



Università degli Studi di Cagliari

UNICA  
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI CAGLIARI

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

**Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2021/22**

# Instabilità delle strutture e calcolo a rottura

> **Lezione 22**

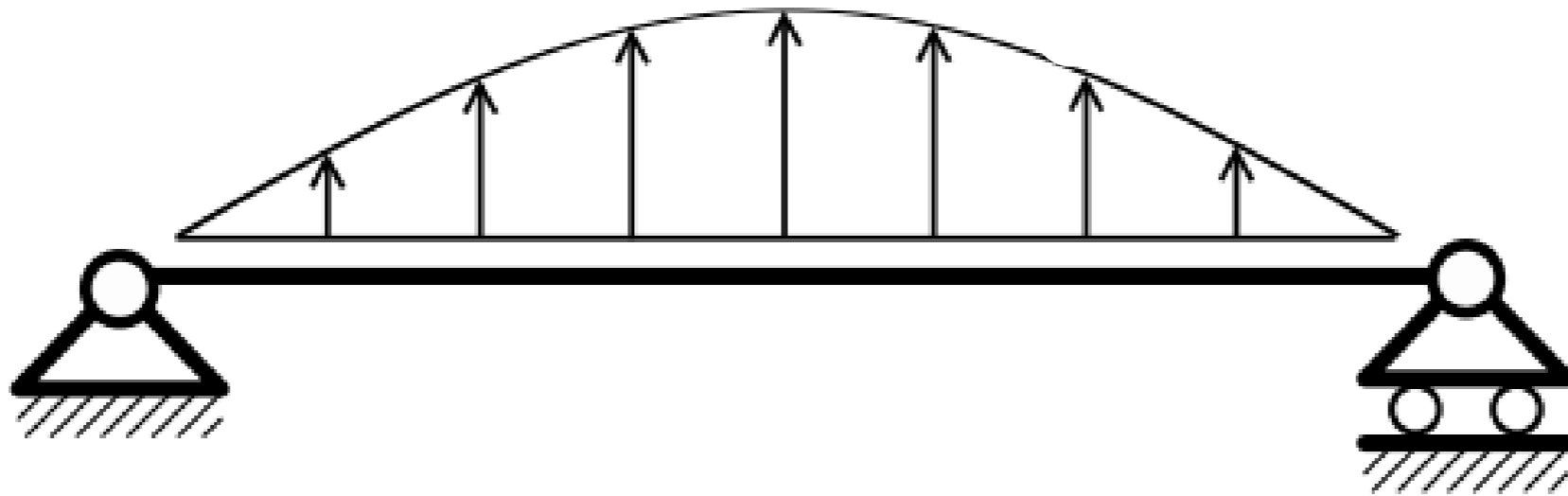
Calcolo a rottura.

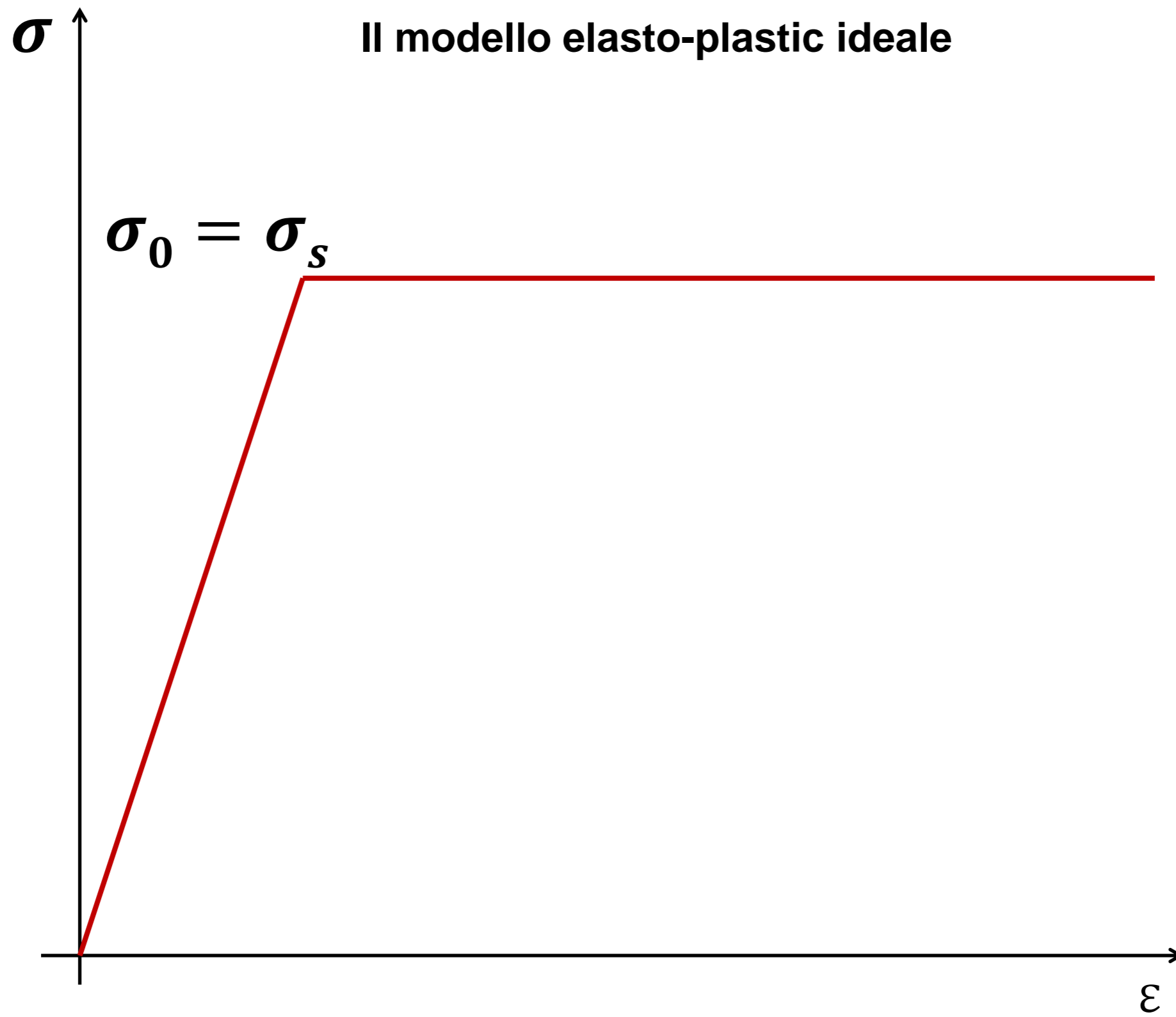
Il collasso plastico di trave inflesse

***Victor Eremeev***

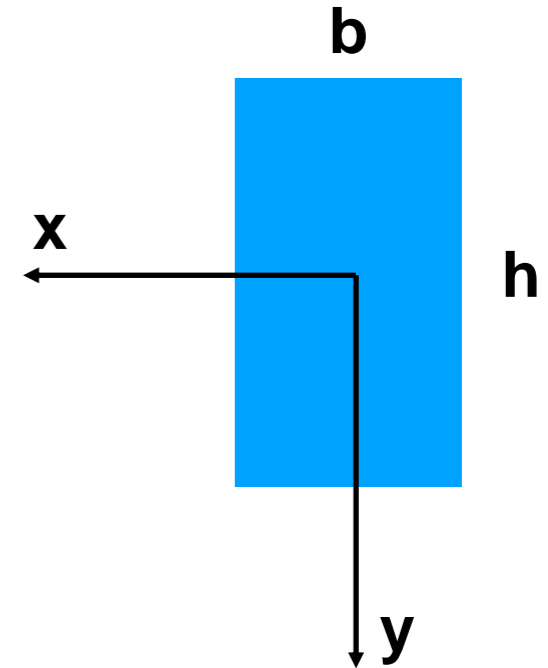
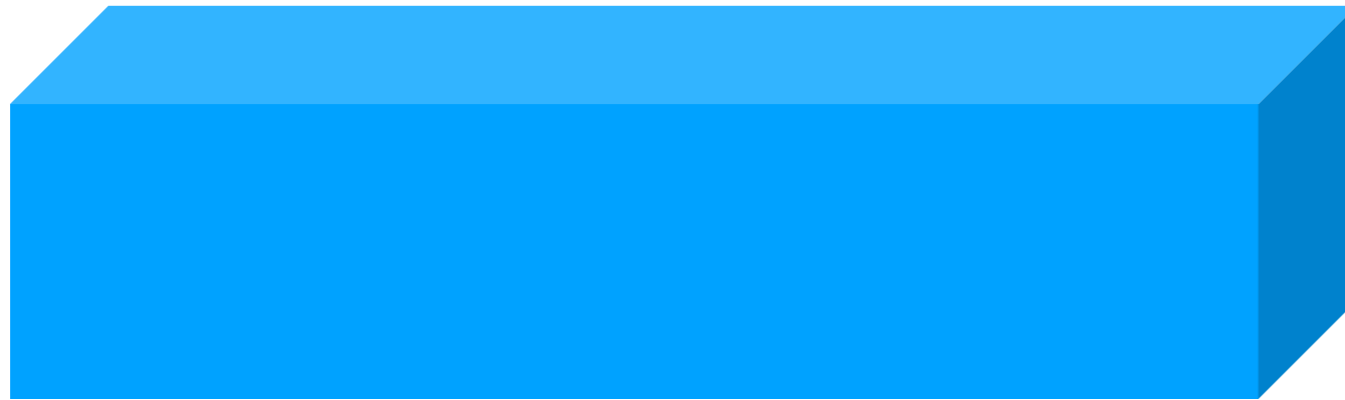
Dr. **Emanuele Reccia** / supporto al Corso  
emanuele.reccia@unica.it

victor.eremeev@unica.it





# La trave elaso-plastica



$$\sigma = E\varepsilon = E\chi y$$

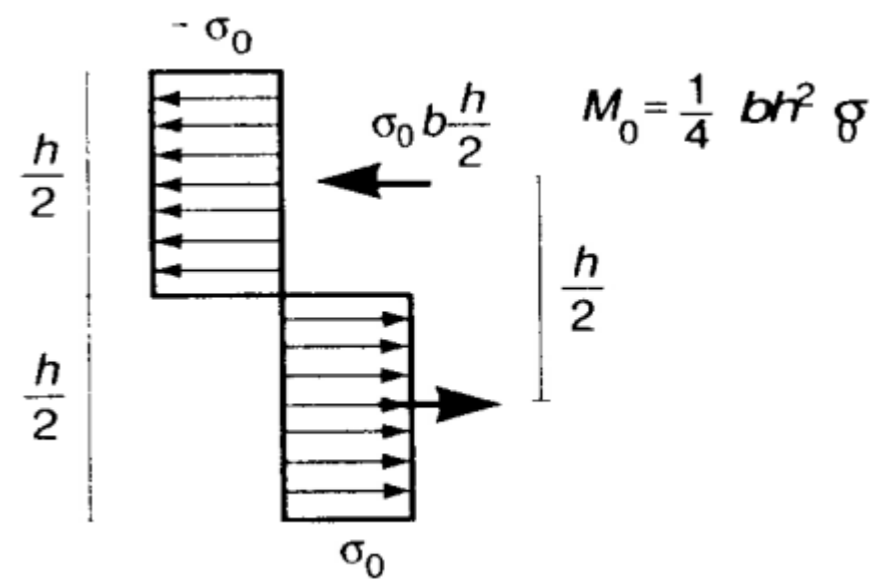
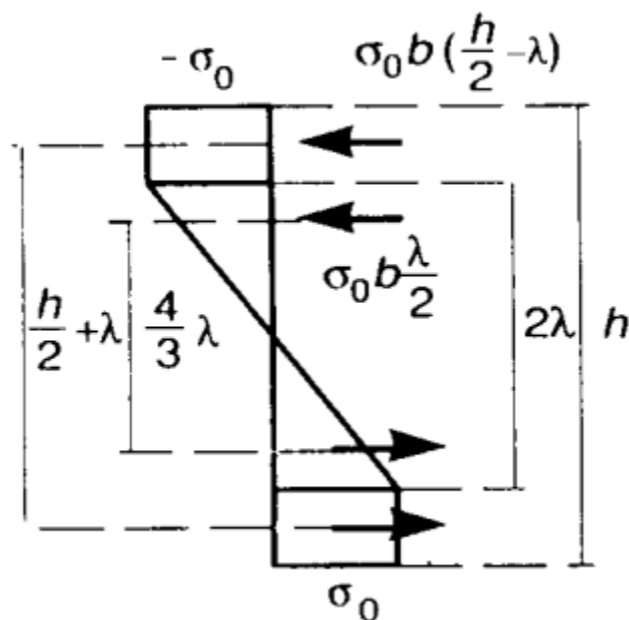
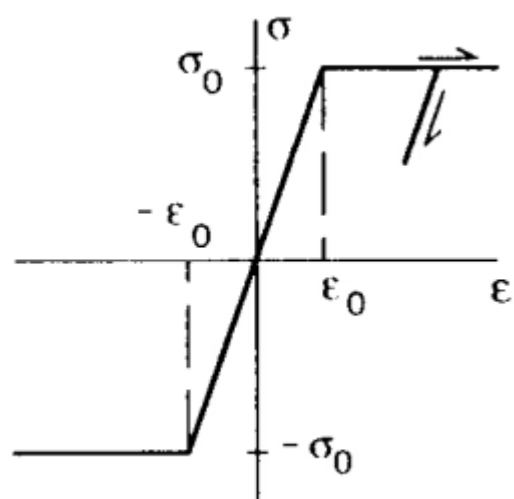
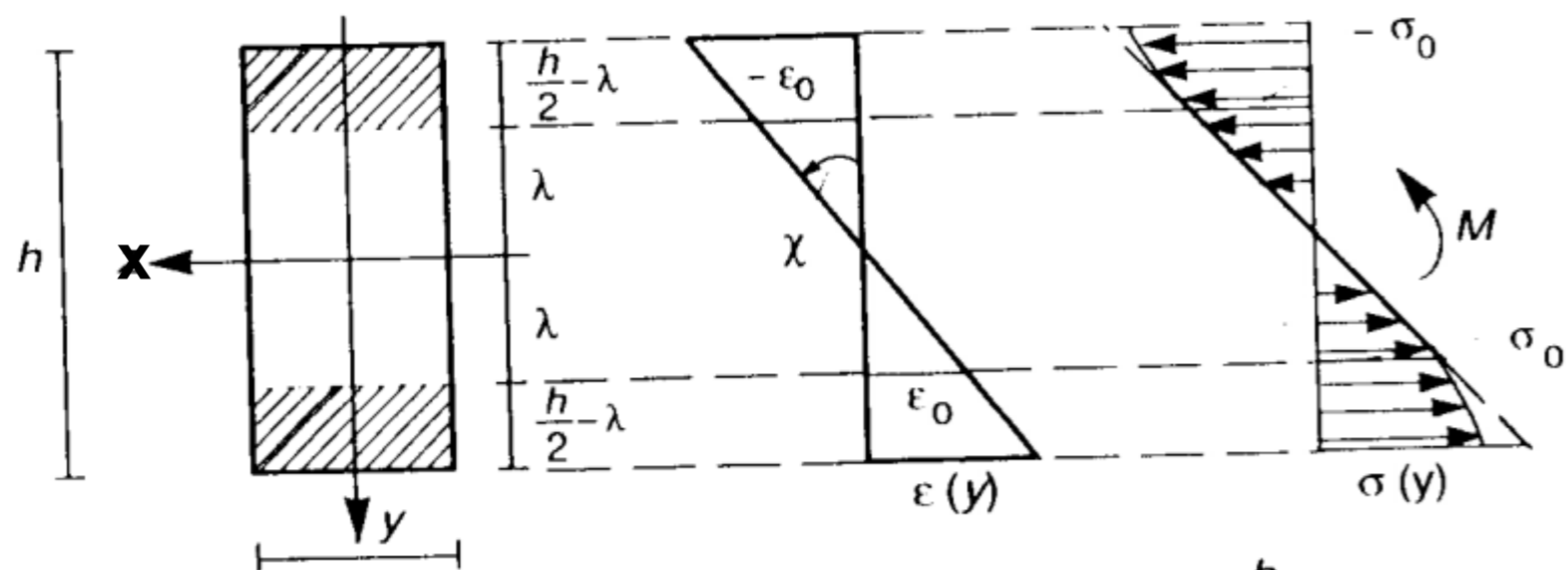
Il momento flettente é  $M = EI\chi$  dove  $\chi$  è la curvatura

Il momento  $M_e$  e la curvatura  $\chi_e$  al limite elastico risultano

$$M_e = \frac{1}{6} bh^2 \sigma_0 \quad \chi_e = \frac{M_e}{EI} = \frac{2}{h} \frac{\sigma_0}{E}$$

$$M = \int_A y \sigma dA$$

$$M = M_e \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right] \quad (\chi \geq \chi_e)$$



$$M_0 = \lim_{\chi \rightarrow \infty} M(\chi) = \frac{3}{2} M_e = \frac{1}{4} bh^2 \sigma_0$$

Il momento limite

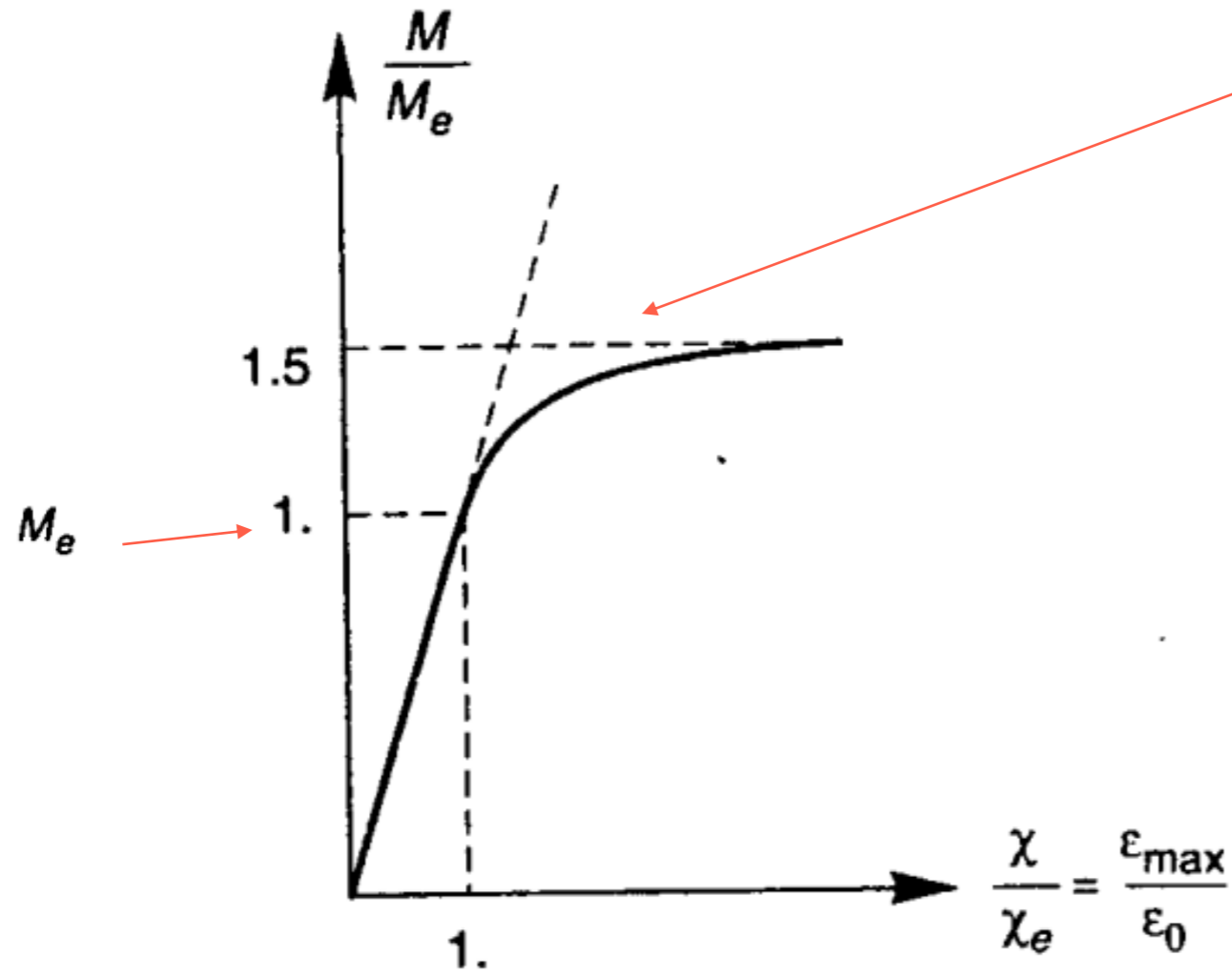


# L'Ipotesi di cerniera plastica

Per una sezione rettangolare  $b \times h$  costituita da materiale idealmente elasto-plastico si è ottenuto il legame momento-curvatura

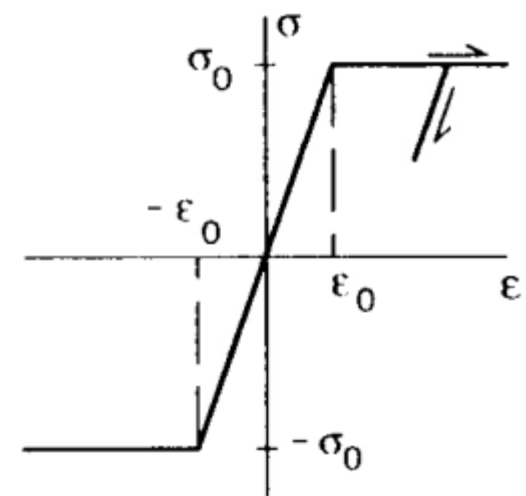
$$M(\chi) = \begin{cases} EI \chi & \text{se } \chi \leq \chi_e \\ M_e \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right] & \text{se } \chi \geq \chi_e \end{cases}$$

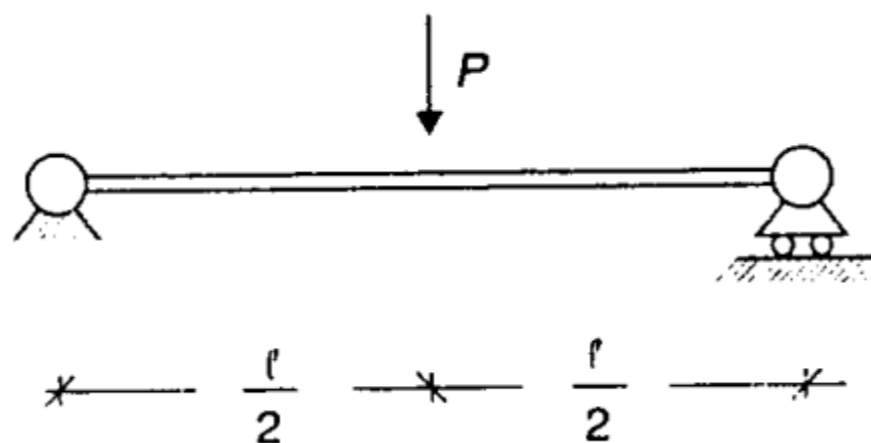
$$M_e = \frac{bh^2}{6} \sigma_0 \qquad \chi_e = \frac{M_e}{EI} = \frac{2}{h} \varepsilon_0$$




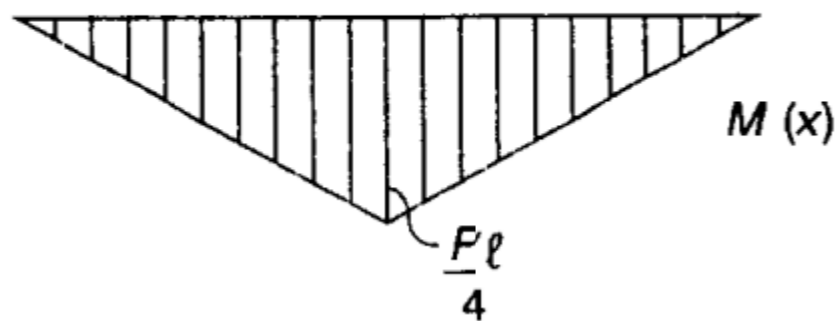
Il momento limite

$$M_0 = \frac{3}{2} M_e = \frac{bh^2}{4} \sigma_0$$



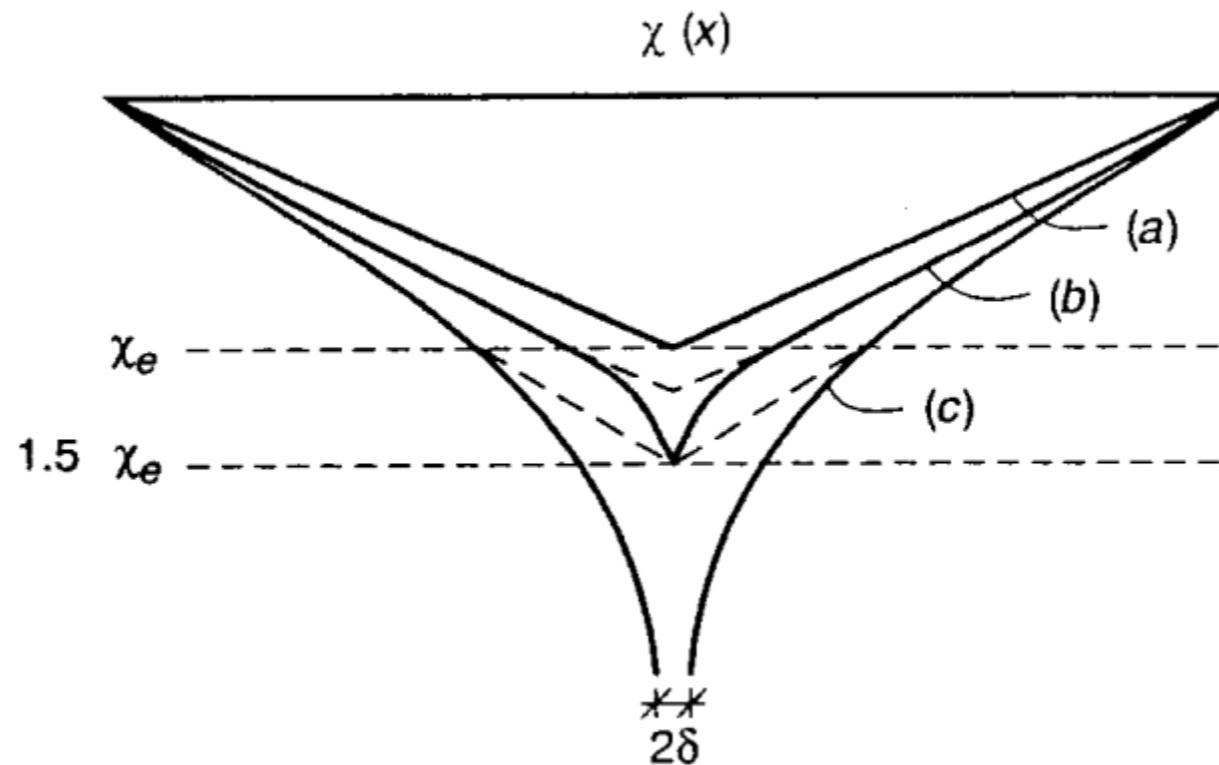


La trave è isostatica. Indipendentemente dal legame costitutivo, il suo diagramma dei momenti è quindi quello illustrato in Figura  che presenta il valore massimo  $M_{\max} = Pl/4$  in mezzaria.



Si possono distinguere le due fasi seguenti.

- 1:  $P \leq \frac{4M_e}{\ell} = \frac{8M_0}{3\ell}$ . In tal caso è  $M_{\max} \leq M_e$  e tutte le sezioni si trovano in campo elastico. In tal caso si ottiene allora  $\chi(x) = \frac{M(x)}{EI}$  e la curvatura presenta un andamento triangolare simile a quello dei momenti (diagramma (a) in Figura 10.1).



- 2:  $\frac{8M_0}{3\ell} < P < \frac{4M_0}{\ell}$ . In un tratto attorno alla mezzaria della trave risulta adesso  $M(x) > M_e$ ; in esso le curvature si discostano dall'andamento triangolare di una quantità pari alla differenza in ascisse tra la curva  $M - \chi$ , a tratto pieno, e la retta  $M = EI\chi$  tratteggiata (diagramma (b) in Figura 10.1). Per  $P \rightarrow 4M_0/\ell$  la curvatura nella sezione di mezzaria diviene sempre più grande e teoricamente illimitata (diagramma (c)). Il valore  $P_L = 4M_0/\ell$  rappresenta il carico di collasso della trave: il momento massimo ha infatti raggiunto il valore limite e non può ulteriormente aumentare, come l'equilibrio richiederebbe per carichi più elevati.

$\frac{\chi}{\chi_e} = \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_0}$	1.	2.	3.	5.	10.
$\frac{M}{M_0}$	.667	.917	.963	.987	.997
$\frac{\chi}{M/EI}$	1.000	1.455	2.077	3.378	6.689

L'ampiezza dell'intervallo in cui le curvature si discostano dall'andamento triangolare elastico è anche notevole. Tuttavia il tratto in cui si riscontrano scostamenti significativi è drasticamente più limitato: curvature più che doppie rispetto a  $M/EI$  richiedono  $M > 0.96 M_0$ . La quantità

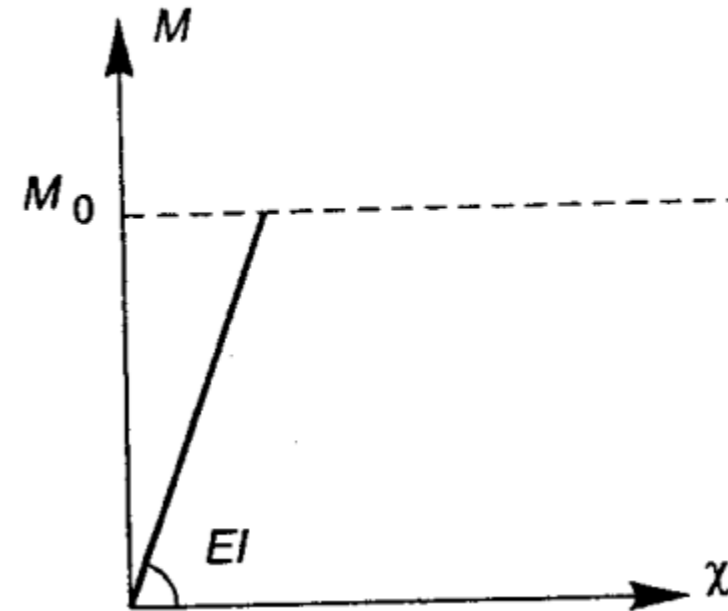
$$\varphi = \int_{l/2 - \delta}^{l/2 + \delta} \chi dx$$

può essere interpretata come una rotazione relativa tra due tratti di trave che si mantengono elastici: per  $M = M_0$ , il mutuo incastro tra i due tratti viene sostituito da una cerniera.

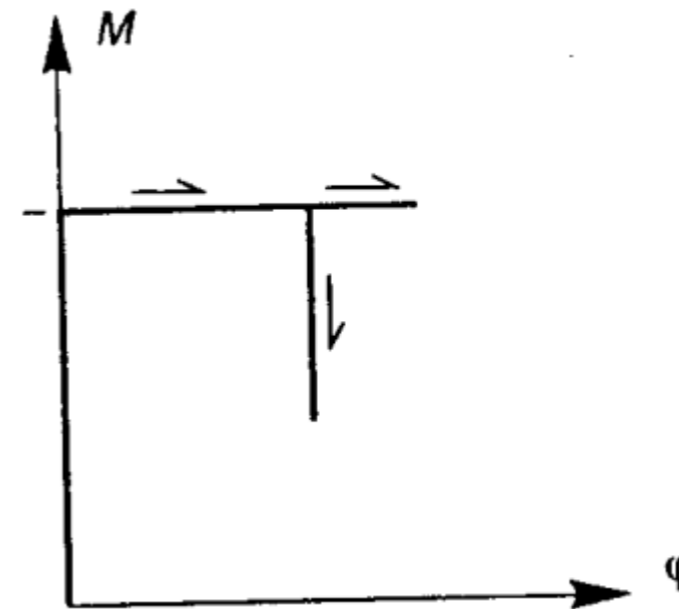
# Il modello di cerniera plastica

Questa osservazione è alla base dell'idealizzazione del comportamento flessionale nota come *cerniera plastica*

Il legame momento-curvatura oppure



Il legame momento rotazione



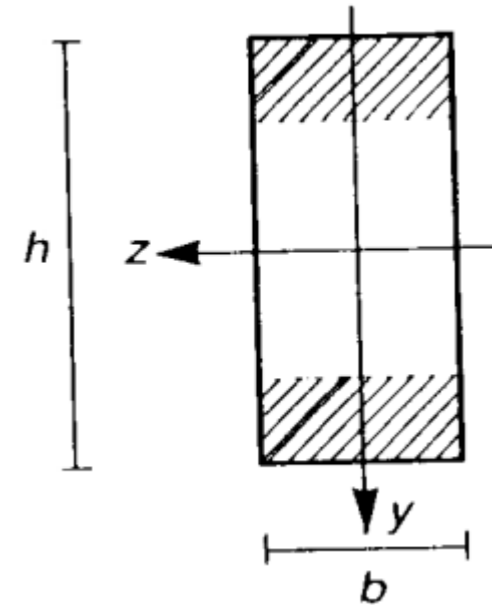
# Il modello di cerniera plastica

Rispetto a una cerniera strutturale, la cerniera plastica presenta due differenze. Pur consentendo rotazioni relativi tra i due tratti che congiunge, essa trasmette un momento flettente *costante*, pari a  $\pm M_0$ ; essa è inoltre una cerniera *unidirezionale*, che può ruotare solo nel verso di plasticizzazione, vale a dire compatibilmente con il segno del momento flettente.

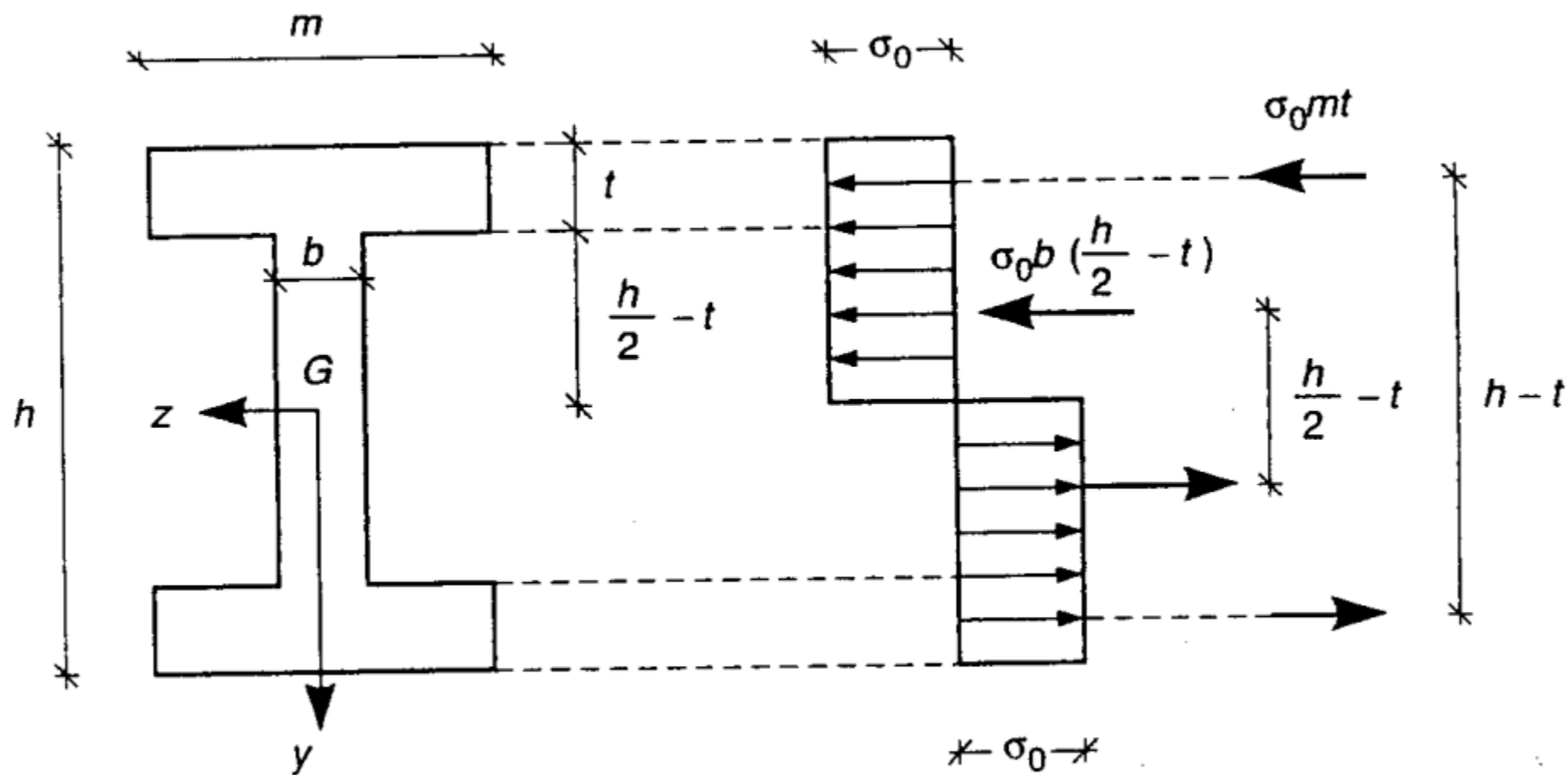
Il modello a cerniera plastica descrive il comportamento flessionale della sezione in termini della sola *rigidità elastica*  $EI$  e del suo *momento limite*  $M_0$ , senza necessario definire la curva momento-curvatura. Questa non è solamente una semplificazione...

# Il momento limite

$$M_0 = \frac{bh^2}{4} \sigma_0$$



$$M_0 = \sigma_0 m t (h - t) + \sigma_0 b \left( \frac{h}{2} - t \right)^2 = \sigma_0 \left[ m t (h - t) + b \left( \frac{h^2}{4} - h t + t^2 \right) \right]$$



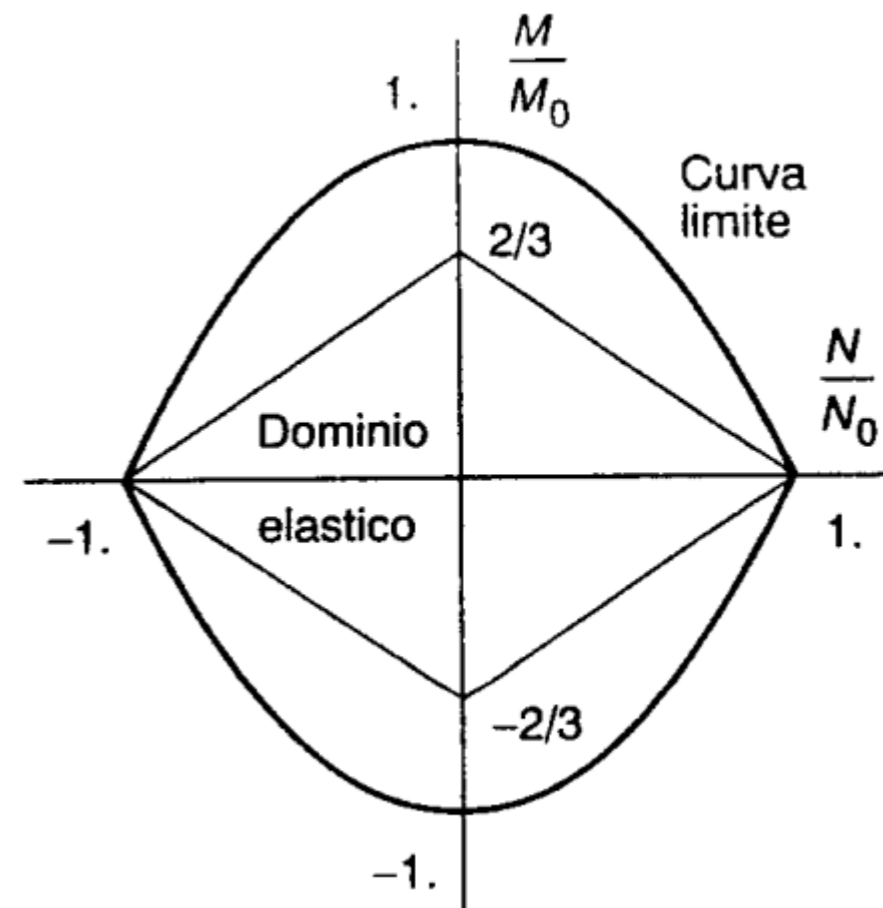
# Sollecitazione composta

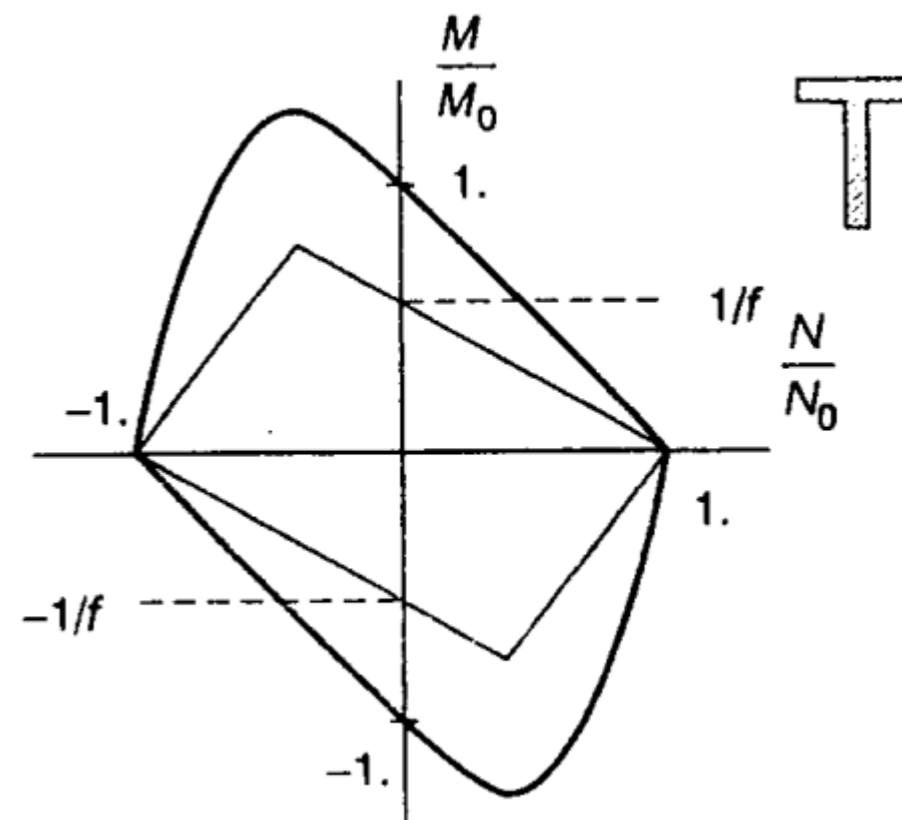
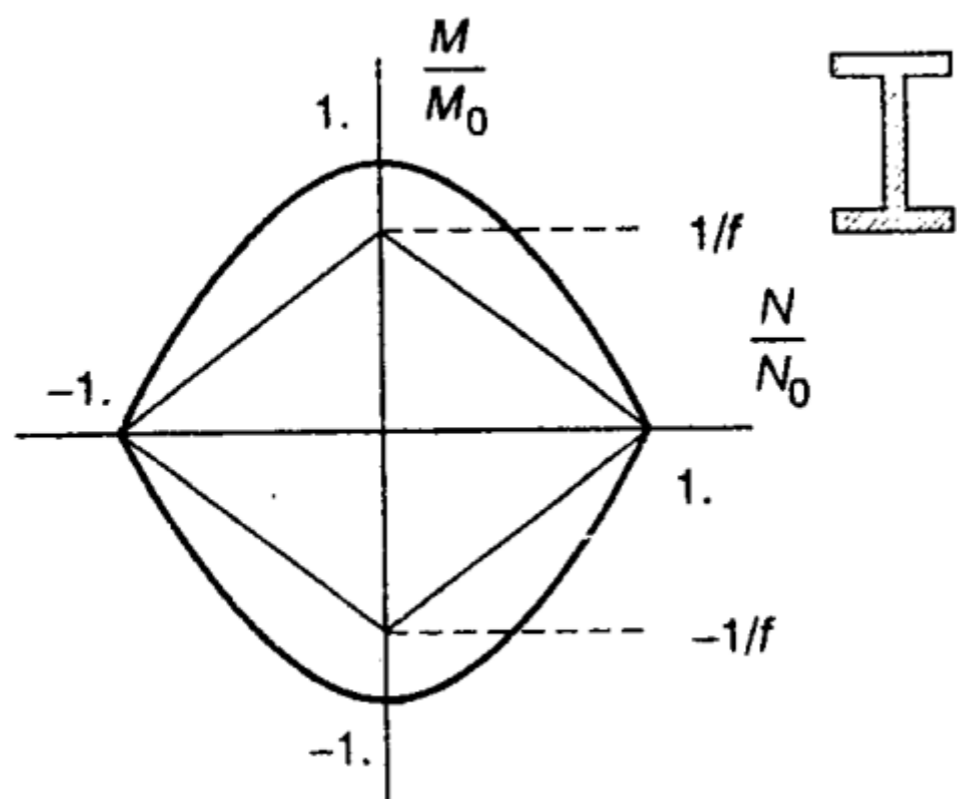
$$\pm \frac{N}{N_e} \pm \frac{M}{M_e} \leq 1$$

$$N_0 = N_e = bh\sigma_0 \quad M_0 = \frac{1}{4} bh^2 \sigma_0$$

$$M = M_0 \left[ 1 - \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 \right]$$

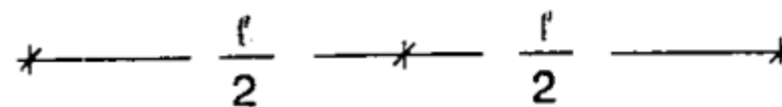
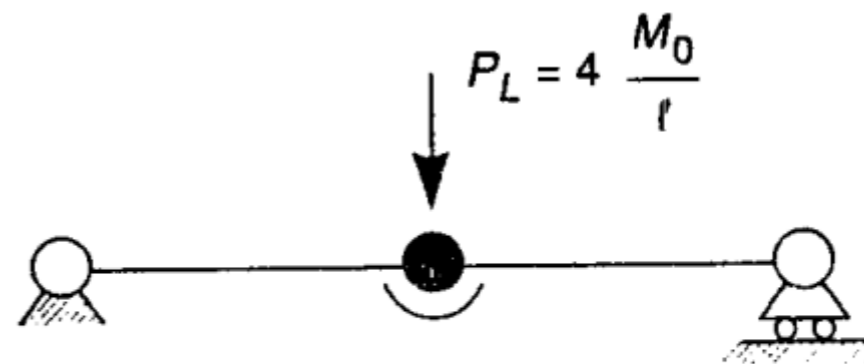
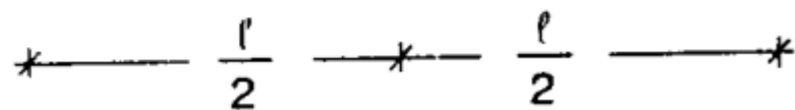
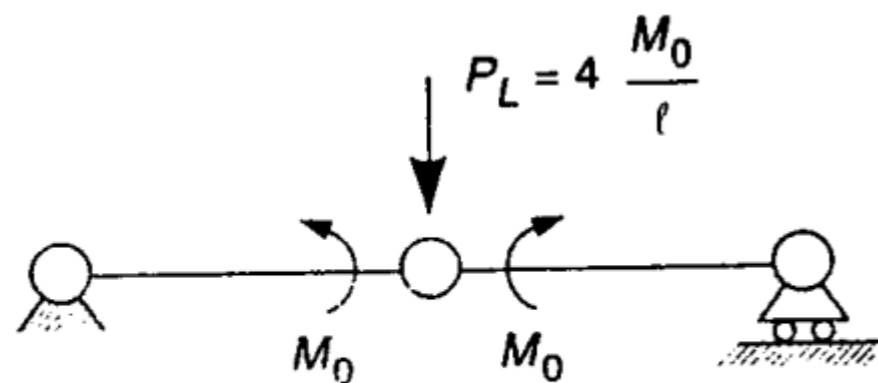
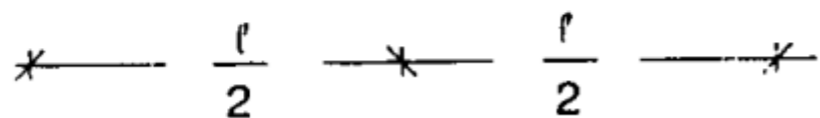
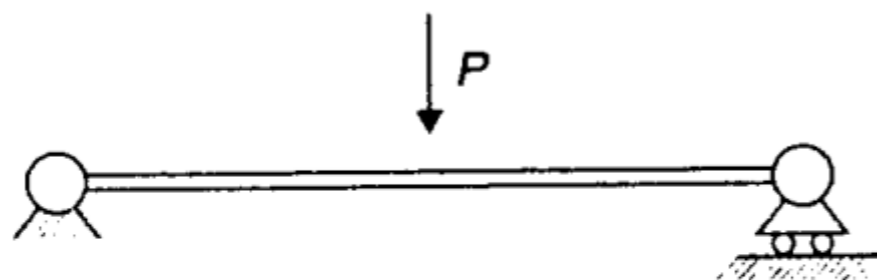
$$\pm \frac{M}{M_0} + \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 = 1$$





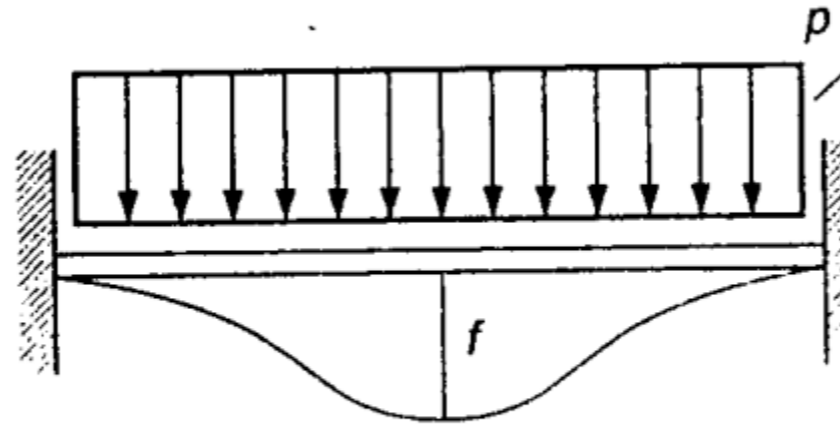
# Esempio 1

$EI = \text{cost}$ ,  $M_0 = \text{cost}$





## Esempio 2



$$EI = \text{cost}, M_0 = \text{cost}$$