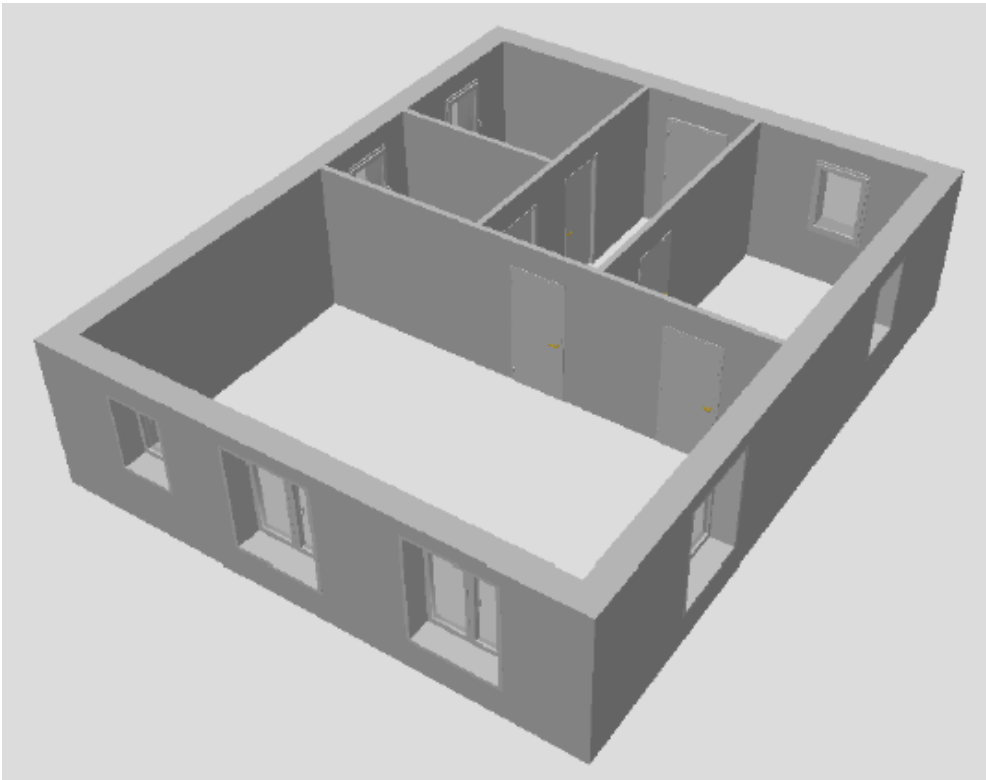


Controllo dei sistemi energetici

Modello termico dinamico di un edificio

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Modelliamo la dinamica termica di un appartamento equipaggiato da un sistema di climatizzazione



Vista 3D

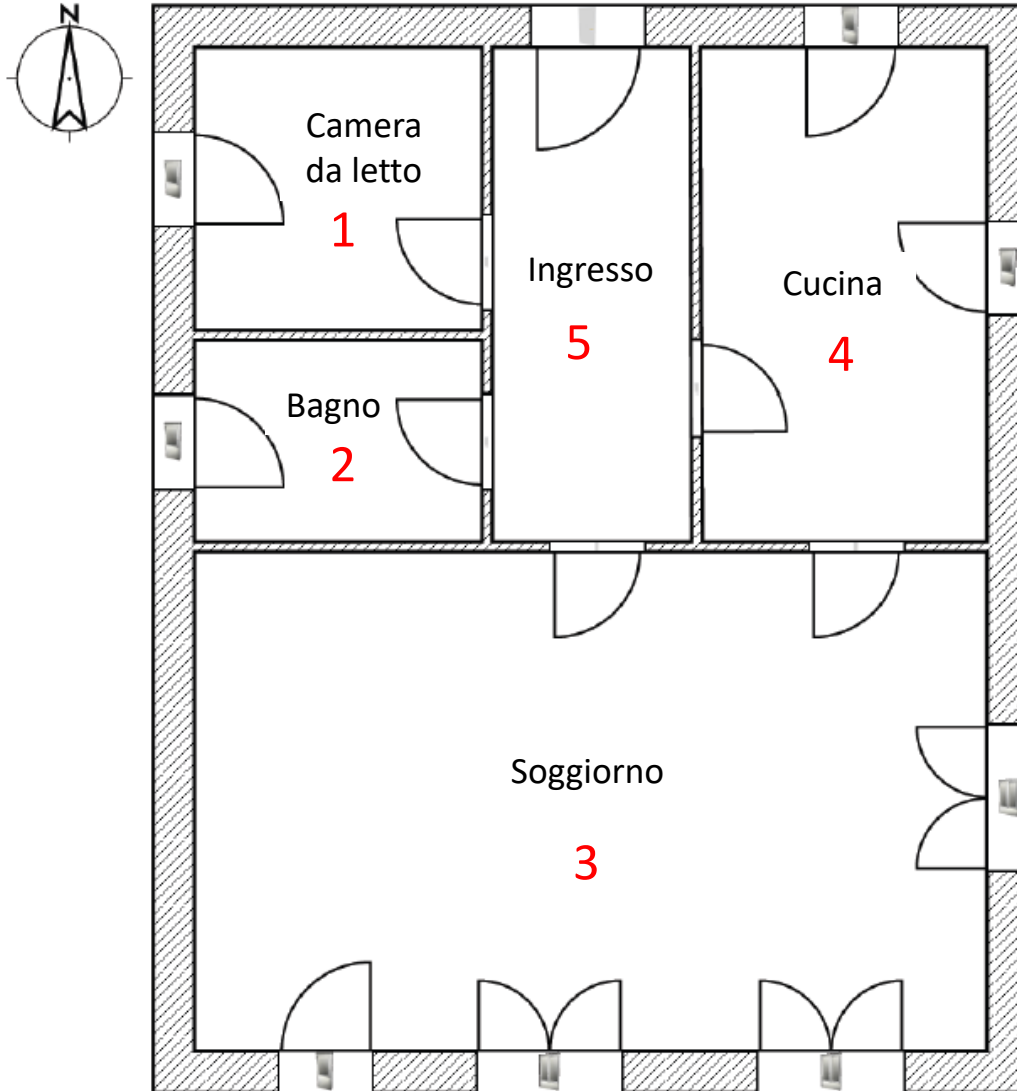


Fig. 1. Floor plan of the house

5 Ambienti

Ambiente	Indice i
Camera da letto	1
Bagno	2
Soggiorno	3
Cucina	4
Ingresso	5

Superficie totale $\approx 80m^2$

A_i =superficie dell' i -esimo ambiente

V_i =volume dell' i -esimo ambiente

2 ambienti al contorno

Ambiente	Indice i
Suolo	-1
Ambiente esterno	0

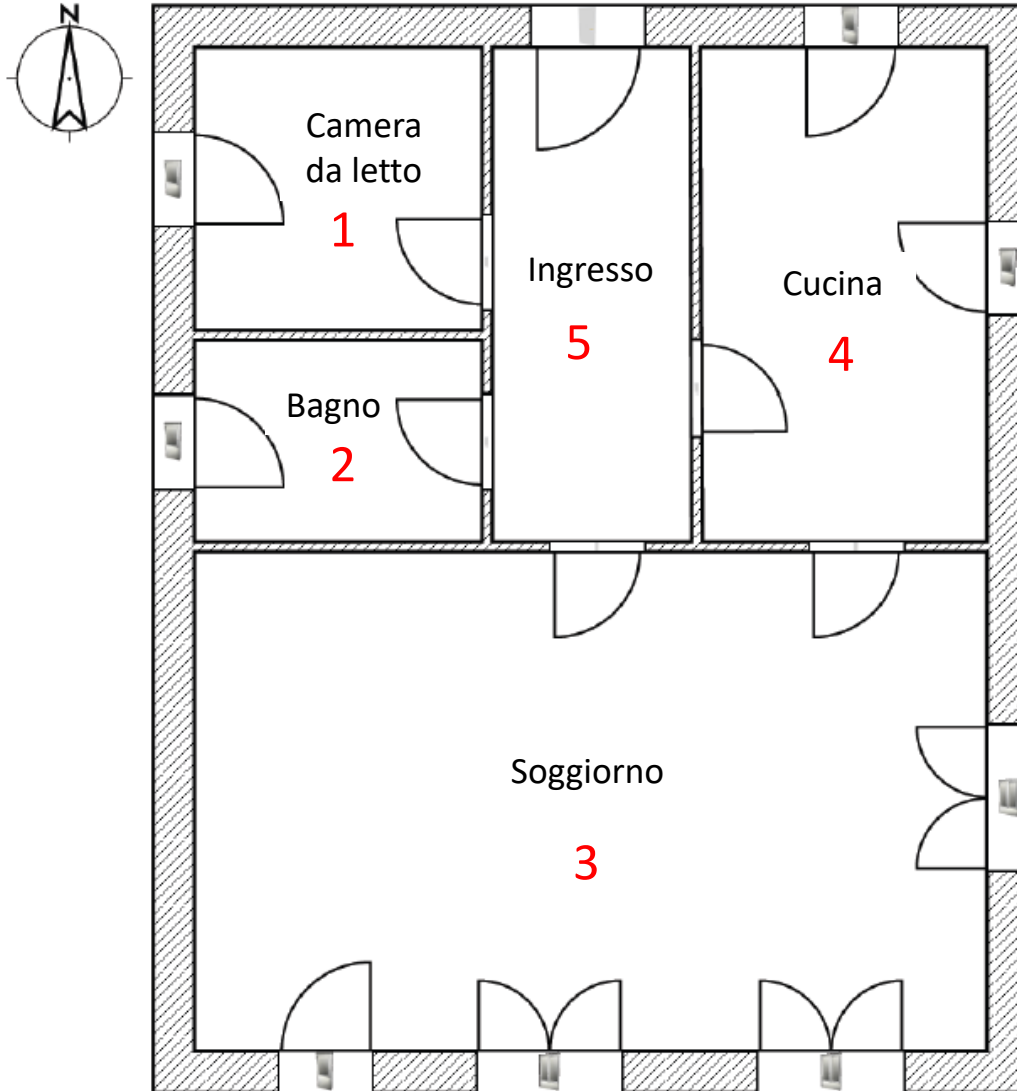


Fig. 1. Floor plan of the house

Temperature di sistema

Variabili di stato

Camera da letto $T_1(t)$

Bagno $T_2(t)$

Soggiorno $T_3(t)$

Cucina $T_4(t)$

Ingresso $T_5(t)$

Ingressi esterni

Suolo $T_{-1}(t)$

Ambiente esterno $T_0(t)$

Dinamica della stanza i-esima

Principio di conservazione dell'energia:

$$\rho V_i c_a \frac{dT_i(t)}{dt} = Q_i^{in}(t) - Q_i^{out}(t)$$

V_i = volume dell'ambiente

ρ = densità dell'aria

c_a = calore specifico dell'aria

$Q_i^{in}(t)$ [W] Potenza in ingresso nell'ambiente

$Q_i^{out}(t)$ [W] Potenza in uscita dall'ambiente (perdite)

Perdite

$$Q_i^{out}(t) = Q_i^{cc}(t) + Q_i^v(t)$$

$Q_i^{cc}(t)$ è il termine che include gli **scambi termici per conduzione e convezione** con gli ambienti adiacenti (inclusi il suolo e l'ambiente esterno) attraverso le pareti, le finestre, il pavimento ed il soffitto.

$Q_i^v(t)$ include le perdite dovute al **sistema di ventilazione** che area l'ambiente con un periodico ricambio d'aria con l'esterno.

Perdite per conduzione e convezione

$$Q_i^{cc}(t) = \sum_{j=-1}^N A_{i,j} U_{i,j} (T_i(t) - T_j(t))$$

I termini della sommatoria in cui l'indice j varia da 1 ad N (N è il numero degli ambienti dell'appartamento) si riferiscono agli scambi termici con i vari ambienti.

Il termine $j = -1$ modella lo scambio termico attraverso il pavimento (in esso si considera usualmente costante la temperatura $T_{-1}(t)$ del suolo)

Il termine $j = 0$ modella invece lo scambio termico con l'ambiente esterno

$A_{i,j}$ è la **superficie esposta** che separa gli ambienti i e j

$U_{i,j}$ è il **coefficiente di scambio termico globale**. Esso si determina eseguendo una media pesata che include i vari elementi inclusi nella superficie di separazione (ad esempio porte o finestre)

$$U_{i,j} = \frac{\sum_k A_{i,j,k} U_{i,j,k}}{A_{ij}} \quad \sum_k A_{i,j,k} = A_{ij}$$

perdite per ventilazione

$$Q_i^v(t) = (1 - \beta)c_a\rho q_i(T_i(t) - T_0(t))$$

q_i = portata volumetrica.

β =efficienza di recupero del calore

Principio di ventilazione alternata. A intervalli regolari la direzione del flusso dell'aria viene invertita, consentendo così di immettere aria esterna o estrarre aria viziata dagli ambienti. Il calore contenuto all'interno dell'aria espulsa dagli ambienti viene accumulato all'interno dell'unità di ventilazione (ad esempio mediante materiali ceramici) e viene successivamente ceduta all'aria fresca in ingresso durante la fase di immissione in ambiente.



Unità di ventilazione con recupero del calore



Potenze in ingresso

$$Q_i^{in}(t) = Q_i^h(t) + Q_i^{sol}(t) + Q_i^{int}(t)$$

- $Q_i^h(t)$ Potenza termica trasferita all'ambiente dall'unità di riscaldamento.
- $Q_i^{sol}(t)$ Potenza termica trasferita all'ambiente per effetto della radiazione solare che attraversa le superfici trasparenti
- $Q_i^{int}(t)$ Potenza termica trasferita all'ambiente per effetto degli occupanti, dell'impianto di illuminazione, e di altre eventuali apparecchiature.

Unità di riscaldamento.

$$Q_i^h(t) = u_i(t)$$

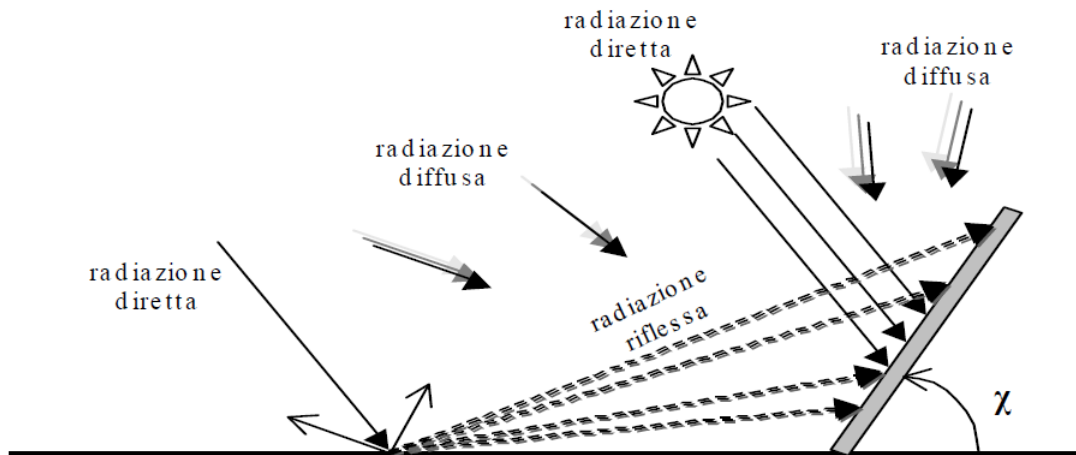
Consideriamo un sistema di riscaldamento radiante equipaggiato di un proprio sistema di regolazione in grado di imporre la potenza termica trasferita ad ogni ambiente.

$u_i(t)$ sono pertanto le **variabili manipolabili** nel modello matematico che stiamo realizzando

Se il riscaldamento/raffrescamento della stanza è invece realizzato mediante un condizionatore che immette nell'ambiente i -esimo una determinata portata volumetrica $q_c^i(t)$ di aria alla temperatura $T_c^i(t)$ si avrà:

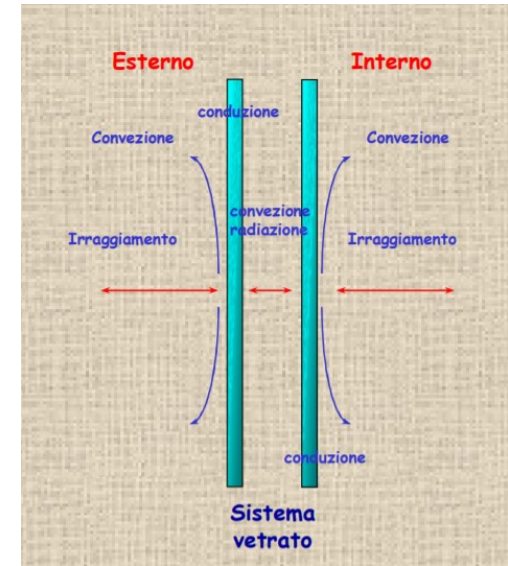
$$Q_i^h(t) = c_a \rho q_c^i(t) (T_c^i(t) - T_i(t))$$

Radiazione solare attraverso le superfici vetrate

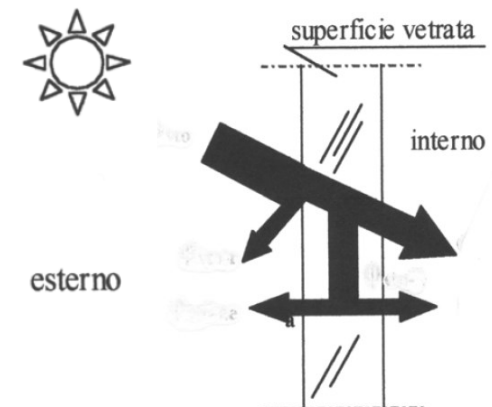


Radiazione diretta, diffusa e riflessa

Radiazione assorbita e respinta dalla superficie vetrata



Meccanismi di trasmissione del calore



Radiazione solare attraverso le superfici vetrate

$$Q_i^{sol}(t) = \sum_{k=1}^{N_w} g_{i,k} SC_{i,k} A_{i,k} \Phi_k(t)$$

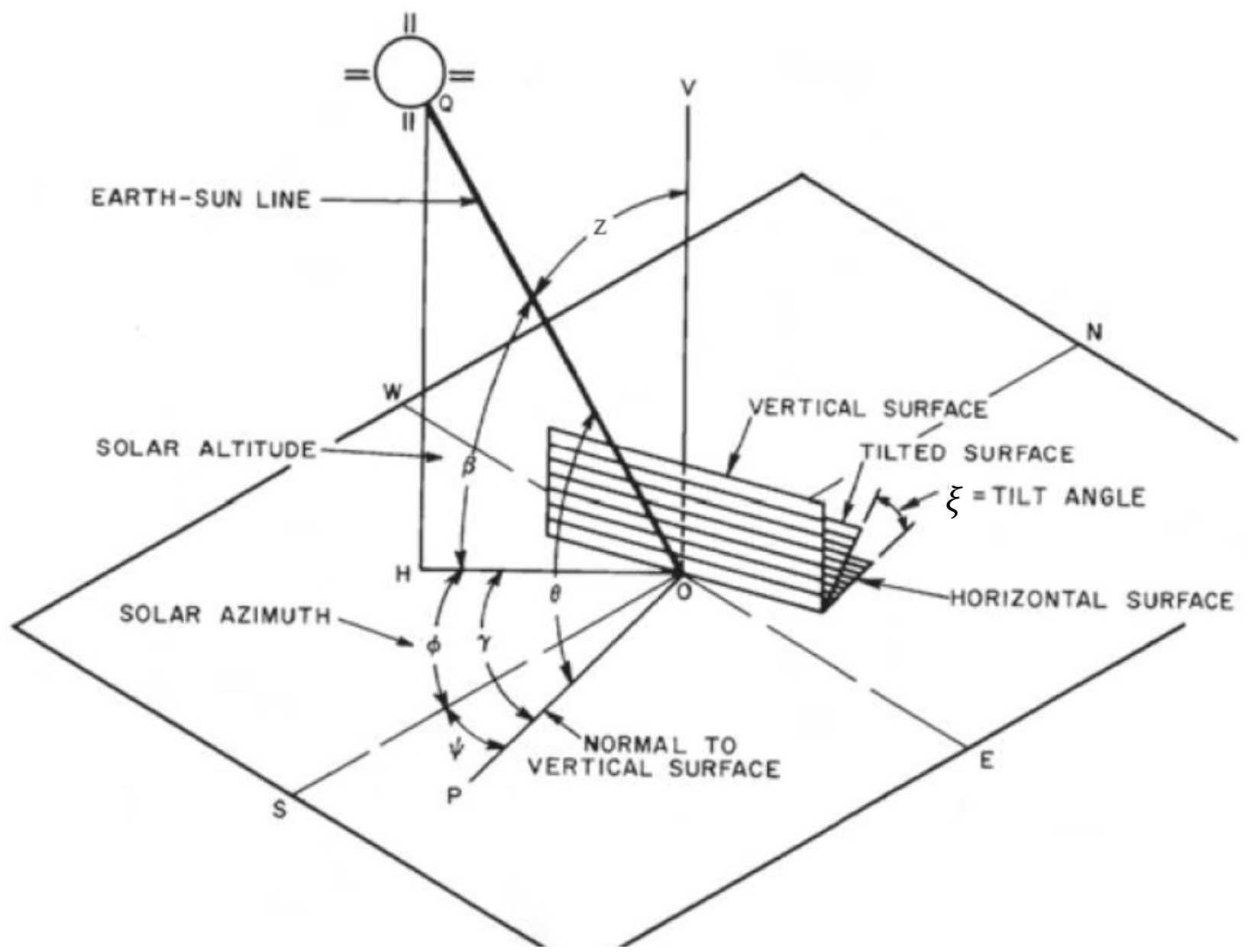
N_w = numero di finestre

$g_{i,k}$ = Fattore di guadagno solare per vetro standard di riferimento della finestra k-esima

$SC_{i,k}$ «shadow coefficient». Il fattore SC tiene conto della natura e dello spessore del vetro in relazione al vetro di riferimento (ovviamente, $SC = 1$ per il vetro standard e $SC < 1$ per vetro più spesso o colorato).

$A_{i,k}$ area della finestra [m^2]

$\Phi_k(t)$ Radiazione solare incidente sul piano della finestra [W/m^2]



Calcolo di $\Phi_k(t)$

Il valore istantaneo $\Phi_k(t)$ della radiazione incidente su un piano avente orientazione ed angolo di inclinazione prefissati si può determinare analiticamente mediante vari modelli approssimati. Utilizziamo il modello «**AHSRAE clear sky**».

Dati di ingresso:

Latitudine (λ) e longitudine (φ) del sito.

Cagliari: $\lambda = 39.22^\circ$ $\varphi = 9.11^\circ$

Giorno dell'anno: g (compreso fra 1 e 365)

Ora del giorno: t (compreso fra 0 e 24, espresso in ore) ?

Orientazione del piano: ψ $\psi = 0$ SUD $\psi = 90$ EST
 $\psi_s = 180$ $NORD$ $\psi = 270$ $OVEST$

Inclinazione (tilt) del piano: ξ $\xi = 0$ $Piano\ orizzontale$
 $\xi = 90$ $Piano\ verticale$

Longitudine del meridiano centrale del fuso orario in cui si trova il sito $\varphi_u = 15^\circ$

Procedura di calcolo (modello AHSRAE clear sky)

Angolo giornaliero:

$$w = g \pi / 180 \quad \text{espresso in radianti}$$

Equazione del tempo

$$e = 0.42 \cos(w) - 3.23 \cos(2w) - 0.09 \cos(3w) - 7.35 \sin(w) - 9.39 \sin(2w) - 0.34 \sin(3w)$$

Declinazione solare:

$$d = 23.45 \frac{\pi}{180} \sin \left(2 \pi \frac{g + 284}{365} \right) \quad \text{Formula approssimata di Cooper (inclusa la conversione in radianti del risultato).}$$

Angolo orario solare

$$\omega(t) = 15 * (t - 12) + 0.25 * (e - 4(\varphi - \varphi_u))$$

$0 < t < 24$
 t espresso in ore
 φ, φ_u espressi in gradi

Radiazione extra-atmosferica virtuale

$$A = 1150.25 + 72.43 \cos\left(0.95 g \frac{\pi}{180}\right) + 34.25 \sin\left(0.017 g \frac{\pi}{180}\right) + 1.5 \log(g);$$

Coefficiente d'estinzione dell'atmosfera

$$B = \frac{1}{6.74 + 0.026 g - 5.13 \cdot 10^{-4} g^2 + 2.24 \cdot 10^{-6} g^3 - 2.8 \cdot 10^{-9} g^4}$$

Fattore di radiazione diffusa

$$C = \frac{1}{16.9 + 10^{-4} g - 8.65 \cdot 10^{-4} g^2 + 3.93 \cdot 10^{-6} g^3 - 4.005 \cdot 10^{-9} g^4}$$

Altezza solare

$$\beta(t) = \text{asin}[\sin(\lambda) \sin(d) + \cos(\lambda)\cos(d) \cos(\omega(t))]$$

Se la formula precedente fornisce un valore negativo per $\beta(t)$ tale valore va modificato nel valore nullo (in quanto individuerrebbe il sole sotto la linea dell'orizzonte). L'espressione si corregge pertanto come segue:

$$\beta(t) = \max\{\text{asin}[\sin(\lambda) \sin(d) + \cos(\lambda)\cos(d) \cos(\omega(t))], 0\}$$

Azimut solare (positivo verso Est, negativo verso Ovest)

$$\phi(t) = \begin{cases} \text{acos} \left[\frac{\sin(\beta(t)) \sin(\lambda) - \sin(d)}{\cos(\beta(t)) \cos(\lambda)} \right] & 0 < t \leq 12 \\ -\text{acos} \left[\frac{\sin(\beta(t)) \sin(\lambda) - \sin(d)}{\cos(\beta(t)) \cos(\lambda)} \right] & 12 < t \leq 24 \end{cases}$$

Angolo di incidenza della radiazione solare diretta

$$\theta(t) = \arccos[\cos(\beta(t)) \cos(\phi(t) - \psi) \sin(\xi) + \sin(\beta(t)) \cos(\xi)]$$

Se la formula precedente fornisce un valore per $\theta(t)$ maggiore di $\pi/2$, il valore di $\theta(t)$ va saturato a $\pi/2$. L'espressione si corregge pertanto come segue:

$$\theta(t) = \min \left\{ \arccos[\cos(\beta(t)) \cos(\phi(t) - \psi) \sin(\xi) + \sin(\beta(t)) \cos(\xi)] , \frac{\pi}{2} \right\}$$

Intensità della radiazione **diretta** incidente sulla superficie:

$$I_{DIR}(t) = \begin{cases} 0 & \beta(t) = 0 \\ \frac{A}{e^{\frac{B}{\sin(\beta(t))}}} \cos[\theta(t)] & \beta(t) > 0 \end{cases}$$

Fattore di vista tra la superficie considerata e la volta celeste

$$F = \frac{1 + \cos \xi}{2}$$

Intensità della radiazione **diffusa** incidente sulla superficie:

$$I_{DIFF}(t) = \frac{A C F}{e^{\frac{B}{\sin(\beta(t))}}}$$

Intensità della radiazione **riflessa** incidente sulla superficie:

$$I_{RIFL}(t) = \frac{A}{e^{\frac{B}{\sin(\beta(t))}}} [C + \sin(\beta(t))] \cdot ALB \cdot (1 - F)$$

Intensità della radiazione **totale** incidente sulla superficie:

$$\Phi_k(t) = I_{DIR}(t) + I_{DIFF}(t) + I_{RIFL}(t) \quad [W/m^2]$$

```
function [Q tau]=calcolo_RadiazioneSolare(g,csi,psis)

% Questa function calcola la radiazione totale incidente in un giorno generico su
% una superficie orientata arbitrariamente sita in Cagliari.
% Sintassi:      [Q t]=calcolo_RadiazioneSolare(g,INC,OR)
% g= giorno dell'anno (1=primo gennaio. 365= 31 dicembre.)
% INC è l'inclinazione della superficie (parete verticale INC=90. Solaio
%orizzontale: INC=0;)
% OR è l'orientazione (OR=0: Sud. OR=90: Est. OR=180: Nord. OR=270: Ovest)
% Q [W/m^2] è la radiazione totale incidente sul piano.
% La radiazione viene calcolata secondo il modello semiempirico «Clear sky Ashrae
% model». Il modello prevede cielo sereno.
% La funzione calcola la radiazione lungo l'intera giornata, con step di 1 ora.
% t [h] è il vettore degli istanti di tempo in cui si valuta la radiazione.
% Impostare il coefficiente di albedo ALB del terreno circostante (default = 0.3)
```

```
[Qs tau]=calcolo_RadiazioneSolare(1,90,0);
[Qe tau]=calcolo_RadiazioneSolare(1,90,90);
[Qn tau]=calcolo_RadiazioneSolare(1,90,180);
[Qw tau]=calcolo_RadiazioneSolare(1,90,270);
```

```
figure(1)
subplot(2,2,1)
plot(tau,Qs);
title('Parete verticale esposta a SUD');
xlabel('Tempo [h]');
ylabel('Radiazione totale incidente W/m^2');
grid;
subplot(2,2,2)
plot(tau,Qe);
title('Parete verticale da EST');
xlabel('Tempo [h]');
ylabel('Radiazione W/m^2');
grid;
subplot(2,2,3)
plot(tau,Qn);
title('Parete verticale da NORD');
xlabel('Tempo [h]');
ylabel('Radiazione W/m^2');
grid;
subplot(2,2,4)
plot(tau,Qw);
title('Parete verticale da OVEST');
xlabel('Tempo [h]');
ylabel('Radiazione W/m^2');
grid;
```

1 gennaio (g=1)

Parete verticale ($\xi = 90^\circ$)

4 orientazioni diverse (S-E-N-W)

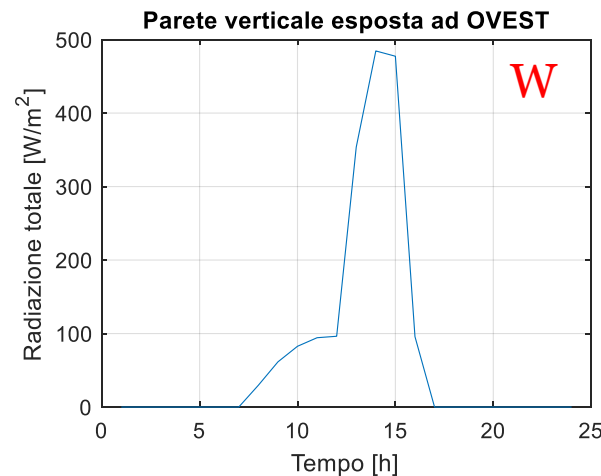
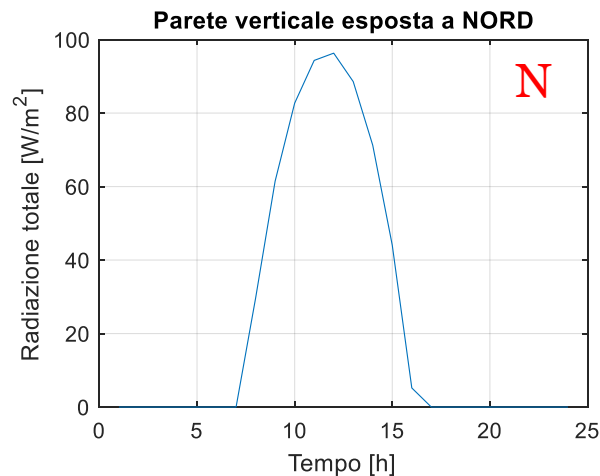
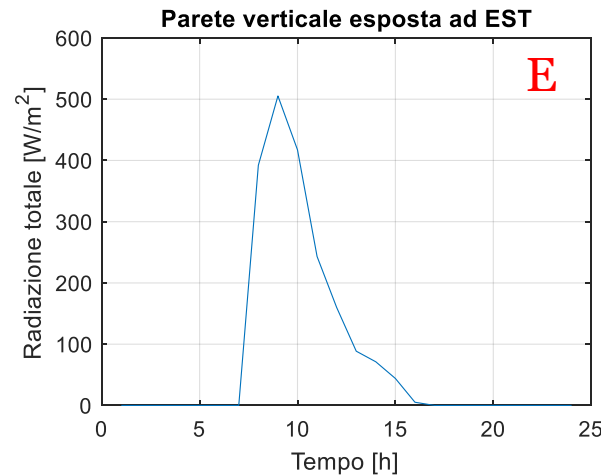
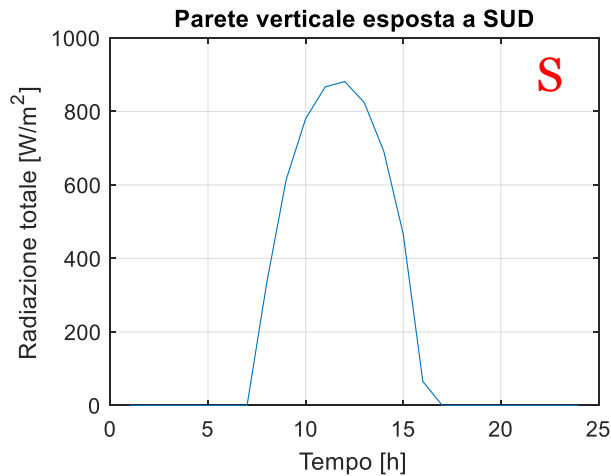
$\psi_s = 0, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

1 gennaio (g=1)

Parete verticale ($\xi = 90^\circ$)

4 orientazioni diverse (S-E-N-W)

$\psi_s = 0, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$



Radiazione solare massima per una superficie esposta a sud. La radiazione su una superficie esposta a nord è un ordine di grandezza inferiore.

All'indirizzo web

https://re.jrc.ec.europa.eu/pvg_tools/it/#MR

possono essere scaricati dati storici orari di irraggiamento solare acquisiti mediante analisi satellitari.

The screenshot displays the PVGIS web application interface. On the left, a map shows the location of the cursor over Italy. The right panel is titled "DATI RADIAZIONE ORARI" and contains the following configuration options:

- Cursor:** Selezione: **Selezionare luogo!**
- Usare ombre locali:**
 - Orizzonte calcolato
 - Caricare file di orizzonte
- Altitudine (m):** Scegli file (Nessun file selezionato)
- Database di radiazione solare*:** (Dropdown menu)
- Primo anno*:** 2007 (Dropdown menu)
- Ultimo anno*:** 2015 (Dropdown menu)
- Tipo montaggio*:**
 - Fisso
 - Asse verticale
 - Asse inclinata
 - Due assi
- Inclinazione [°]:** (0-90) (Input field)
- Ottimizzare inclinazione
- Orientamento [°]:** (-180-180) (Input field)
- Optimize slope and azimuth
- Potenza FV**
- Tecnologia FV:** Silicio cristallino (Dropdown menu)
- Potenza FV di picco [kWp]:** 1 (Input field)
- Perdite di sistema [%]:** 14 (Input field)
- Componenti di radiazione**

At the bottom of the interface, there are buttons to download the data as CSV or JSON, and input fields for the address (Indirizzo: Eg. Ispra, Italy) and coordinates (Lat/Lon: Eg. 45.81, Eg. 8.611).

$Q_i^{int}(t)$ - Apporti termici interni

Profili temporali degli apporti termici da occupanti ed apparecchiature (edifici residenziali)

Giorni	Ore	Soggiorno e cucina W/m ²	Altre aree climatizzate (es. stanza da letto) W/m ²
Lunedì - Venerdì	07.00 - 17.00	8,0	1,0
	17.00 - 23.00	20,0	1,0
	23.00 - 07.00	2,0	6,0
	Media	9,0	2,67
Sabato - Domenica	07.00 - 17.00	8,0	2,0
	17.00 - 23.00	20,0	4,0
	23.00 - 07.00	2,0	6,0
	Media	9,0	3,83
Media		9,0	3,0

$Q_i^*(t)$

Tutti i valori riportati nei precedenti prospetti sono riferiti al m^2 di *area climatizzata netta*. In assenza di informazioni esatte la sua estensione può essere ottenuta moltiplicando la corrispondente area lorda per un fattore f_n , ricavabile in funzione dello **spessore medio delle pareti di contorno** d_m :

$$f_{ni} = 0.9761 - 0.3055 d_{mi}$$

d_{mi} : spessore medio delle pareti delimitanti l'ambiente i -esimo

Si ha pertanto:

$$Q_i^{int}(t) = Q_i^*(t) A_i f_{ni} \quad A_i = \text{superficie dell' } i - \text{esimo ambiente}$$

Modello complessivo

$$\rho V_i c_a \frac{dT_i(t)}{dt} = Q_i^{in}(t) - Q_i^{out}(t) \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

$$= Q_i^h(t) + Q_i^{sol}(t) + Q_i^{int}(t) - Q_i^{cc}(t) - Q_i^v(t)$$

$$Q_i^h(t) = u_i(t)$$

$$Q_i^{sol}(t) = \sum_{k=1}^{N_{wi}} g_{i,k} S C_{i,k} A_{i,k} \Phi_k(t)$$

N_{wi} = numero di finestre presenti nell'i-esimo ambiente

$$Q_i^{int}(t) = A_i f_{ni} Q_i^*(t)$$

$$Q_i^{cc}(t) = \sum_{j=-1}^N A_{i,j} U_{i,j} (T_i(t) - T_j(t))$$

$$Q_i^v(t) = (1 - \beta) c_a \rho q_i (T_i(t) - T_0(t))$$

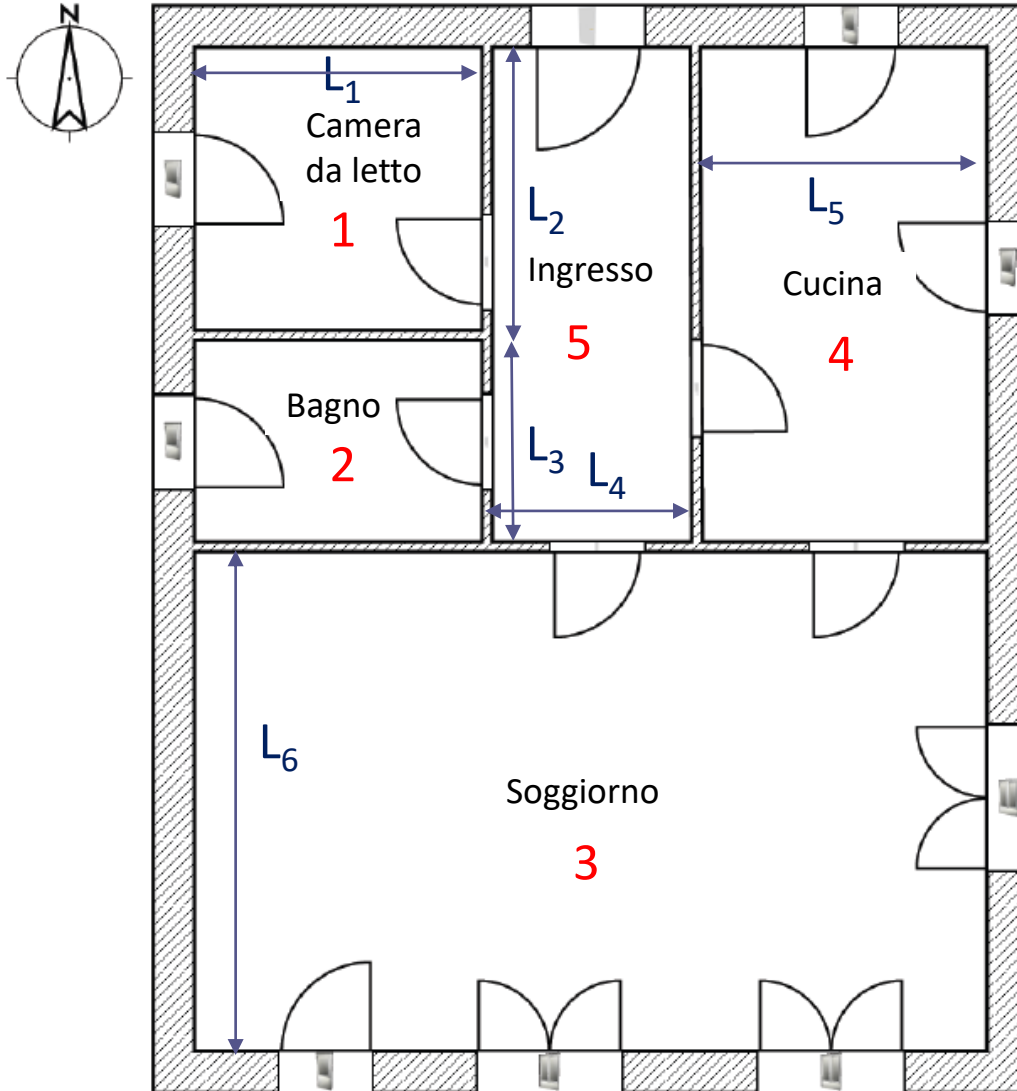


Fig. 1. Floor plan of the house

5 Ambienti

Ambiente	Indice i
Camera da letto	1
Bagno	2
Soggiorno	3
Cucina	4
Ingresso	5

Dimensioni

$L_1 = 2.5\text{ m}$	$L_4 = 1.83\text{ m}$
$L_2 = 3.33\text{ m}$	$L_5 = 2.53\text{ m}$
$L_3 = 2.36\text{ m}$	$L_6 = 5.89\text{ m}$
$H = 2.7\text{ m}$	Altezza

A_i = superficie dell' i -esimo ambiente

V_i = volume dell' i -esimo ambiente

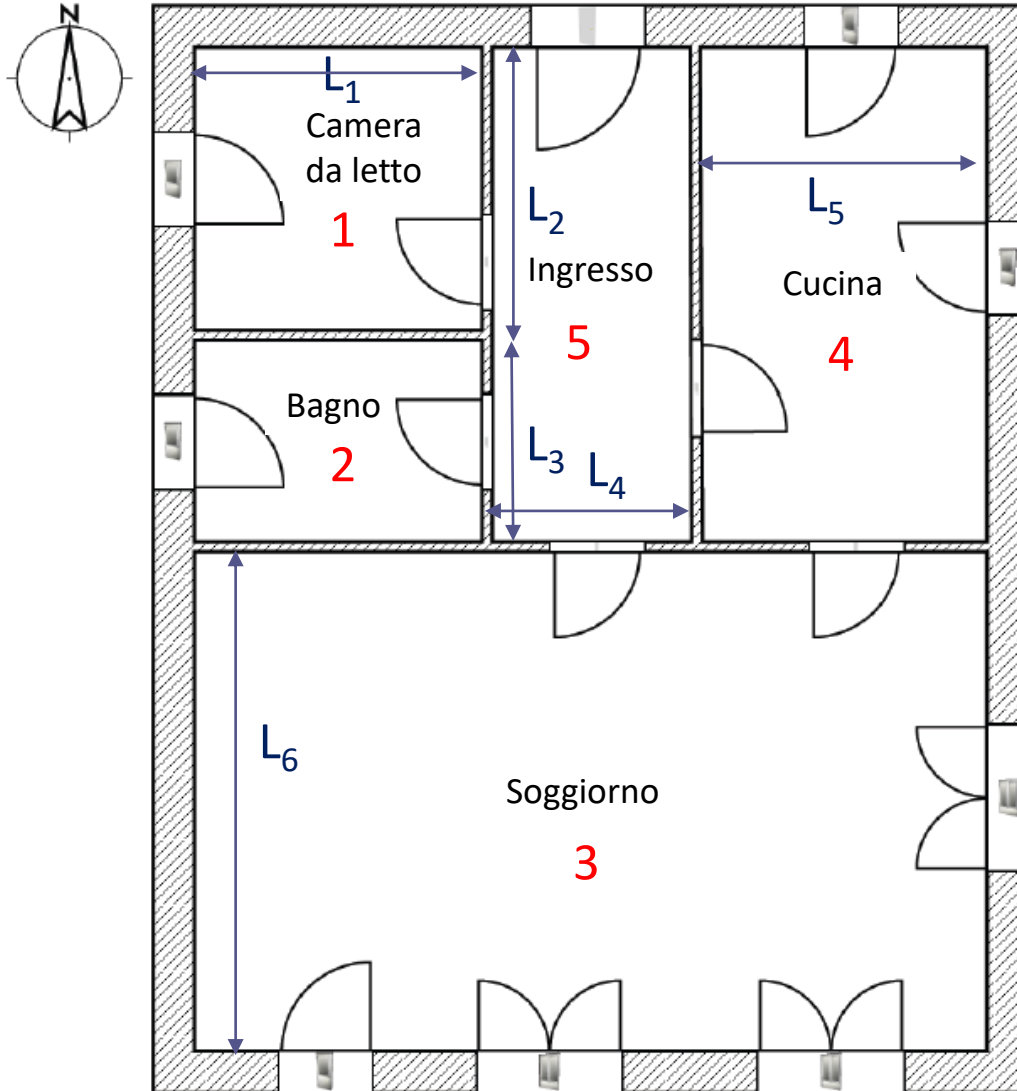


Fig. 1. Floor plan of the house

Spessore pareti e materiali

Muri perimetrali

Spessore complessivo: $D_{ext} = 46.6 \text{ cm}$

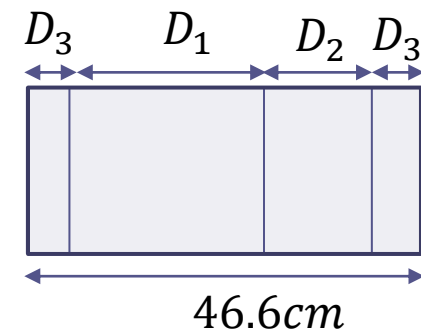
Strati: 4

Spessore

Blocchi cavi con argilla espansa $D_1 = 30 \text{ cm}$

Lana di roccia $D_2 = 15 \text{ cm}$

Intonaco in calce-cemento (x2), strati interno ed esterno $D_3 = 0.8 \text{ cm}$



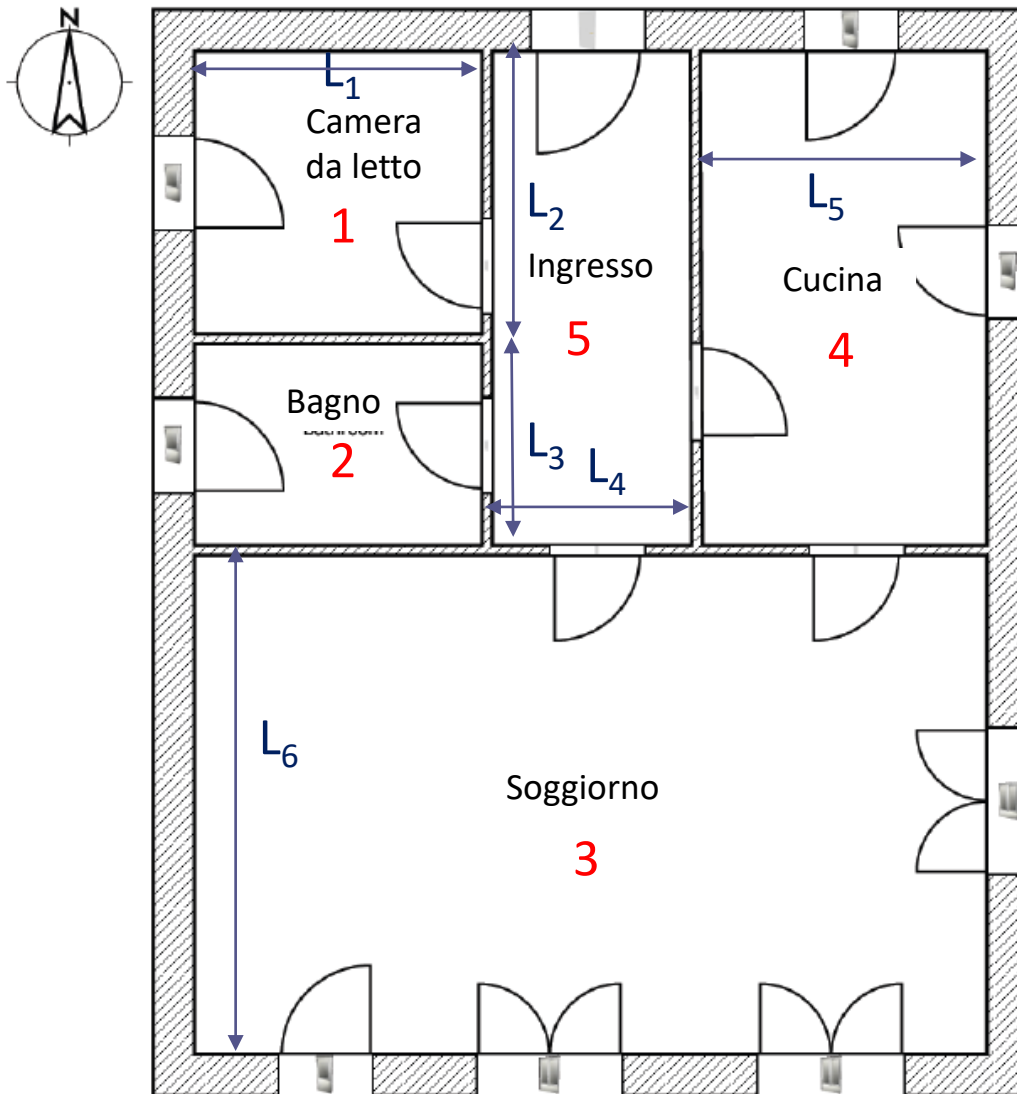


Fig. 1. Floor plan of the house

Spessore pareti e materiali

Pareti interne

Spessore complessivo: $D_{int} = 11.6 \text{ cm}$

Strati: 3

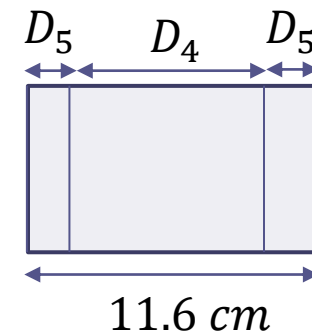
Spessore

Mattone forate
porizzate

$$D_4 = 10 \text{ cm}$$

Intonaco in calce-
cemento (x2), strato
interno ed esterno

$$D_5 = 0.8 \text{ cm}$$



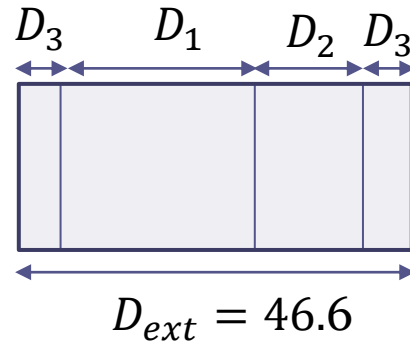
Conduttività termica e densità dei materiali da costruzione

http://www.cornaviera.it/pagina.asp?codice=conduttivit%EO_materiali

	Conduttività termica [W/mK]	Densità [kg/m^3]
Blocchi cavi con argilla espansa	$\lambda_{ma} = 0.22$	$\rho_{ma} = 650$
Lana di roccia	$\lambda_{\ell r} = 0.04$	$\rho_{\ell r} = 30$
Intonaco in calce-cemento	$\lambda_{icc} = 1$	$\rho_{icc} = 1800$
Mattone forato porizzato	$\lambda_{mfp} = 0.25$	$\rho_{mfp} = 800$

Coeff. di scambio termico delle pareti

Pareti esterne



Blocchi cavi con argilla espansa $D_1 = 30$ cm

Lana di roccia $D_2 = 15$ cm

Intonaco in calce-cemento (x2), strati interno ed esterno $D_3 = 0.8$ cm

$$U_{pe} = \frac{1}{\frac{1}{k_e} + \frac{D_3}{\lambda_{icc}} + \frac{D_1}{\lambda_{ma}} + \frac{D_2}{\lambda_{lr}} + \frac{D_3}{\lambda_{icc}} + \frac{1}{k_i}} = 0.188 \frac{W}{m^2 K}$$

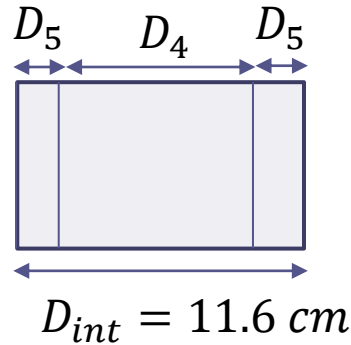
Valori tipici di k_e e k_i (aliquote di natura convettiva) per pareti verticali

$$k_e = 23 \frac{W}{m^2 K} \quad k_i = 8 \frac{W}{m^2 K}$$

Se è nota la velocità v del vento, ed è maggiore di 4 m/s, il coefficiente k_e può essere stimato in maniera più accurata con la relazione

$$k_e = 2.3 + 5.2 v$$

Pareti interne



Mattoni forati
porizzati

$$D_4 = 10 \text{ cm}$$

Intonaco in calce-
cemento (x2), strato
interno ed esterno

$$D_5 = 0.8 \text{ cm}$$

$$U_{pi} = \frac{1}{\frac{2}{k_i} + \frac{2D_5}{\lambda_{icc}} + \frac{D_4}{\lambda_{mfp}}} = 1.50 \frac{W}{m^2 K}$$

Su entrambi i lati della parete il coeff. di scambio convettivo è k_i

Finestre

Coefficiente di scambio termico

$$U_f = 2 \frac{W}{m^2K}$$

Valore realistico per una finestra a vetro singolo.

Area

Finestre ad anta singola

$$A_{fs} = 1.17 \text{ m}^2$$

Area finestre a doppia anta

$$A_{fd} = 2.52 \text{ m}^2$$


Fattore solare

$$g_{i,k} = g^* = 0.51$$

Shadow coefficient

$$SC_{i,k} = SC = 0.95$$

Fattore di guadagno solare g



Opzioni di vetrate	Vetrate standard		
	Thermo 2 Plus* --86	Thermo 2* --66	Thermo 1 --60
Coefficiente di trasmissione termica Finestra U_w (Norma EN ISO 12567-2)	1,0		1,3
Coefficiente di trasmissione termica Lastra U_g (Norma EN 673)	0,5		1,0
Fattore solare totale valore g (Norma EN 410)	0,51		0,30
Fattore di trasmissione luminosa τ_v (Norma EN 410)	0,71		0,62
Isolamento del rumore aereo (C; Ctr) R_w (Norma EN 717-1) in dB	37 (-2;-4)		37 (-1;-3)

Porte

Porta esterna

Coefficiente di scambio termico

$$U_{de} = 0.25 \frac{W}{m^2K}$$

Area

$$A_{de} = 2.31 \text{ m}^2$$

Porte interne

Coefficiente di scambio termico

$$U_{di} = 0.8 \frac{W}{m^2K}$$

Area

$$A_{di} = 1.89 \text{ m}^2$$

Sistema di ventilazione

Coeff. di recupero $\beta=0.5$

$$Q_i^v(t) = (1 - \beta)c_a\rho q_i(T_i(t) - T_0(t))$$

	Letto	Bagno	Soggiorno	Cucina	Ingresso
Portata q_i [m^3/h]	20	50	60	70	10

Pavimento e copertura

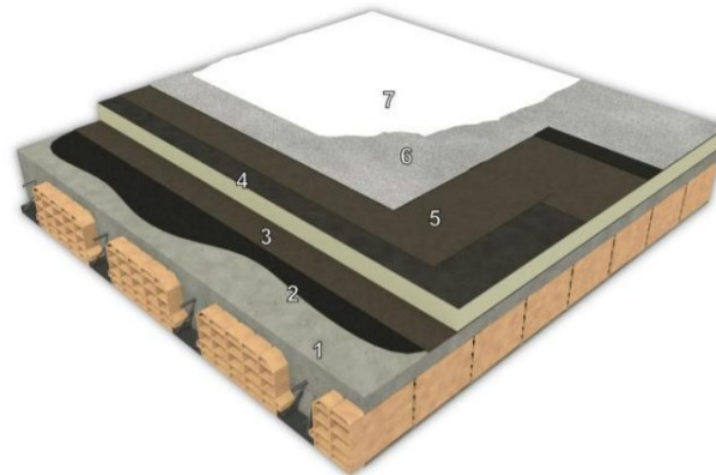
Pavimento

$$U_{pav} = 0.31 \text{ W/m}^2\text{K}$$

pavimento controterra senza alcun isolamento

Copertura

$$U_{cop} = 0.25 \text{ W/m}^2\text{K}$$



1. Supporto – Solaio in latero cemento
2. Primer bituminoso IDROPRIMER
3. Barriera al vapore
POLYVAP RADONSHIELD
4. Pannello isolante in poliuretano PUR VB
5. Guaina impermeabilizzante
POLYSHIELD TS 4 (primo strato)
6. Guaina impermeabilizzante
POLYSHIELD TS 4 Granigliata
(secondo strato)
7. Trattamento riflettente bianco
POLYVER SUPER WHITE

Ricaviamo i parametri associati alla dinamica termica della **camera da letto** (ambiente #1)

1 finestra ad anta singola (nella parete esposta ad ovest)

1 porta interna

Confinante con il bagno (ambiente #2) e con l'ingresso (ambiente #5)

$$\begin{aligned} \rho V_1 c_a \frac{dT_1(t)}{dt} &= Q_1^{in}(t) - Q_1^{out}(t) & \rho &= 1205 \text{ kg/m}^3 \\ & & c_a &= 1005 \text{ J/(kgK)} \\ &= Q_1^h(t) + Q_1^{sol}(t) + Q_1^{int}(t) - Q_1^{cc}(t) - Q_1^v(t) \\ &= u_1(t) + g^* S C A_{fs} \Phi_W(t) + A_i f_{n1} Q_1^*(t) - A_{1,2} U_{1,2} (T_1(t) - T_2(t)) \\ &\quad - A_{1,5} U_{1,5} (T_1(t) - T_5(t)) - A_{1,0} U_{1,0} (T_1(t) - T_0(t)) \\ &\quad - A_{1,-1} U_{1,-1} (T_1(t) - T_{-1}(t)) - (1 - \beta) c_a \rho q_1 (T_1(t) - T_0(t)) \end{aligned}$$

$$\rho V_1 c_a \frac{dT_1(t)}{dt} = u_1(t) + g^* S C A_{fs} \Phi_W(t) + A_1 f_{n1} Q_1^*(t) - A_{1,2} U_{1,2} (T_1(t) - T_2(t)) \\ - A_{1,5} U_{1,5} (T_1(t) - T_5(t)) - A_{1,0} U_{1,0} (T_1(t) - T_0(t)) \\ - A_{1,-1} U_{1,-1} (T_1(t) - T_{-1}(t)) - (1 - \beta) c_a \rho q_1 (T_1(t) - T_0(t))$$

Valutiamo i vari parametri

$$A_1 = L_1 L_2 = 8.34 \text{ m}^2$$

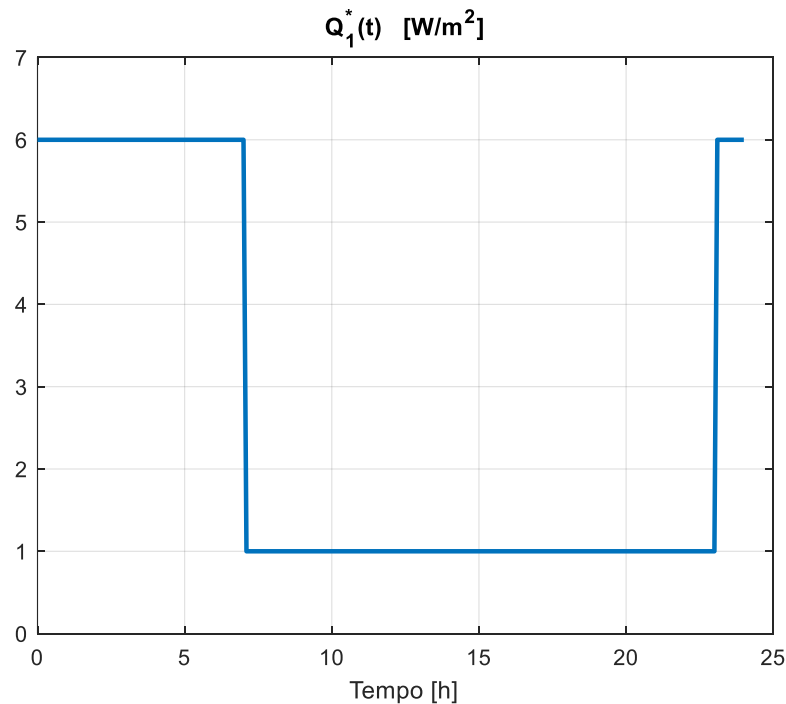
Superficie camera da letto

$$f_{n1} = 0.9761 - 0.3055 d_{m1} = 0.88$$

$d_{m1} = 0.291 \text{ m}$ spessore medio delle pareti che delimitano la camera da letto

Profili temporali degli apporti termici da occupanti ed apparecchiature (edifici residenziali)

Giorni	Ore	Soggiorno e cucina W/m ²	Altre aree climatizzate (es. stanza da letto) W/m ²
Lunedì - Venerdì	07.00 - 17.00	8,0	1,0
	17.00 - 23.00	20,0	1,0
	23.00 - 07.00	2,0	6,0
	Media	9,0	2,67
Sabato - Domenica	07.00 - 17.00	8,0	2,0
	17.00 - 23.00	20,0	4,0
	23.00 - 07.00	2,0	6,0
	Media	9,0	3,83
Media		9,0	3,0

 $Q_i^*(t)$

Camera da letto
Lunedì-venerdì

Superfici che separano la camera da letto dagli ambienti adiacenti:

suolo $A_{1,-1} = A_1 = 8.34 \text{ m}^2$

esterno $A_{1,0} = (L_1 + L_2) H + A_1 = 24.11 \text{ m}^2$

bagno $A_{1,2} = L_1 H = 6.75 \text{ m}^2$

ingresso $A_{1,5} = L_2 H = 9.01 \text{ m}^2$

Per gli ambienti non adiacenti (cucina e soggiorno) settiamo

$$A_{1,3} = A_{1,4} = 0$$

N.B. $A_{i,-1} = A_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 5$

Calcolo coefficienti $U_{1,j}$

Suolo ($j = -1$)

$$U_{1,-1} = U_{pav} = 0.31 \text{ W/m}^2\text{K}$$

N.B. $U_{i,-1} = U_{pav}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 5$

Bagno ($j = 2$)

$$U_{1,2} = U_{pi} = 1.501 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Esterno ($j = 0$)

$$A_{pe1} = (L_1 + L_2)H - A_{fs} \quad \text{Superficie parete camera da letto (1) esposta sull'esterno}$$

$$U_{1,0} = \frac{U_f A_{fs} + U_{pe} A_{pe1} + U_{cop} A_1}{A_{1,0}} = 0.297 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Ingresso ($j = 5$)

$$A_{pi15} = L_2 H - A_{di} \quad \text{Superficie parete camera da letto (1) esposta verso l'ingresso (5)}$$

$$U_{1,5} = \frac{U_{di} A_{di} + U_{pi} A_{pi15}}{A_{1,5}} = 1.354 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Ambienti non adiacenti ($j = 3, 4$) :

$$U_{1,3} = U_{1,4} = 0$$

Sviluppare i calcoli dei coefficienti $U_{i,j}$ per gli altri ambienti

I coefficienti $U_{i,j}$ ed $A_{i,j}$ sono nulli se gli ambienti i e j non sono adiacenti

Inoltre, i coefficienti $U_{i,j}$ ed $A_{i,j}$ sono simmetrici

$$U_{i,j} = U_{j,i}$$

$$A_{i,j} = A_{j,i}$$

Modello in forma estesa

$$\begin{aligned}\rho V_1 c_a \frac{dT_1(t)}{dt} = & u_1(t) + g^* SCA_{fs} \Phi_W(t) + A_1 f_{n1} Q_1^*(t) - A_{1,2} U_{1,2} (T_1(t) - T_2(t)) \\ & - A_{1,5} U_{1,5} (T_1(t) - T_5(t)) - A_{1,0} U_{1,0} (T_1(t) - T_0(t)) \\ & - A_1 U_{pav} (T_1(t) - T_{-1}(t)) - (1 - \beta) c_a \rho q_1 (T_1(t) - T_0(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho V_2 c_a \frac{dT_2(t)}{dt} = & u_2(t) + g^* SCA_{fs} \Phi_W(t) + A_2 f_{n2} Q_2^*(t) - A_{2,1} U_{2,1} (T_2(t) - T_1(t)) \\ & - A_{2,3} U_{2,3} (T_2(t) - T_3(t)) - A_{2,5} U_{2,5} (T_2(t) - T_5(t)) - A_{2,0} U_{2,0} (T_2(t) - T_0(t)) \\ & - A_2 U_{pav} (T_2(t) - T_{-1}(t)) - (1 - \beta) c_a \rho q_2 (T_2(t) - T_0(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho V_3 c_a \frac{dT_3(t)}{dt} = & u_3(t) + g^* SCA_{fs} \Phi_S(t) + 2 g^* SCA_{fd} \Phi_S(t) + g^* SCA_{fd} \Phi_E(t) \\ & + A_3 f_{n3} Q_3^*(t) - A_{3,2} U_{3,2} (T_3(t) - T_2(t)) - A_{3,4} U_{3,4} (T_3(t) - T_4(t)) \\ & - A_{3,5} U_{3,5} (T_3(t) - T_5(t)) - A_{3,0} U_{3,0} (T_3(t) - T_0(t)) \\ & - A_3 U_{pav} (T_3(t) - T_{-1}(t)) - (1 - \beta) c_a \rho q_3 (T_3(t) - T_0(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho V_4 c_a \frac{dT_4(t)}{dt} = & u_4(t) + g^* SCA_{fs} \Phi_E(t) + g^* SCA_{fs} \Phi_N(t) + A_4 f_{n4} Q_4^*(t) \\
& - A_{4,3} U_{4,3} (T_4(t) - T_3(t)) - A_{4,5} U_{4,5} (T_4(t) - T_5(t)) - A_{4,0} U_{4,0} (T_4(t) - T_0(t)) \\
& - A_4 U_{pav} (T_4(t) - T_{-1}(t)) - (1 - \beta) c_a \rho q_4 (T_4(t) - T_0(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho V_5 c_a \frac{dT_5(t)}{dt} = & u_5(t) + A_5 f_{n5} Q_5^*(t) - A_{5,1} U_{5,1} (T_5(t) - T_1(t)) - A_{5,2} U_{5,2} (T_5(t) - T_2(t)) \\
& - A_{5,3} U_{5,3} (T_5(t) - T_3(t)) - A_{5,4} U_{5,4} (T_5(t) - T_4(t)) - A_{5,0} U_{5,0} (T_5(t) - T_0(t)) \\
& - A_5 U_{pav} (T_5(t) - T_{-1}(t)) - (1 - \beta) c_a \rho q_5 (T_5(t) - T_0(t))
\end{aligned}$$

Modello complessivo in forma vettoriale

$$\rho c_a V \frac{dT}{dt} = \mathbf{M}_s \mathbf{T}(t) + \mathbf{u}_m(t) + \mathbf{B}_0 T_0(t) + \mathbf{B}_{-1} T_{-1}(t) + \mathbf{Q}^{int}(t) + \mathbf{E} \Phi^{sol}(t)$$

SV - CV

MV

MD/UD

MD

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \\ T_4(t) \\ T_5(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_m(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{int}(t) = \begin{bmatrix} Q_1^{int}(t) \\ Q_2^{int}(t) \\ Q_3^{int}(t) \\ Q_4^{int}(t) \\ Q_5^{int}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{sol}(t) = \begin{bmatrix} \Phi_N(t) \\ \Phi_E(t) \\ \Phi_S(t) \\ \Phi_W(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{diag}\{V_1, V_2, \dots, V_5\} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} -\sum_{j=0}^5 A_{1,j} U_{1,j} & A_{1,2} U_{1,2} & A_{1,3} U_{1,3} & A_{1,4} U_{1,4} & A_{1,5} U_{1,5} \\ A_{1,2} U_{1,2} & -\sum_{j=0}^5 A_{2,j} U_{2,j} & A_{2,3} U_{2,3} & A_{2,4} U_{2,4} & A_{2,5} U_{2,5} \\ A_{1,3} U_{1,3} & A_{2,3} U_{2,3} & -\sum_{j=0}^5 A_{3,j} U_{3,j} & A_{3,4} U_{3,4} & A_{3,5} U_{3,5} \\ A_{1,4} U_{1,4} & A_{2,4} U_{2,4} & A_{3,4} U_{3,4} & -\sum_{j=0}^5 A_{4,j} U_{4,j} & A_{4,5} U_{4,5} \\ A_{1,5} U_{1,5} & A_{2,5} U_{2,5} & A_{3,5} U_{3,5} & A_{4,5} U_{4,5} & -\sum_{j=0}^5 A_{5,j} U_{5,j} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} -A_1 U_{pav} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_2 U_{pav} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_3 U_{pav} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_4 U_{pav} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_5 U_{pav} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3 = -(1 - \beta)c_a \rho \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = g^* SC \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{fs} \\ 0 & 0 & 0 & A_{fs} \\ 0 & 0 & A_{fs} + 2A_{fd} & A_{fd} \\ A_{fs} & A_{fs} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} A_{1,0} U_{1,0} + (1 - \beta)c_a \rho q_1 \\ A_{2,0} U_{2,0} + (1 - \beta)c_a \rho q_2 \\ A_{3,0} U_{3,0} + (1 - \beta)c_a \rho q_3 \\ A_{4,0} U_{4,0} + (1 - \beta)c_a \rho q_4 \\ A_{5,0} U_{5,0} + (1 - \beta)c_a \rho q_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{-1} = \begin{bmatrix} A_1 U_{pav} \\ A_2 U_{pav} \\ A_3 U_{pav} \\ A_4 U_{pav} \\ A_5 U_{pav} \end{bmatrix}$$

All'equilibrio $\left(\frac{dT}{dt} = 0\right)$:

$$\mathbf{M}_s \mathbf{T}(t) + \mathbf{u}_m(t) + \mathbf{B}_0 T_0(t) + \mathbf{B}_{-1} T_{-1}(t) + \mathbf{Q}^{int}(t) + \mathbf{E} \Phi^{sol}(t) = 0$$

Da questa relazione di bilancio **statico** possiamo calcolare il valore **di regime** delle temperature **T con ingressi e disturbi costanti**, oppure al contrario determinare l'ingresso manipolabile \mathbf{u}_m corrispondente a valori desiderati di temperatura.

Per la sintesi **MPC** il processo deve essere modellato in forma variabili di stato a tempo discreto.

Accorpriamo tutti gli ingressi e i disturbi in un vettore complessivo che contiene le variabili manipolabili e le variabili disturbanti.

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m(t) \\ T_0(t) \\ T_{-1}(t) \\ \mathbf{Q}^{int}(t) \\ \Phi^{sol}(t) \end{bmatrix}$$

$$\rho c_a V \frac{dT}{dt} = \mathbf{M}_s \mathbf{T}(t) + \mathbf{u}_m(t) + \mathbf{B}_0 T_0(t) + \mathbf{B}_{-1} T_{-1}(t) + \mathbf{Q}^{int}(t) + \mathbf{E} \Phi^{sol}(t)$$



$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{A}_{TC} \mathbf{T}(t) + \mathbf{B}_{TC} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T}(t)$$

$$\mathbf{A}_{ss} = \frac{1}{\rho c_a} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{M}_s$$

$$\mathbf{B}_{ss} = \frac{1}{\rho c_a} \mathbf{V}^{-1} [\mathbf{I}_5 \quad \mathbf{B}_0 \quad \mathbf{B}_{-1} \quad \mathbf{I}_5 \quad \mathbf{E}]$$

$\mathbf{C} = \mathbf{I}_5$ (se le temperature delle 5 stanze sono tutte misurabili)

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \\ T_4(t) \\ T_5(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m(t) \\ T_0(t) \\ T_{-1}(t) \\ \mathbf{Q}^{int}(t) \\ \Phi^{sol}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_m(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{int}(t) = \begin{bmatrix} Q_1^{int}(t) \\ Q_2^{int}(t) \\ Q_3^{int}(t) \\ Q_4^{int}(t) \\ Q_5^{int}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{sol}(t) = \begin{bmatrix} \Phi_N(t) \\ \Phi_E(t) \\ \Phi_S(t) \\ \Phi_W(t) \end{bmatrix}$$

Lo script «`dati edificio.m`» implementa il calcolo di tutti i parametri che caratterizzano il modello dinamico ricavato.