Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura
Magistrale Ingegneria Civile 2 anno **a.a. 2021/22**

Instabilità delle strutture e calcolo a rottura

> Lezione 21
Calcolo a rottura

Victor Eremeev

victor.eremeev@unica.it

Dr. **Emanuele Reccia** / supporto al Corso
emanuele.reccia@unica.it

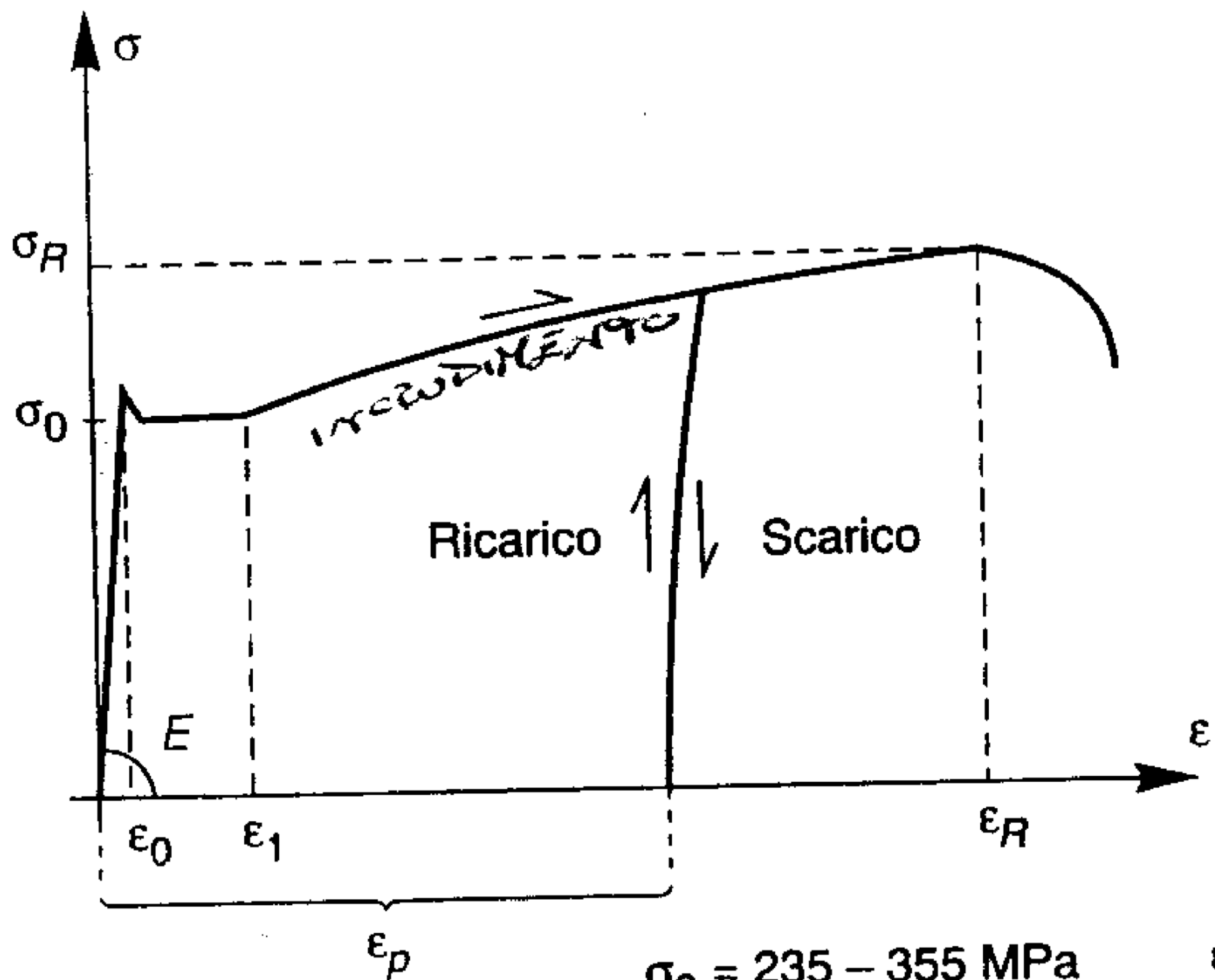
IL COMPORTAMENTO IDEALMENTE PLASTICO

La resistenza di qualunque materiale è inevitabilmente limitata, in quanto esiste un livello di sforzo che comunque non può essere superato. Ne consegue che pure limitata è la *capacità portante* di una struttura, vale a dire l'entità dei carichi che essa è in grado di reggere. La valutazione della capacità portante è un problema di importanza evidente, che non può essere affrontato in ambito elastico-lineare perché nessun materiale si mantiene tale fino all'esaurimento delle sue risorse. Sono peraltro disponibili modelli costitutivi in grado di rappresentare aspetti anelastici del comportamento ed è quindi in linea di principio possibile seguire l'evoluzione della struttura fino al raggiungimento di una situazione di crisi. Tale procedimento è però solo parzialmente attendibile, in quanto la soluzione spesso dipende non solo dal valore finale del carico ma anche dalla storia seguita per raggiungerlo. Il risultato è quindi a rigore valido limitatamente alla particolare storia ipotizzata nel calcolo.

Esistono tuttavia materiali che presentano una notevole *duttilità*. Anche se il livello di sforzo non può superare una determinata soglia, essi possono deformarsi in misura cospicua prima di giungere a rottura. In tal caso la crisi della struttura non è di regola associata al cedimento di alcuni elementi per rottura del materiale di cui sono costituiti, ma piuttosto all'impossibilità di assicurare l'equilibrio senza eccedere il livello di sforzo ammissibile. Tale modalità di crisi è nota come *collasso plastico* e il carico sotto cui si verifica come *carico di collasso*. Sotto ipotesi del tutto ragionevoli in molte situazioni reali, *il valore del carico di collasso risulta indipendente dalla storia di carico*. Questa notevole circostanza rende possibile la sua valutazione diretta, che costituisce l'oggetto del *calcolo a rottura* (o *analisi limite*), uno dei più significativi capitoli della meccanica delle strutture.

Le ipotesi necessarie sono semplicemente quelle di piccoli spostamenti, che deve essere applicabile nella sua interezza, e di *plasticità ideale* (o *perfetta*).

Le principali caratteristiche del comportamento di un materiale duttile possono essere visualizzate da una curva uniassiale, come quella di trazione illustrata in Figura



acciai
Fe E 235-355

$\sigma_0 = 235 - 355$ MPa

$\sigma_R = 360 - 510$ MPa

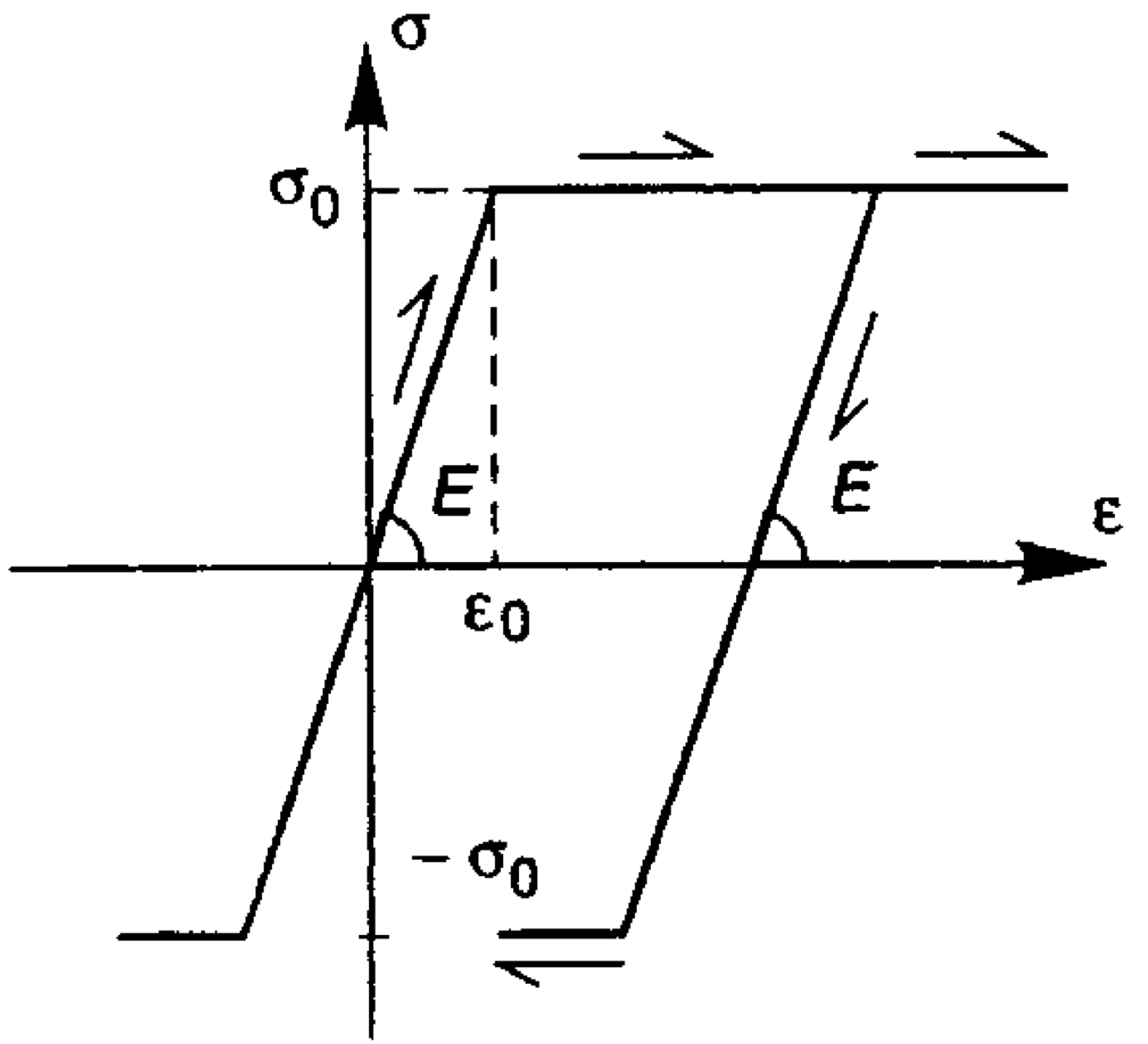
$\varepsilon_0 = \sigma_0/E \cong 0.1 - 0.2\%$

$\varepsilon_1 \cong 2\%$

$\varepsilon_R = 20 - 40\%$

Esiste una fase elastica ben marcata, in cui è applicabile il legame lineare $\sigma = E\varepsilon$. Essa è relativa all'intervallo $-\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, dove ε_0 è di regola lo 0.1-0.2%; il corrispondente sforzo $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ identifica il *limite di snervamento*. Tale fase è seguita da un pianerottolo pressoché orizzontale, dove il materiale fluisce a sforzo costante $\sigma \simeq \sigma_0$ fino a deformazioni almeno di un ordine di grandezza superiori a ε_0. Si riscontra poi un recupero di rigidezza (*incrudimento*), governato da un *modulo tangente* E_t variabile con la deformazione ma sempre sensibilmente minore del modulo elastico iniziale E. Ciononostante, questa fase comporta significativi incrementi di sforzo rispetto al valore di snervamento, in quanto il provino giunge a rottura per deformazioni molto elevate. Allo scarico, la deformazione recuperata è circa pari a σ/E; la parte restante (ε_p in figura) rappresenta un contributo permanente, o *plastico*. In caso di "ricarico", il materiale risponde in modo quasi elastico fino al raggiungimento della curva relativa al materiale vergine, che viene poi ripercorsa fino a rottura. Non tutti i valori riportati sul grafico sono egualmente attendibili: se i dati sperimentali relativi al modulo elastico iniziale E e al limite di snervamento σ_0 risultano, per un determinato tipo di acciaio, abbastanza poco dispersi, non altrettanto si può dire della lunghezza del pianerottolo orizzontale e della successiva curva che descrive la fase di incrudimento. È comunque assicurata una notevole *duttilità*, nel senso che la deformazione a rottura è tipicamente circa cento volte quella al limite elastico.

Il modello *elasto-plastico ideale*



Il modello *elasto-plastico ideale*

1. Esiste un *dominio elastico* di ampiezza costante, indipendente dalla storia di deformazione, definito dalle diseguaglianze

$$-\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$$

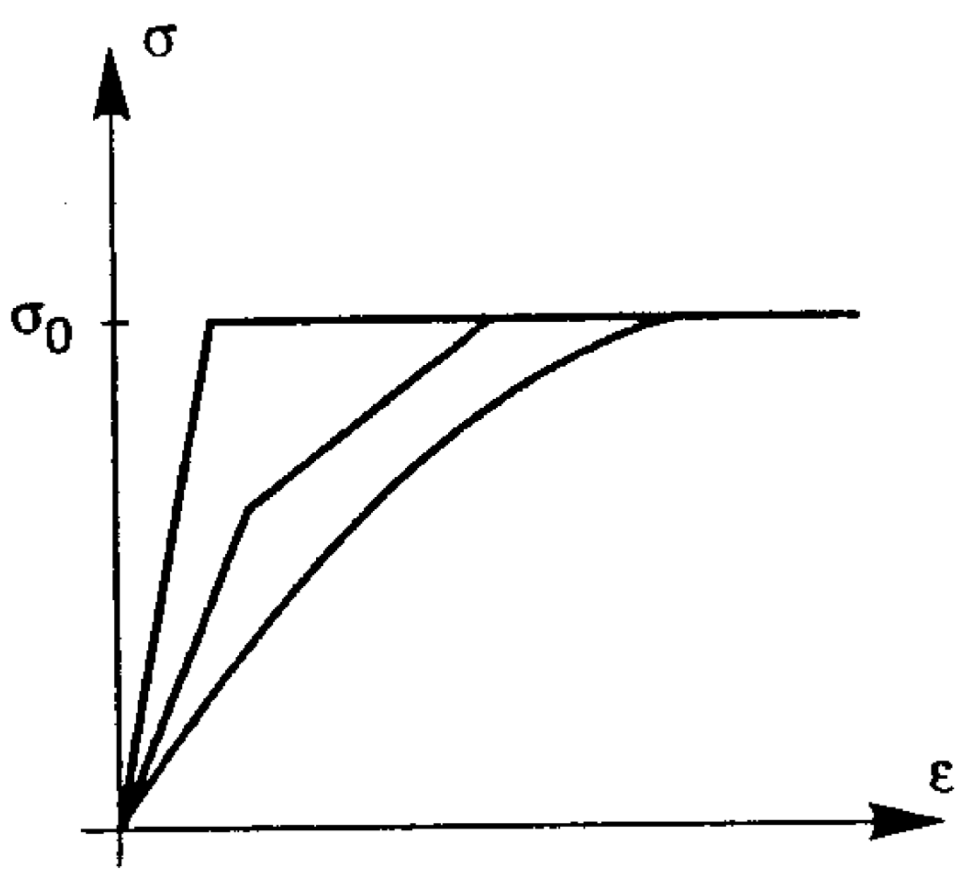
   Il valore σ_0, di regola identificato con il limite di snervamento del materiale, rappresenta anche la sua resistenza ultima; si suppone cioè che il materiale sia incapace si sopportare sforzi $|\sigma| > \sigma_0$.

2. Il materiale presenta *duttilità illimitata*. Si ipotizza cioè che esso sia in grado di subire deformazioni di qualsiasi entità per $|\sigma| = \sigma_0$, purché nel verso di plasticizzazione.

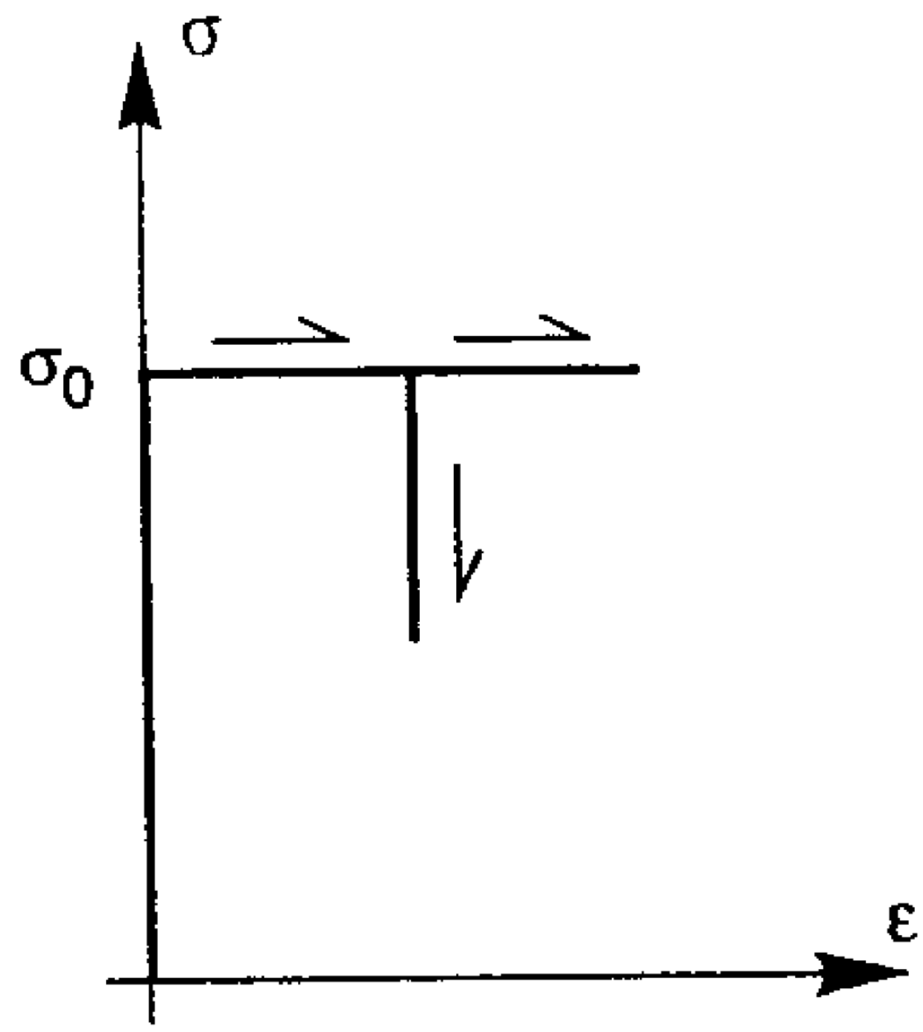
3. Il comportamento è *irreversibile*. In fase di scarico la risposta è comunque governata dal modulo elastico iniziale E.

$$- \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$$

Ai fini del calcolo a rottura sono peraltro sufficienti informazioni ancora più ridotte. La doppia diseguaglianza definisce solo un *intervallo ammissibile* per lo sforzo e non è necessario che al suo interno il comportamento sia effettivamente elastico-lineare. Non solo il valore di E si rivelerà ininfluente, ma tali risulteranno anche eventuali deviazioni dalla linearità nel comportamento per $|\sigma| < \sigma_0$. I comportamenti in Figura che tutti hanno in comune il valore di σ_0, sono cioè equivalenti. È invece essenziale che la duttilità sia illimitata e che il comportamento sia irreversibile; ciò significa che per $|\sigma| = \sigma_0$ sono possibili deformazioni plastiche di entità arbitraria, ma solo nel verso concorde con quello di plasticizzazione. In effetti, il carico di collasso può essere calcolato idealizzando il comportamento con il legame *rigido-idealmente plastico*



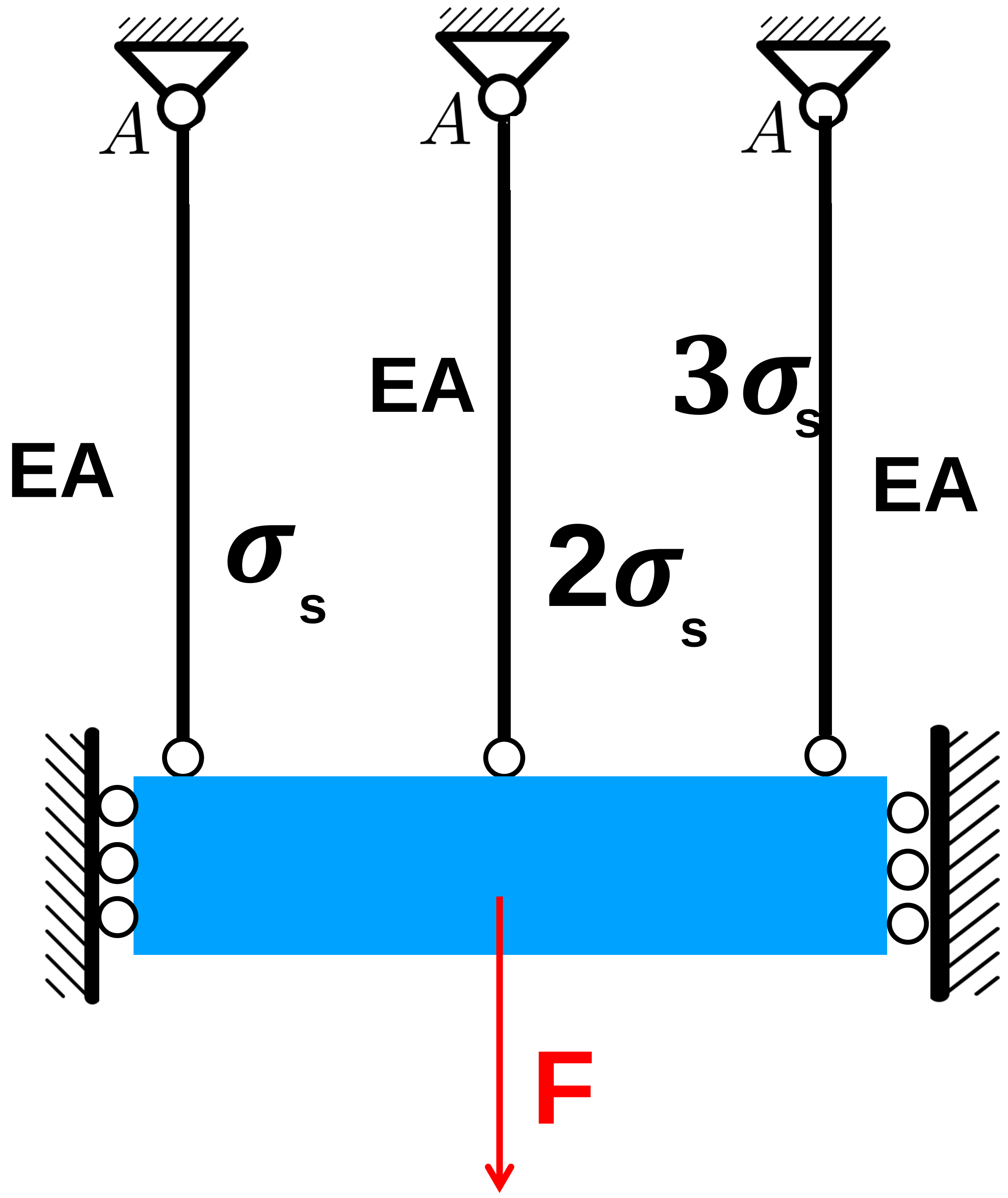
il legame *rigido-idealmente plastico*

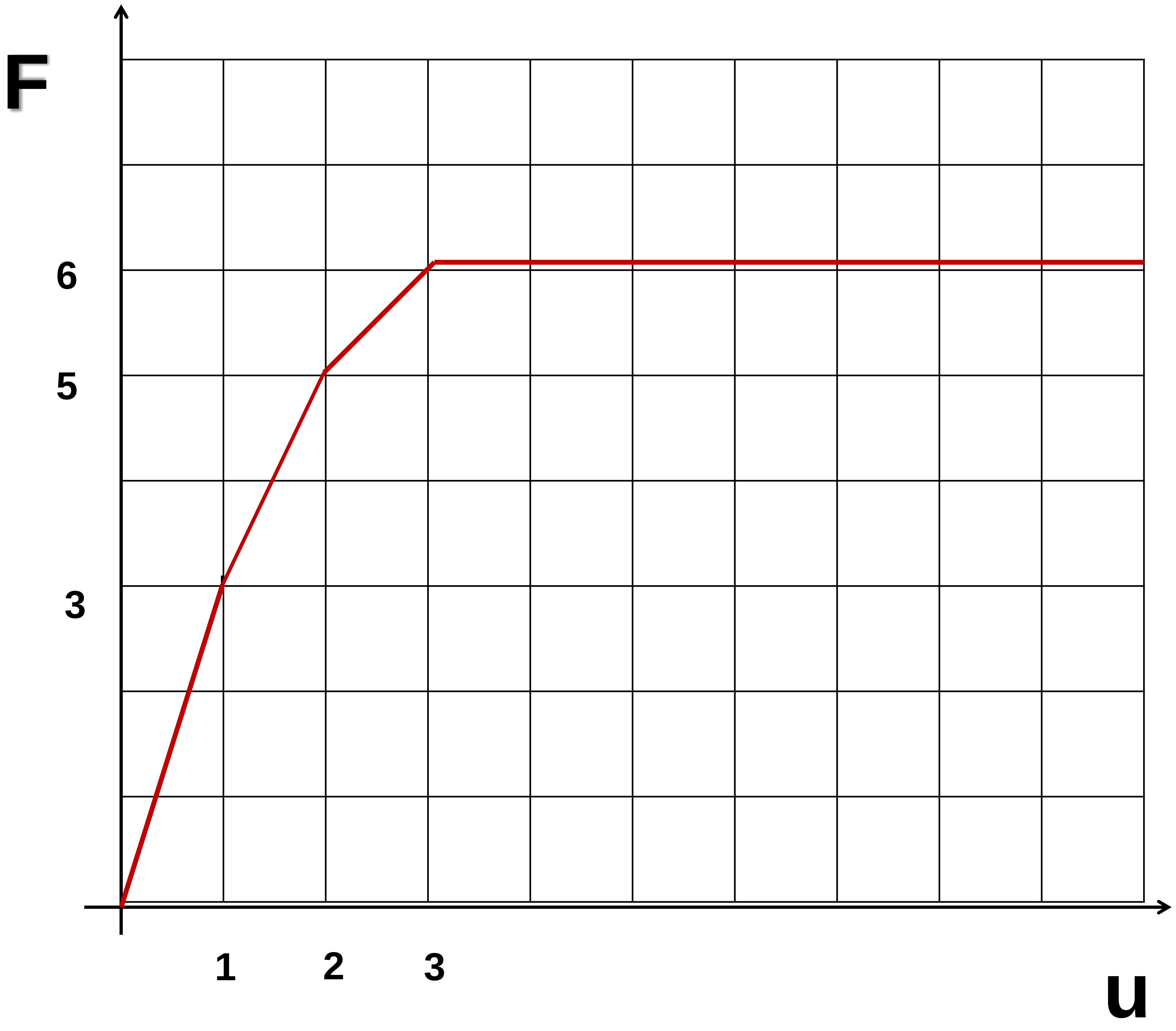


IL COLLASSO PLASTICO

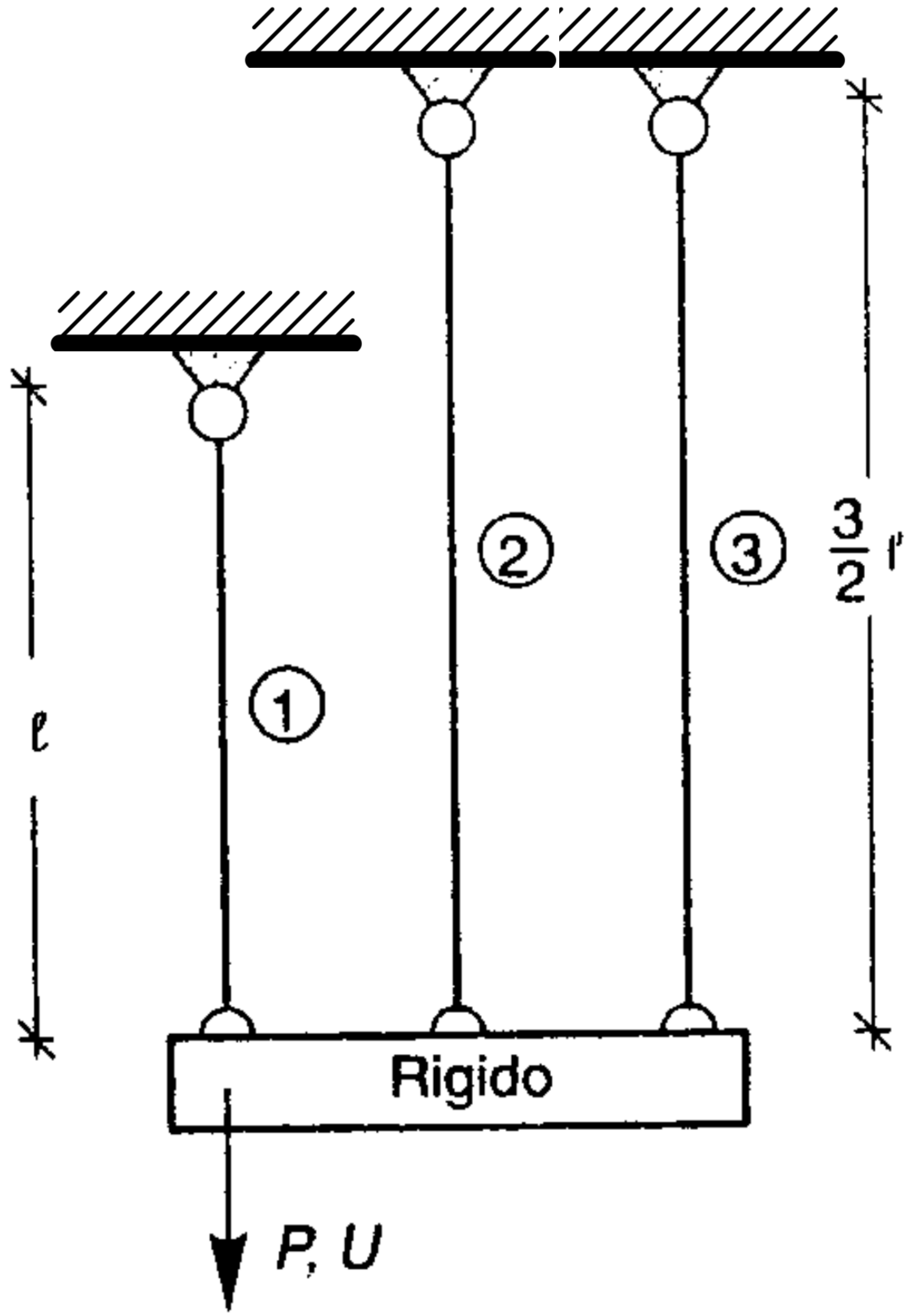
ESEMPIO

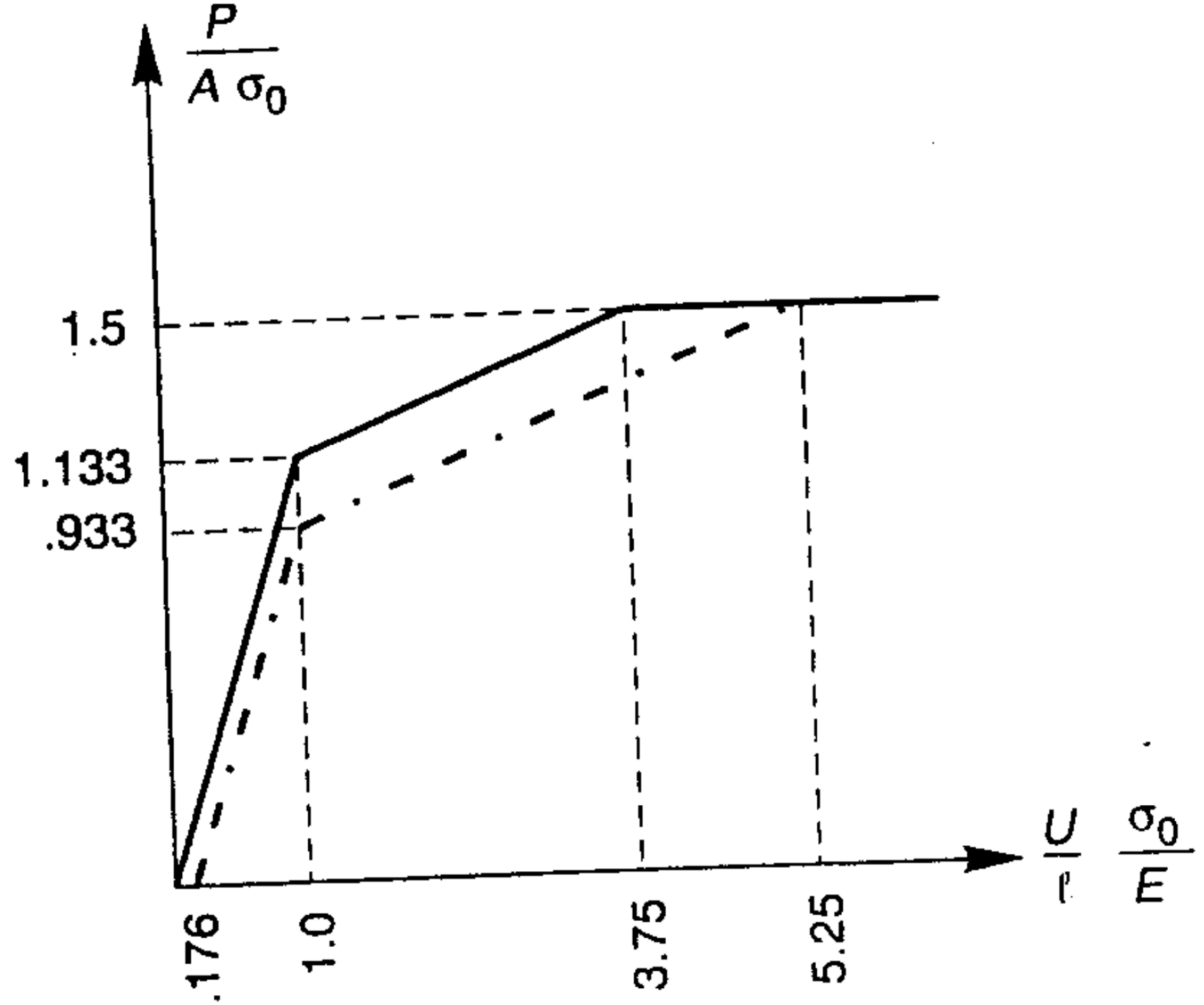
Analisi elasto-plastico al passo (step by step) di una struttura iperstatica costituita da 3 pendoli




F
6
5
3
1
2
3
u

ESEMPIO





$\frac{P}{A\,\sigma_0}$
1.5
1.133
.933
$\frac{U}{l}\;\frac{\sigma_0}{E}$
.176
1.0
3.75
5.25

Pur nella sua semplicità, l'esempio mette in luce le caratteristiche essenziali del collasso plastico. Una volta raggiunto in un punto il limite di snervamento, il livello tensionale non può aumentare ma la duttilità del materiale permette di *ridistribuire gli sforzi*, coinvolgendo così zone che posseggono ulteriori risorse. Le condizioni di equilibrio pongono peraltro un limite alle possibilità di ridistribuzione; al crescere del carico viene inevitabilmente raggiunta una situazione in cui l'equilibrio non può instaurarsi se non al prezzo di sforzi che eccedono in parte della struttura il limite del dominio

$$\varphi_\alpha(\sigma_{ij}) \leqslant 0, \quad \alpha = 1, \ldots, Y$$

ESEMPIO

Analisi elasto-plastico al passo (step by step) di una struttura iperstatica costituita da 4 pendoli