



# Matematica Discreta

## Foglio 10

**Esercizio 1.** Siano  $k$  e  $m$  numeri interi e sia  $A_{(m,k)}$  la matrice a due parametri

$$A_{(m,k)} = \begin{pmatrix} 5 & k & -4 \\ 7 & m & k - 2m \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Si determinino tutte le coppie  $(m, k)$  tali che la matrice  $A_{(m,k)}$  non è invertibile. In questi casi, qual è il rango di  $A_{(m,k)}$ ?
- (b) Per  $(m, k) = (-2, 5)$  si trovi la matrice inversa.
- (c) Si trovi l'espressione generale della funzione lineare inversa di quella associata alla matrice  $A_{(-2,5)}$ .

**Esercizio 2.** Una matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  di entrate  $a_{ij}$  si dice **triangolare superiore** se per ogni  $i > j$  si ha  $a_{ij} = 0$ .

- (a) Qual è il numero massimo di entrate non nulle che  $A$  può avere?
- (b) Si dimostri per induzione su  $n$  che il determinante di  $A$  coincide col prodotto degli elementi sulla diagonale di  $A$ , cioè

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

**Esercizio 3.** Si determini quali delle seguenti matrici sono invertibili, e per ognuna di loro si calcoli la sua inversa (in caso esista) attraverso la matrice dei cofattori associata.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -7 & -6 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 4.** Si usi il Teorema di Cramer per risolvere i sistemi di equazioni (a), (b) e (d) dell'Esercizio 3 sul Foglio 7.

(continua sul retro)

**Esercizio 5.** Sia  $A \in M_3(\mathbb{R})$  e sia  $B$  una matrice ottenuta da  $A$  attraverso le seguenti operazioni elementari (nell'ordine indicato):

$$\begin{aligned} R_2 &\longrightarrow R_2 + 3R_1 \\ R_3 &\longrightarrow R_3 - R_1 \\ R_2 &\longrightarrow \frac{1}{2}R_2 \\ R_3 &\longrightarrow R_3 - 3R_2 \end{aligned}$$

(a) Si determini la relazione tra  $\det(A)$  e  $\det(B)$ .

(b) Supponiamo ora che

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Si calcolino  $\det(A)$  e  $\det(B)$ .

(ii) Si determini la matrice  $A$ .

(iii) Si calcolino gli autovalori della matrice  $A$ . In che relazione sono questi con gli autovalori della matrice  $B$ ?

**Esercizio 6.** Si risolvano su  $\mathbb{C}$  le seguenti equazioni lineari.

- $(1 + i)z = 3i$ ;
- $(5 + 2i)z + (2 + i) = -4 - i$ ;
- $(2 + i)^5 z = i$ ;
- $i^{137}z + (3 - i) = 4 - 2i$ ;
- $i^{2021}z = 20 + 20i$ .

**Esercizio 7.** Si determini se le seguenti matrici sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, si trovi una base di autovettori.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$