



# Matematica Discreta

## Foglio 8

**Esercizio 1.** Sia  $B$  una base dello spazio e si considerino le seguenti equazioni cartesiane di rette e piani:

$$\begin{aligned} r: & \begin{cases} -x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \\ s: & \begin{cases} -2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases} \\ \eta: & 2y - x + z = 0 \\ \psi: & 3x + y - 4z = 1 \end{aligned}$$

Si determinino

- (a)  $r \cap s$
- (b)  $\eta \cap r$
- (c)  $\eta \cap s$
- (d)  $\psi \cap r$
- (e)  $\psi \cap s$
- (f)  $\eta \cap \psi \cap s$

**Esercizio 2.** Sia  $B$  una base dello spazio e si considerino i seguenti punti

$$P \equiv (0, 2, 3) \quad Q \equiv (3, -2, -1) \quad R \equiv (4, 5, 2) \quad S \equiv (3, -2, 4)$$

- (a) Si determini l'equazione cartesiana del piano  $\psi$  che contiene i punti  $P$ ,  $Q$  e  $S$ .
- (b) Il punto  $R$  appartiene al piano  $\psi$ ?
- (c) Si determini l'equazione della retta  $r$  che contiene i punti  $Q$  e  $S$ .
- (d) Si determini l'equazione della retta  $s$  che contiene i punti  $P$  e  $R$ .
- (e) Si determini l'intersezione  $r \cap s$ .
- (f) Si determini l'equazione generale dei piani che contengono la retta  $r$ .
- (g) Si determini quale dei piani che contiene la retta  $r$  contiene anche il punto  $S$ .

(continua sul retro)

**Esercizio 3.** Sia  $B$  una base dello spazio e si consideri la retta  $r$  di equazioni cartesiane

$$r: \begin{cases} kx + y + 3z = 3 \\ -x + 5y - z = 1 \end{cases}$$

con  $k \in \mathbb{R}$ .

- (a) Si determini se esiste  $k \in \mathbb{R}$  per cui il punto di coordinate  $(1, 1, 3)$  appartenga alla retta  $r$ . In tal caso, si calcoli un tale  $k$ .
- (b) Si determini se esiste  $k$  tale che la retta  $r$  sia contenuta nel piano  $5x - 4y + 4z = 5$ . In caso positivo, si calcoli un tale  $k$ .
- (c) Si determini se esiste  $k$  tale che la retta  $r$  non interseca la retta  $s$  di equazioni cartesiane

$$s: \begin{cases} -2x + 3y + z = 2 \\ -x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

In caso positivo, si calcoli un tale  $k$ .

- (d) Per il valore di  $k$  ottenuto nella domanda (c), si determini se  $r$  e  $s$  sono parallele o sghembe.

**Esercizio 4.** Per ognuna delle seguenti applicazioni lineari  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (dove  $m$  e  $n$  sono implicitamente determinati dal numero di coordinate) si trovi la matrice associata (rispetto alle basi canoniche in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ ).

(a)  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ z + 2y \end{pmatrix}$

(b)  $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4w + y - 2z \\ 3z - y - x \\ y + 2x \end{pmatrix}$

(c)  $h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y - 2x \\ y + x \\ y - x \\ y \end{pmatrix}$

(d)  $k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -z + 2y + x \\ x + z \end{pmatrix}$

**Esercizio 5.** Si trovino le matrici associate alle composizioni:  $h \circ f$ ,  $g \circ h$ ,  $k \circ h$ ,  $f \circ k$  e  $k \circ g \circ h \circ f$ .

**Esercizio 6.** Per ognuna delle seguenti matrici, si scriva l'espressione generale della trasformazione lineare  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  corrispondente (dove  $m$  e  $n$  sono determinati dal numero di righe e colonne della matrici  $A$ ).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$