



# Matematica Discreta

## Foglio 9

**Esercizio 1.** Si scrivano tutte le permutazioni di  $S_4$  come prodotto di cicli disgiunti. Quali di queste permutazioni sono pari e quali sono dispari?

**Esercizio 2.** Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Prendendo le lettere  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , quante parole (con possibili ripetizioni) di due lettere si possono scrivere?
- Per quante di queste parole il corrispondente prodotto di matrici è ben definito?
- Si calcolino tutti prodotti di matrici dati dalle parole ottenute in (b).
- Si scrivano le espressioni delle trasformazioni lineari associate alle matrici ottenute in (c).

**Esercizio 3.** 5. Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ , cioè  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . La matrice  $A$  si dice una **matrice diagonale** se le sue entrate  $a_{ij}$  sono zero quando  $i \neq j$ .

- Si dimostri che se  $A$  è diagonale, allora il rango di  $A$  coincide col numero di entrate diverse da zero.
- Si concluda che se  $A$  è diagonale, allora  $A$  è invertibile se e solo se la diagonale principale di  $A$  (cioè, le entrate  $a_{ii}$  per  $i$  fra 1 e  $n$ ) sono diverse da zero.
- Si dimostri che il prodotto di due matrici diagonali è diagonale.
- Supponiamo che  $A$  sia una matrice diagonale invertibile. Si dimostri che la sua matrice inversa è la matrice diagonale  $B \in M_n(\mathbb{K})$ , tale che le sue entrate soddisfano  $b_{ii} = a_{ii}^{-1}$ .

**Esercizio 4.** Per  $k \in \mathbb{R}$ , si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ k & 2 \end{pmatrix}.$$

- Si determini per quali valori di  $k$  la matrice  $A$  non è invertibile.
- Per  $k = 0$ , si calcoli la matrice inversa di  $A$ .

(continua sul retro)

**Esercizio 5.** Per ognuna delle seguenti matrici si determini se la funzione lineare associata è iniettiva, suriettiva o biiettiva.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad F = BC \quad G = CB \quad H = DB \quad J = BD \quad K = E^2$$

**Esercizio 6.** Si considerino le matrici dell'Esercizio 5.

- (a) Si calcoli il determinante di tutte le matrici quadrate.
- (b) Si calcoli l'inversa di tutte le matrici invertibili.