$ sono i versori uscenti e rispettivamente normali alle superfici dei mezzi 1 e 2. Dalla precedente relazione si ottiene che:

$$\mathrm{D}_{2\mathrm{n}} - \mathrm{D}_{1\mathrm{n}} = \rho_S \quad [\mathrm{C/m^2}]$$

Condizioni al contorno del campo elettrostatico

La relazione $D_{2n} - D_{1n} = \rho_S$ dice che la componente normale di $\overline{D}$ **è discontinua attraverso l'interfaccia** se è presente carica libera e l'entità della discontinuità è uguale alla densità superficiale di carica. Se i due mezzi hanno rispettivamente permettività ε_1 e ε_2 si ha :

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \rho_S \qquad [\mathrm{C/m^2}]$$

Se il mezzo 2 è un conduttore $\overline{D}_2$=0, e l'equazione precedente diventa:

$$D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} = -\rho_S \quad [\mathrm{C/m^2}]$$

che diventa: $E_n = -\dfrac{\rho_S}{\varepsilon_o}$ quando il mezzo 1 è lo spazio libero.

Condizioni al contorno del campo elettrostatico

poichè $\tan\alpha_1 = \dfrac{E_{1t}}{E_{1n}}$ e $\tan\alpha_2 = \dfrac{E_{2t}}{E_{2n}}$

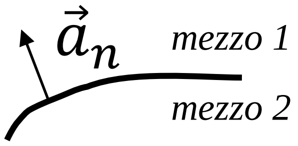
se i due dielettrici sono in contatto ***senza che ci siano cariche libere*** nella interfaccia, $\rho_S = 0$;

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{e} \quad \frac{E_{1n}}{\varepsilon_1} = \frac{E_{2n}}{\varepsilon_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

In questo caso il campo Elettrico devia allontanandosi dalla normale alla superficie, nel mezzo con permettività più elevata.

Riassumendo, in generale per i campi elettrostatici devono essere soddisfate le seguenti condizioni al contorno:

- componenti tangenziali: $E_{1t} = E_{2t}$
- componenti normali: $\vec{a}_n \cdot \left(\overline{D}_2 - \overline{D}_1\right) = \rho_S$



Capacità

Un conduttore in un campo elettrostatico è un corpo equipotenziale e le cariche che giacciono nel conduttore, si distribuiscono sulla sua superficie in modo tale che il campo elettrico all'interno di esso si annulli.

Se si aumenta il potenziale V di un fattore k, aumenta anche il campo dello stesso fattore essendo: $\overline{E} = -\nabla V$

ma poiché:

$$\overline{E} = \frac{\rho_S}{\varepsilon_o}\overline{a}_n$$

si ha che necessariamente aumenta la densità di carica e perciò la carica totale Q. Dunque ***Q e V aumentano proporzionalmente***, e il loro rapporto rimane invariato. Si può scrivere:

$$\boxed{Q = CV}$$

Capacità e condensatori

$C=Q/V$, è chiamata ***capacità del corpo conduttore isolato***: essa è la carica elettrica che deve essere aggiunta al corpo per ottenere un incremento unitario del potenziale elettrico.

C si misura in [C/V] o [F] (farad).

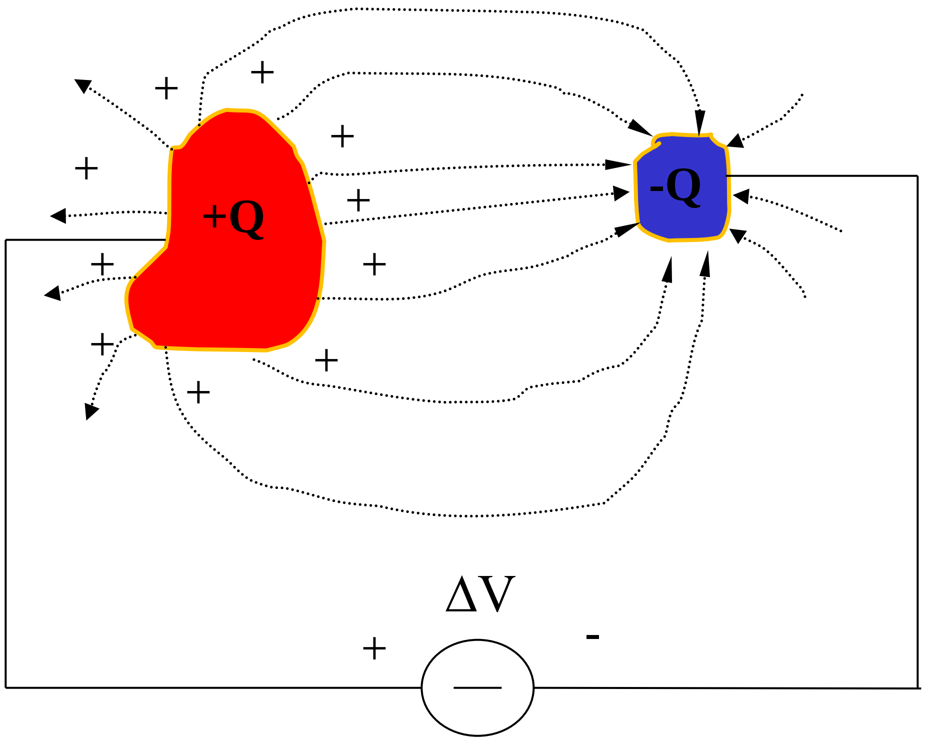
Definiamo **condensatore (o capacitore) un componete elettromagnetico** costituito da due conduttori, di forma arbitraria, separati dal vuoto o da un mezzo dielettrico. Le linee di campo elettrico:

- hanno origine in corrispondenza delle cariche positive e terminano sulle cariche negative
- sono perpendicolari alle superfici dei conduttori

Le superfici dei conduttori sono superfici equipotenziali.

Capacità e condensatori

Quando un generatore di tensione viene collegato tra i due conduttori, si ha un trasferimento di carica, con un addensamento di carica +Q in un conduttore e –Q sull’altro come riportato in figura. La capacità del condensatore sarà espressa in funzione della differenza di potenziale tra i due conduttori:



$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad [F]$$

Capacità e condensatori

La capacità di un condensatore è una ***proprietà fisica di un sistema di due conduttori,*** essa dipende dalla ***geometria*** dei conduttori e dalla ***permettività*** del mezzo interposto tra loro: essa non dipende ne dalla carica Q**,** ne dalla differenza di potenziale ΔV.
Un condensatore ha un valore di capacità anche quando non gli viene applicata alcuna carica o differenza di potenziale.

Dalla relazione:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad [F]$$

Si può intuire che la capacità C si può determinare in due modi:

- assumendo una ΔV e determinando Q in funzione di ΔV
- assumendo una Q e determinando ΔV in funzione di Q.

Capacità e condensatori

Procedura generale per la determinazione della capacità C

1. Stabilire il sistema di coordinate appropriato in base alla geometria del condensatore (coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche)
2. Assumere una distribuzione di cariche +Q e –Q sui conduttori
3. Determinare $\bar{E}$ in funzione della carica Q per mezzo della legge di Gauss (o altre relazioni):

$$\oint_S \overline{E} \cdot d\bar{s} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

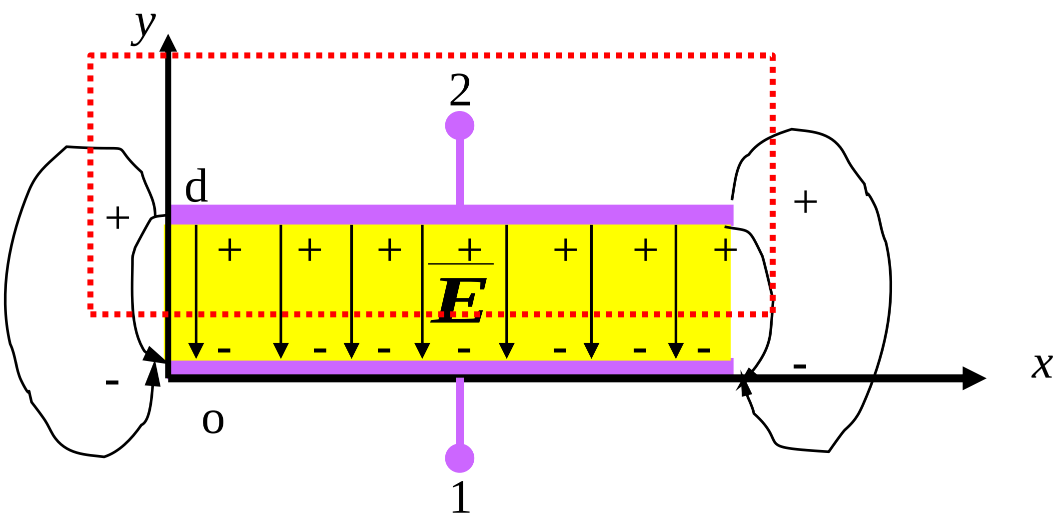
1. Determinare la V_{21} calcolando l'integrale (*): $V_{21} = -\int_1^2 \overline{E} \cdot d\bar{l}$

2. Determinare infine C calcolando il rapporto: $C = \dfrac{Q}{V_{21}}$

(*) integrando dal conduttore carico con –Q sino a quello carico con +Q

Condensatore piano

Esso è costituito da due armature piane di area *A* separate da uno spessore *d* di dielettrico uniforme di permettività *ε*.



Sulle due armature siano uniformemente distribuite le cariche +Q e - Q rispettivamente, con densità di carica uniforme :

$$\rho_s = \frac{Q}{S}$$

Per questa configurazione geometrica, il sistema di riferimento più appropriato è quello cartesiano.

Condensatore piano

Trascurando l'effetto ai bordi, il campo si può ritenere costante all'interno del dielettrico:

$$\oint_S \overline{\mathrm{E}} \cdot d\overline{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon} \Rightarrow \int_{S_1} E_{1n} ds = E_{1n} A = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon} \qquad \text{perciò} \qquad \bar{E} = -\vec{a}_y \frac{Q}{A\varepsilon}$$

$$V_{21} = -\int_{y_1=0}^{y_2=d} \overline{E} \cdot d\overline{l} = -\int_0^d -\overline{a}_y \frac{Q}{\varepsilon A} \cdot \overline{a}_y \, dy = \frac{Q}{\varepsilon A} d$$

da cui. La capacità è:

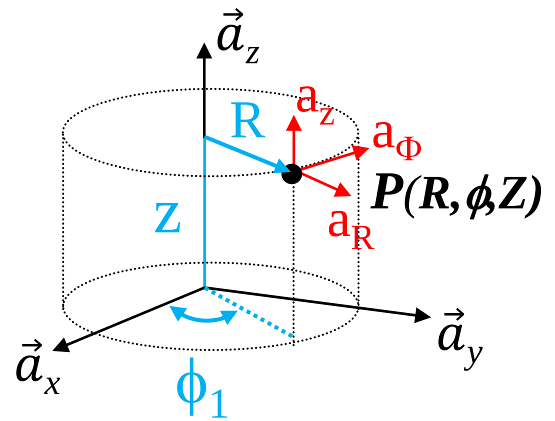
$$\boxed{\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{V}_{12}} = \frac{\varepsilon \mathrm{A}}{\mathrm{d}}}$$

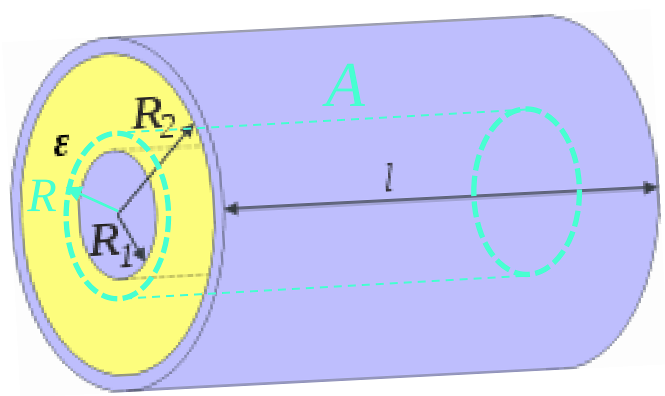
- legata ad ε e alle dimensioni A e d del condensatore e
- indipendente da Q e U_{12}.

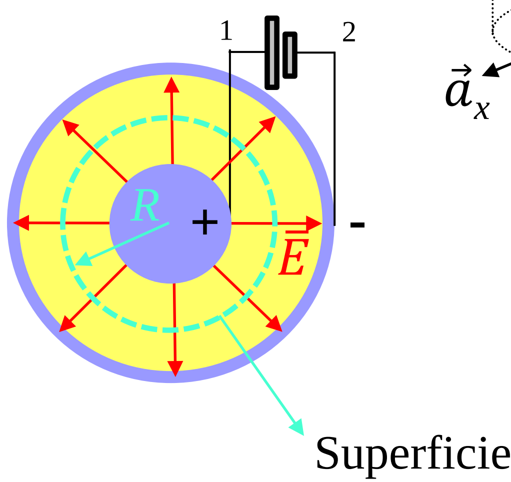
Condensatore cilindrico

Esso è costituito da un conduttore di raggio interno $R_{1,}$ uno coassiale esterno di raggio interno R_2 e un dielettrico di constante dielettrica ε interposto tra i due conduttori:

Coordinate cilindriche







Il campo, essendo normale alle superfici conduttrici, risulta radiale. Per la natura del campo è opportuno scegliere un sistema di coordinate cilindriche con un asse coincidente con l’asse del cilindro.

Condensatore cilindrico

Trascurando gli effetti dei bordi e applicando la legge di Gauss:

$$\oint_A \overline{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon} \qquad \text{con} \qquad \overline{\mathrm{E}}_R = \overline{\mathrm{a}}_R \mathrm{E}_\mathrm{R} \qquad \oint_A \overline{\mathrm{a}}_R \mathrm{E}_R \cdot \mathrm{d}A\, \overline{\mathrm{a}}_\mathrm{R} = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}$$

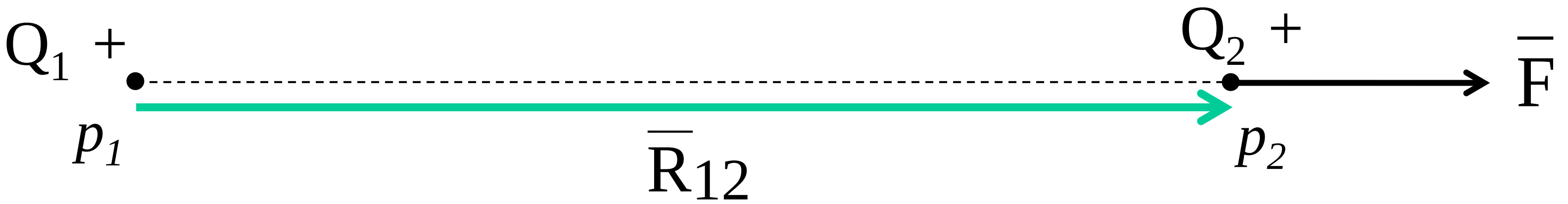
si ottiene: $\int_A E_R\, dA = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon} \rightarrow E_R \int_A dA = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon} \rightarrow \qquad \mathrm{E}_\mathrm{R} = \frac{\mathrm{Q}}{2\pi\varepsilon\, \mathrm{l}R}$

Dalla quale integrando in dR:

$$U_{12} = -\int_{R=R_2}^{R=R_1} \overline{E} \cdot d\overline{l} = -\int_{R_2}^{R_1} \left(\overline{a}_R \frac{Q}{2\pi\varepsilon\, lR} \right) \cdot (\overline{a}_R\, dR) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\, l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Quindi per un condensatore cilindrico: $\boxed{C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{2\pi\varepsilon\, l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$

Energia elettrostatica



$$\bar{F} = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_{12}^2}\vec{a}_{R_{12}}$$

Q_2 è sottoposta ad una forza di repulsione radiale $\bar{F}$ dovuta al campo generato da Q_1

Per portare una carica Q_2 positiva dall'infinito in P_2 (lentamente affinché possano ritenersi trascurabili sia l'energia cinetica che gli effetti di radiazione), in senso contrario alla direzione del campo, è necessario applicare una forza uguale e contraria a quella esercitata dal campo. Perciò il lavoro richiesto per portare Q_2 in p_2 è:

$$W_2 = Q_2\ V(p_2) = Q_2\ V_2 = Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_{12}}\right)$$

Dove V_2 è il potenziale elettrostatico (lavoro per unità di carica) in p_2 ***dovuto a Q_1*** posta a distanza R_{12}

Energia elettrostatica

Indichiamo con W_1 il lavoro necessario a portare Q_1 in P_1 ad una distanza R_{12} da Q_2:

$$W_1 = Q_1 V_1 = Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{12}} \right)$$

Dove V_1 è il potenziale elettrostatico in p_1 **dovuto a Q_2** posta a distanza R_{12}

Poiché il **campo elettrostatico è conservativo e quindi il lavoro compiuto è indipendente dal percorso fatto** e dalla sequenza seguita per ottenere una certa configurazione, il lavoro W per portare le cariche Q_2 e Q_1 a distanza reciproca R_{12} sarà:

$$W = W_1 = W_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{12}} = \frac{1}{2} Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{12}} \right) + \frac{1}{2} Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_{12}} \right) = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2$$

Energia elettrostatica

Si supponga che un'altra carica Q_3 sia portata dall'infinito in un punto che dista R_{13} da Q_1 e R_{23} da Q_2, sarà richiesta una quantità di lavoro:

$$\Delta W = Q_3 V_3 = Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{23}} \right)$$

l'energia potenziale immagazzinata nell'assemblare le tre cariche Q_1, Q_2, e Q_3:

$$W_{new} = W + \Delta W = \left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_o R_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\varepsilon_o R_{23}} \right)$$

che può essere scritta:

$$W_{new} = \frac{1}{2}[Q_1 \left(\underbrace{\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}}}_{V_1(p_1)} \right) + Q_2 \left(\overbrace{\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}}^{V_2(p_2)} \right) + Q_3 \left(\underbrace{\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}}_{V_3(p_3)} \right)]$$

$$W_{new} = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 \right)$$

Energia elettrostatica

Estendendo la procedura per *n cariche discrete localizzate in N punti*:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k \, V_k \quad [J]$$

In presenza di *una distribuzione di cariche continua di densità volumica* ρ**,** l'espressione della W_e, valida per una distribuzione di cariche discrete, deve essere modificata sostituendo all'operatore di sommatoria l'operatore di integrazione:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{v'} \rho V \, dv' \qquad [J]$$

- ✓ v' è il volume della regione dove sono distribuite le cariche ossia la regione dove esiste ρ.

V e ρ sono entrambi funzione dello spazio, ad ogni punto di *v'* sarà associato un valore di potenziale V una valore di densità di carica ρ

Energia elettrostatica

L'unità di misura della energia prevista dal sistema internazionale (joule [J]), è troppo grande per la fisica delle particelle elementari, per cui si utilizza **l'elettronvolt [eV]**.

$$1\ \text{eV} = 1.60 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Un elettronvolt è l'energia cinetica ΔE acquistata da un elettrone libero, la cui carica è 1.6 10^{-19} C, quando acquista un potenziale elettrico di ΔV =1 V nel vuoto.

$$\Delta E = q \cdot \Delta V = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{coulomb} * 1\,\text{volt} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{joule}$$

Energia elettrostatica

In base ala relazione: $W_e = \frac{1}{2}\int_{v'} \rho V \, dv'$ [J] essendo $\nabla \cdot \overline{D} = \rho$

si può scrivere:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{v'} (\nabla \cdot \overline{D}) V \, dv' \quad [J]$$

Applicando le proprietà del calcolo vettoriale:

$$(\nabla \cdot \overline{D})V = \nabla \cdot (V\,\overline{D}) - \overline{D} \cdot \nabla V$$

quindi

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \nabla \cdot (V\overline{D}) \, dv - \frac{1}{2}\int_v \overline{D} \cdot \nabla V \, dv = \frac{1}{2}\oint_s V\overline{D} \cdot d\overline{s} + \frac{1}{2}\int_v \overline{D} \cdot \overline{E} \, dv$$

Per un volume abbastanza grande $R \rightarrow \infty$ e $V(\infty) \rightarrow 0$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_v \overline{D} \cdot \overline{E} \, dv$$

Energia elettrostatica

Inoltre se il mezzo è lineare: $\overline{D} = e\overline{E}$, l'energia può essere espressa in funzione di una sola grandezza di campo:

$$\mathrm{W_e} = \frac{1}{2}\int_{v'} \varepsilon\,\mathrm{E}^2 \mathrm{d}v' = \frac{1}{2}\int_{v'} \frac{\mathrm{D}^2}{\varepsilon}\,\mathrm{d}v' \quad [\mathrm{J}]$$

Si può anche definire la densità di energia elettrostatica $\mathrm{w_e}$, come l'argomento dell'integrale:

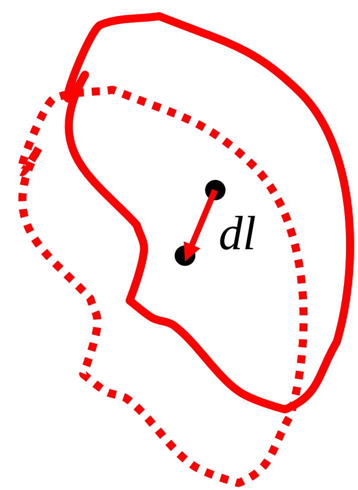
$$\mathrm{W_e} = \int_{v'} \mathrm{w_e}\mathrm{d}v' \quad [\mathrm{J}] \quad \text{da cui:}$$

$$\mathrm{w_e} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{D}}\cdot\overline{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon\,\mathrm{E}^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}^2}{\varepsilon} \qquad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

Forza elettrostatica

La legge di Coulomb ci fornisce l'espressione della forza di iterazione tra due cariche puntiformi. In un sistema complesso dove sono presenti **corpi carichi (non puntiformi) su ognuno viene** esercitata una forze meccaniche dovute alle cariche presenti sugli altri conduttori. Per determinare la forza esercitata su un corpo da un altro corpo carico viene usato metodo basato sul principio dello **lavori virtuale** applicato a 2 diversi casi:

1. Sistema isolato di corpi contutori carichi e dielettrici polarizzati che non può avere scambi di energia con l'esterno Q=cost (non ci sono generatori).
2. Sistema non isolato di corpi conduttori collegati rispettivamente a potenziali fissi (generatori di tensione), per cui i loro potenziali sono mantenuti costanti (V=cost)



Forza elettrostatica

Si immagini che le forze elettriche abbiano indotto uno **spostamento elementare *dl* di in uno corpo sottoposto alla azione del campo** (spostamento virtuale), per cui il **lavoro meccanico** compiuto sarà:

$$dW_M = \bar{F} \cdot d\bar{l}$$

dove la forza elettrostatica $\bar{F}$ verrà indicata con $\bar{F}_Q$ nel caso di cariche costanti, e con $\bar{F}_V$ nel caso di potenziali costanti.

1. Se il sistema è isolato. Per il principio della conservazione della energia: $dW_M + dW_e = 0$

il lavoro meccanico è fatto a spese della energia elettrostatica immagazzinata dal sistema.

$$dW_M = -dW_e$$

Dal momento che: $dW_e = \nabla W_e \cdot d\bar{l}$

$$\bar{F}_Q \cdot d\bar{l} = -\nabla W_e \cdot d\bar{l} \Rightarrow \quad \bar{F}_Q = -\nabla W_e \quad [\mathrm{N}]$$

Forza elettrostatica

2. Se il sistema non è isolato, il lavoro viene fatto a spese dell' energia fornita dall'esterno. affinché i potenziali rimangano costanti, **il lavoro compiuto dalle sorgenti esterne è:**

$$dW_S = \sum_{k=1}^{N} V_k I_k dt = \sum_{k=1}^{N} V_k dQ_k$$

Per il principio della conservazione della energia si ha

$$\mathrm{dW_M + dW_e = dW_S}$$

dove: $\mathrm{dW_e} = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{k}} \mathrm{V_k dQ_k} = \frac{1}{2}\mathrm{dW_S} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dW_S = 2dW_e}$

Riscriviamo il principio di conservazione dell'energia

$$\mathrm{\bar{F}_v \cdot d\bar{l} = dW_s - dW_e = dW_e = (\nabla W_e) \cdot d\bar{l}}$$

da cui: $\mathrm{\bar{F}_v = (\nabla W_e)} \quad [\mathrm{N}]$

Forze elettrostatica

Se il corpo è vincolato a ruotare intorno ad un asse, per esempio l'asse z, e le forze elettriche abbiano indotto uno **rotazione elementare,** il lavoro meccanico fatto dal sistema **per la rotazione virtuale angolare $d\varphi$** sarà:

$$dW = T_z \cdot d\varphi$$

Dove T_Z è la componente lungo z della coppia agente sul corpo.

Con una procedura analoga a quella seguita per le forze, si giunge alle espressioni della componente z della coppia elettrostatica per una rotazione virtuale angolare $d\varphi$:

$$\left(T_Q\right)_z = -\frac{\partial W_e}{\partial \varphi} \quad [\mathrm{N \cdot m}]$$ **Ipotesi di cariche costanti**

$$(T_V)_z = \frac{\partial W_e}{\partial \varphi} \quad [\mathrm{N \cdot m}]$$ **Ipotesi di potenziali costanti**

Forze elettrostatiche

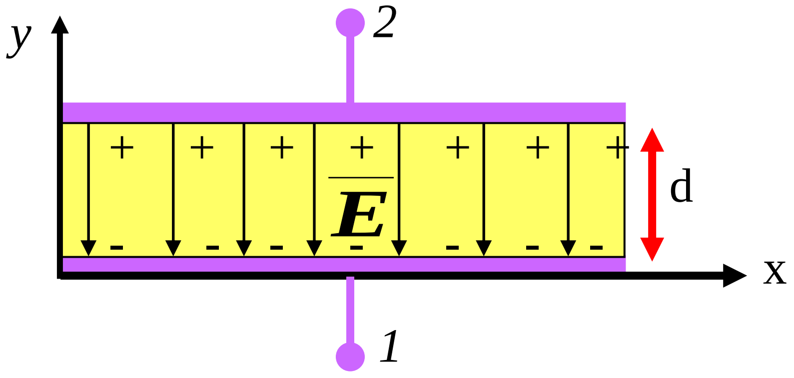
Carica costante Sistema isolato	Potenziale costante Sistema non isolato
$\overline{F}_Q = -\nabla W_e \qquad [N]$	$\overline{F}_V = \nabla W_e \qquad [N]$
$(T_Q)_z = -\frac{\partial W_e}{\partial \varphi} \qquad [N \cdot m]$	$(T_V)_z = \frac{\partial W_e}{\partial \varphi} \qquad [N \cdot m]$

Dal confronto delle_espressioni delle forze e delle coppie nei due casi si vede come l'unica differenza nelle espressioni, è il segno:

- nel primo caso (sistema isolato con le cariche costanti), il lavoro è stato fatto ***a spese della energia elettrostatica del sistema***
- nel secondo caso (sistema non isolato con i potenziali costanti), il lavoro meccanico è stato fatto ***grazie all'energia fornita da un sistema esterno***.

Energia elettrostatica di un condensatore piano

Si calcoli la forza di attrazione tra le armature di un condensatore piano, alimentato da un generatore di tensione (V=cost)



$$V_{21} = -\int_{y_1=0}^{y_2=d} \bar{E}\cdot d\bar{l} = \mathrm{E}\cdot d$$

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

$$\mathrm{W_e} = \frac{1}{2}\int_{v'} \varepsilon \mathrm{E}^2\, \mathrm{d}v' = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\,\mathrm{V}^2}{\mathrm{d}^2}(\mathrm{A\ d}) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\,\mathrm{A\ V}^2}{\mathrm{d}} = \frac{1}{2}\mathrm{CV}^2$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$\mathrm{W_e} = \frac{1}{2}\mathrm{C}\cdot\mathrm{V}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Q}\cdot\mathrm{V} = \frac{1}{2}\mathrm{Q}\cdot\mathrm{E}\cdot\mathrm{d}$$

Forze di attrazione tra le armature di un condensatore

Si supponga uno spostamento virtuale in direzione *y* (parallelamente al campo), dell'armatura superiore supponendo:

1. Carica costante: condensatore non collegato al generatore di tensione

$$\bar{\mathrm{F}}_{\mathrm{Q}} = -\nabla \mathrm{W_e} = -\frac{\partial W_e}{\partial y}\vec{a}_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Q}E_y \cdot \mathrm{y}\vec{a}_y\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{Q}E_y\,\vec{a}_y \;= -\frac{1}{2}\mathrm{Q}\frac{Q}{A\varepsilon}\vec{a}_y$$
$$-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon S}\vec{a}_y$$

2. Potenziale costante: condensatore collegato al generatore di tensione

$$\bar{F}_V = \nabla W_e = \frac{\partial W_e}{\partial y}\vec{a}_y = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}CV^2\vec{a}_y = \frac{1}{2}\varepsilon A V^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right)\vec{a}_y = -\frac{1}{2}\varepsilon\frac{AV^2}{y^2}\vec{a}_y = -\frac{1}{2}\;\frac{Q^2}{\varepsilon A}\;\vec{a}_y$$

$$(*)V^2 = \frac{Q^2}{C^2} = \left(\frac{Q}{\varepsilon S}\mathrm{d}\right)^2$$

$$\boxed{\bar{F}_V = \bar{F}_Q}$$

Soluzioni di problemi elettrostatici

I problemi elettrostatici riguardano lo studio degli effetti delle cariche elettriche fisse.

La risoluzione di tali problemi richiede la determinazione:

- del potenziale elettrico V e quindi del campo: $\overline{\mathrm{E}} = -\overline{\nabla}\mathrm{V}$ (noto ρ)
- della distribuzione delle cariche elettriche ρ (noto V).

Nei mezzi lineari ed isotropi, ***se è nota la distribuzione delle cariche elettriche ρ*** possono essere determinati l'intensità del campo elettrico e quindi il potenziale elettrico V, essendo:

$$\oint_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \overline{\mathrm{E}} = -\nabla V$$

In diversi problemi pratici le formule studiate per determinare $\overline{E}$ non sono di facile applicazione. La risoluzione analitica dell'integrale di Gauss può risultare molto complicata.

Equazione di Poisson

Partendo dalle due equazioni fondamentali della elettrostatica valide per ogni mezzo:

$$\begin{cases} \nabla \times \overline{\mathrm{E}} = 0 \\ \nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \end{cases}$$

per la irrotazionalità del vettore campo elettrico $\bar{E}$, si può definire un potenziale elettrico V tale che: $\overline{E} = -\nabla V$

In un ***mezzo isotropo e lineare*** $\overline{\mathrm{D}} = \varepsilon \overline{\mathrm{E}}$ dunque:

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{D}} = \rho \quad \Rightarrow \nabla \cdot \left(\varepsilon \nabla \mathrm{V} \right) = -\rho$$

dalla relazione precedente si ottiene l'espressione dell'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Equazione di Poisson

La risoluzione della equazione di Poisson comporta la risoluzione di una equazione differenziale lineare alle derivate parziali del secondo ordine. Essa risulta ***calcolabile in ogni punto dello spazio, dove esistono le derivate parziali del secondo ordine della funzione V(x,y,z)***.

In coordinate cartesiane il laplaciano (o la divergenza del gradiente) di V:

$$\nabla^2 \mathrm{V} = \nabla \cdot \nabla V = \left(\vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

L’equazione di Poisson per l’elettrostatica assume la forma:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}\right]}$$

Equazione di Poisson

Possono essere utilizzate anche le espressioni:

- in <u>coordinate cilindriche</u>:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial}\left(r\frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- in <u>coordinate sferiche</u>:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Equazione di Poisson e Laplace

L'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

permettere di risolvere i problemi elettrostatici nei quali non è nota tutta la distribuzione della carica, ma **è nota solo la carica libera** in alcuni punti dello spazio **e il potenziale di alcuni corpi conduttori** (**condizioni al contorno**).

Nei punti del campo di un mezzo omogeneo e isotropo, nei quali non è presente alcuna carica libera, ossia: $\rho=0$ l'equazione di Poisson si riduce alla Equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

Con questa equazione è possibile risolvere problemi relativi a campi elettrostatici **dovuti a un insieme di conduttori mantenuti a potenziali diversi (problemi vincolati al contorno)**.

Equazione di Poisson e Laplace

In molti casi semplici si ottiene la soluzione dei problemi elettrostatici attraverso l'integrazione diretta delle equazioni di Laplace o di Poisson. Nei casi più complicati possono essere usati altri metodi di risoluzione.

Teorema della unicità

La soluzione della equazione di Poisson (o per il caso particolare di Laplace) che soddisfa le condizioni al contorno date, è unica.

questo significa che una volta trovato un potenziale che soddisfa l'equazione per le condizioni al contorno assegnate, allora il campo elettrico è univocamente determinato.

Equazione di Poisson e Laplace

Poiché le superfici equipotenziali sono perpendicolari alle superfici equiflusso, si può applicare ai campi il ***principio di dualità***:

Se un campo ha come superfici equipotenzali le superfici che sono equiflusso di un secondo campo, come conseguenza diretta, le equipotenziali di questo secondo campo risultano le equiflusso del primo.

Ciò consente di applicare direttamente i risultati ricavati per una certa configurazione (per esempio con il contorno formato da equipotenziali), ad una configurazione duale (con lo stesso contorno formato da equiflusso).