



Matematica Discreta

Foglio 11

Esercizio 1. Si consideri l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si dimostri che se un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è una soluzione dell'equazione, allora anche il suo coniugato $\bar{z} \in \mathbb{C}$ è una soluzione della stessa equazione.

Esercizio 2. Data la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

determinare una matrice ortogonale V e una matrice diagonale D tali che $V^T A V = D$.

Esercizio 3. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dimostri che le seguenti condizioni sono equivalenti.

- (a) A ammette come autovalore $\lambda = 0$.
- (b) Il determinante di A è nullo.
- (c) L'applicazione $L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ associata ad A non è iniettiva.
- (d) L'applicazione $L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ associata ad A non è suriettiva.

Esercizio 4. Data la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare una matrice ortogonale V e una matrice diagonale D tali che $V^T A V = D$.

Esercizio 5. Si fissi una base ortonormale B dello spazio. Sia $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortogonale dello spazio tridimensionale e sia A la matrice le cui colonne sono date dalle coordinate dei vettori v_1, v_2 e v_3 della base B' rispetto alla base ortonormale B .

- (a) Supponiamo che $|v_1| = 3, |v_2| = 5, |v_3| = 2$. Si calcoli il determinante di A .
- (b) Più in generale, sia $|v_1| = a, |v_2| = b, |v_3| = c$ per . Si dia una condizione necessaria e sufficiente affinché A sia una matrice ortogonale.

(continua sul retro)

Esercizio 6. Si determini quali delle seguenti matrici sono invertibili, e per ognuna di loro si calcoli la sua inversa (in caso esista) attraverso la matrice dei cofattori associata.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -7 & -6 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Si usi il Teorema di Cramer per risolvere i sistemi di equazioni (a), (b) e (d) dell'Esercizio 3 sul Foglio 7.