



Università degli Studi di Cagliari

UNICA  
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI CAGLIARI

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

**Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2021/22**

# Instabilità delle strutture e calcolo a rottura

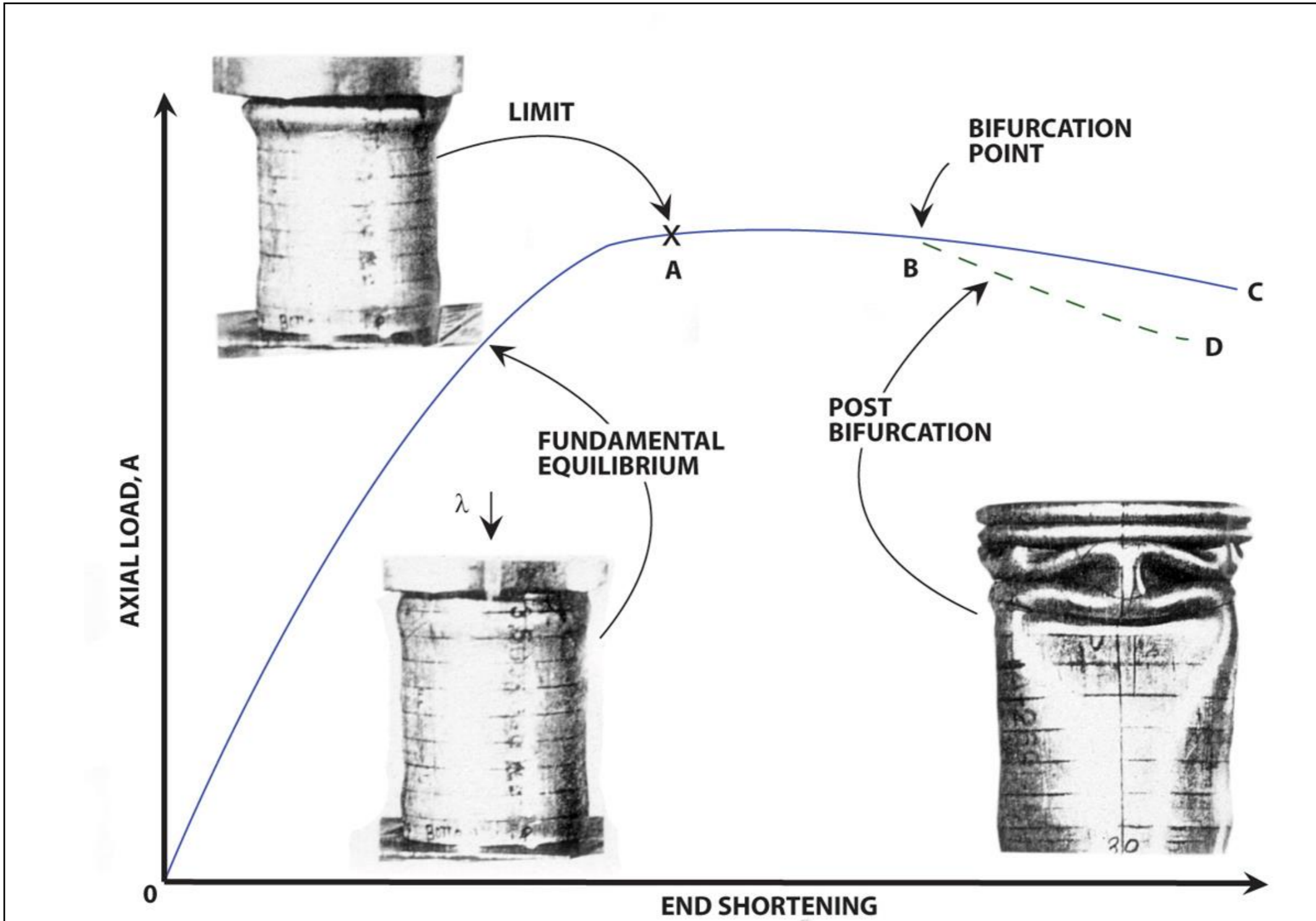
> **Lezione 20**

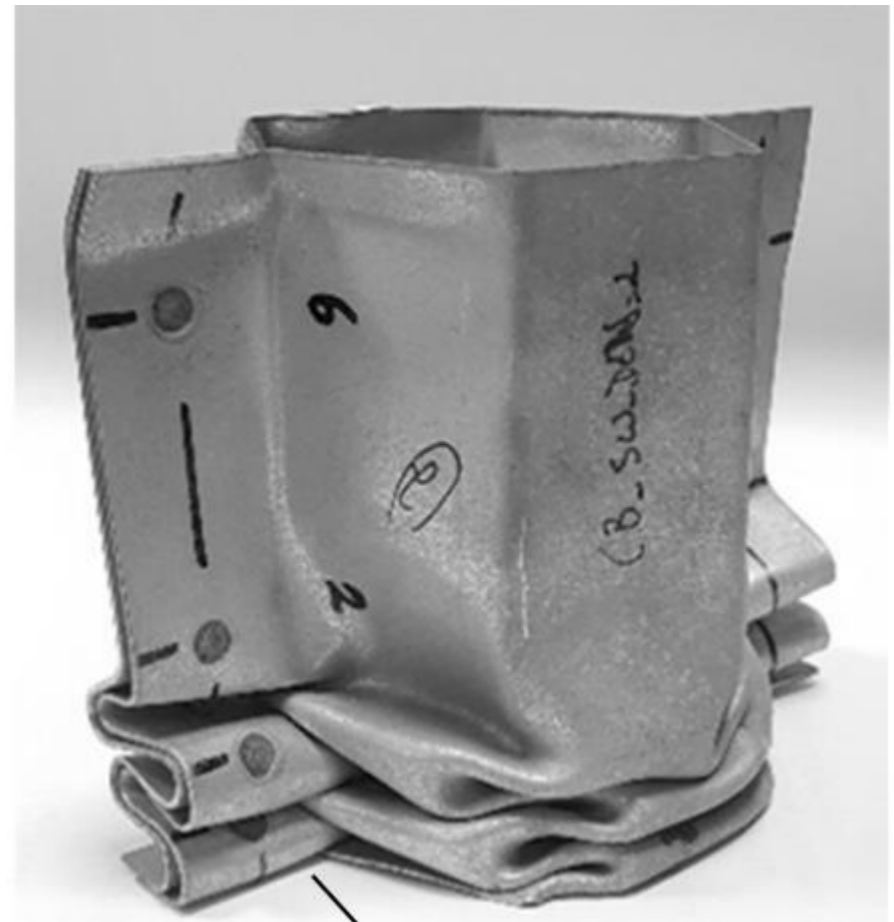
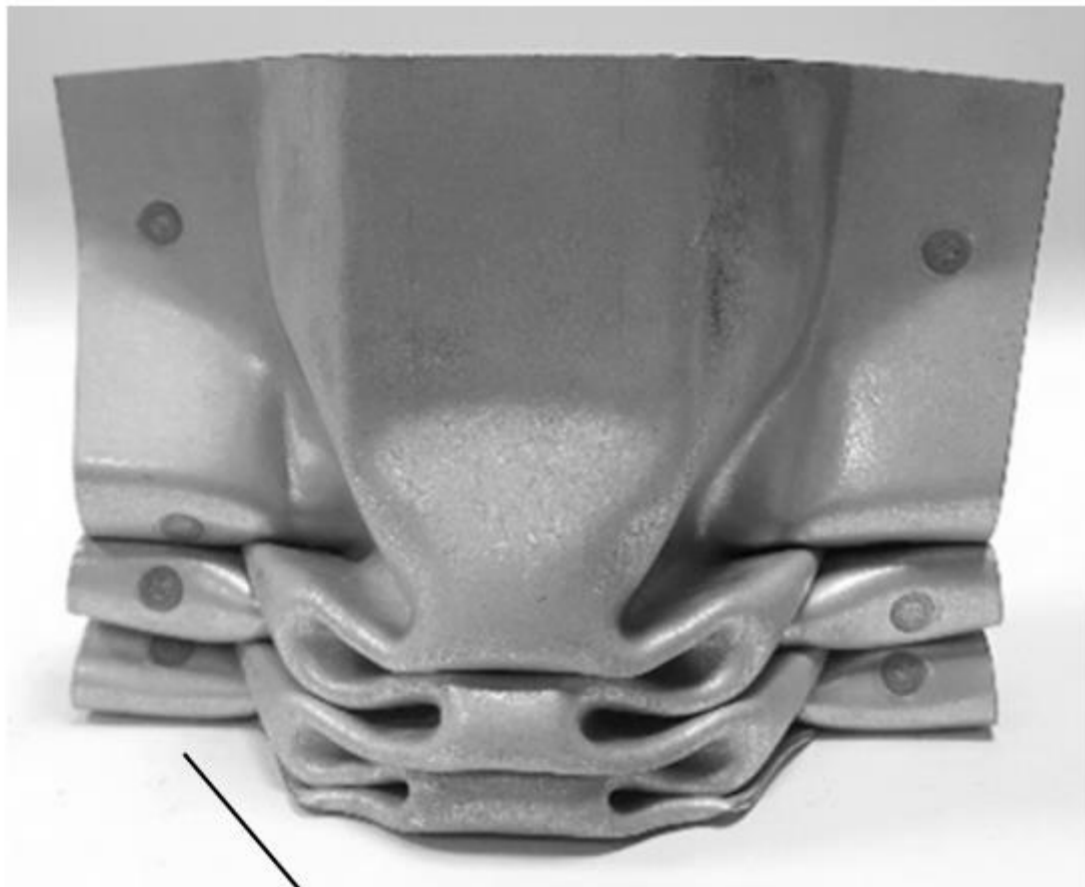
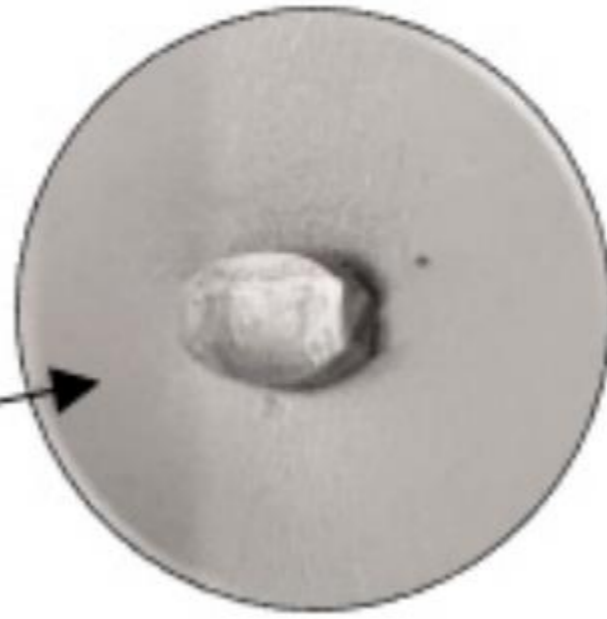
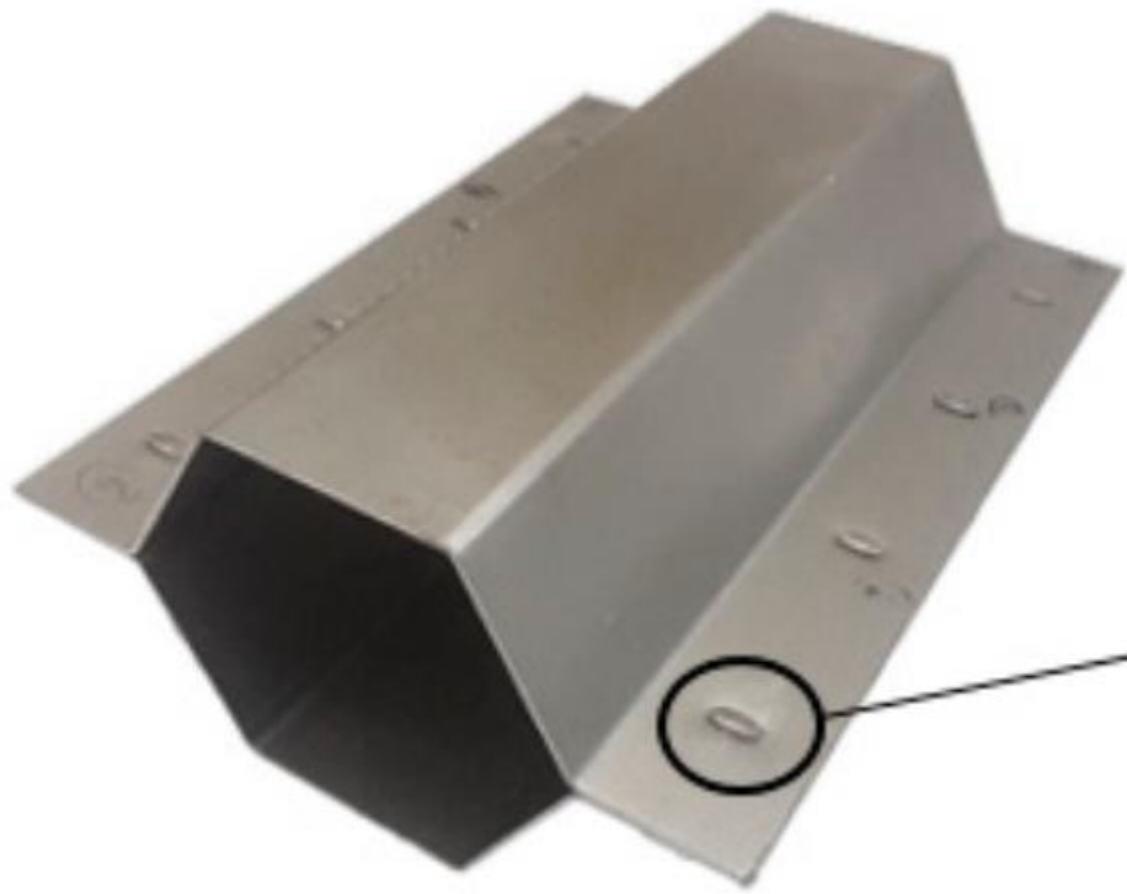
Buckling elasto-plastico

***Victor Eremeev***

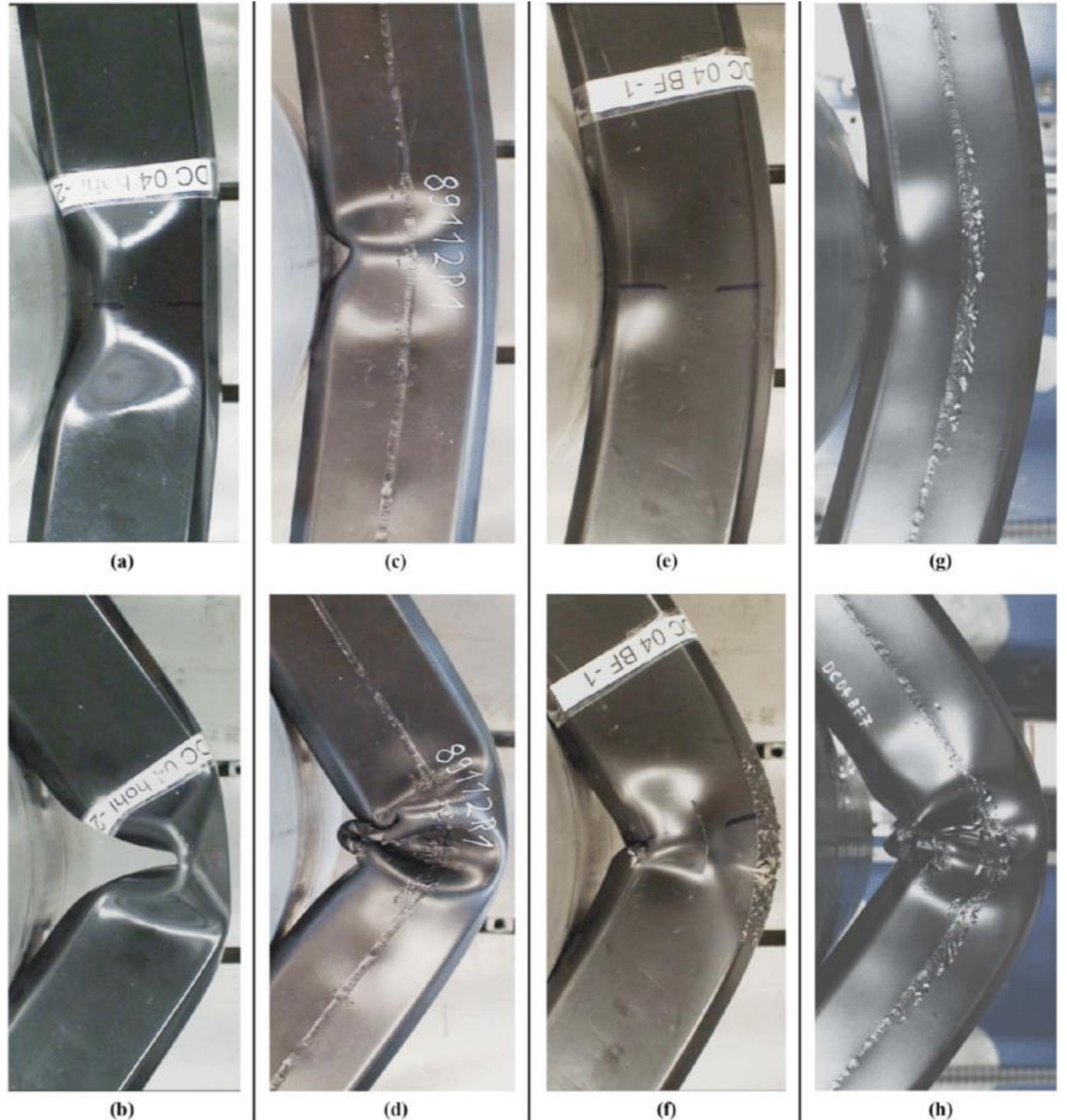
Dr. **Emanuele Reccia** / supporto al Corso  
emanuele.reccia@unica.it

victor.eremeev@unica.it





Zhou, Ping & Beeh,  
Elmar & Kriescher,  
Michael & Friedrich,  
Horst & Kopp, Gundolf.  
(2016). Dynamic  
bending behaviour of  
magnesium alloy  
rectangular thin-wall  
beams filled with  
polyurethane foam.  
International Journal of  
Crashworthiness. 21. 1-  
17.  
10.1080/13588265.2016  
.1208715.



# Buckling elasto-plastico dei sistemi piani di travi

Si analizza il buckling di travi e sistemi piani di travi in regime elasto-plastico. Si valuta il carico critico di una singola trave compressa, per la quale si illustrano le teorie classiche del *modulo di elasticità tangente* e del *modulo di elasticità ridotto*.

Si mostra come, al crescere del carico, ed in determinate circostanze, la biforcazione dell'equilibrio possa manifestarsi *prima* della formazione di un cinematismo di collasso. Si esemplifica la procedura per alcuni sistemi illustrativi, per i quali si sviluppino soluzioni analitiche, sia basate sulla regola approssimata dell'amplificazione, sia esatte.

# L'approccio statico alla stabilità dei sistemi elasto-plastici

Quando il buckling si verifica oltre il limite di elasticità, la relativa trattazione diventa oltremodo complessa, per ragioni  
(a) **algoritmiche**, e,  
(b) **concettuali**.

Riguardo le prime, le equazioni di equilibrio non possono essere derivate dalla stazionarietà dell'energia potenziale totale (non esistendo questa per un sistema non conservativo), ma vanno determinate attraverso il metodo diretto, oppure per mezzo dell'equazione dei lavori virtuali. Inoltre, la nonlinearietà costitutiva implica comportamenti meccanici 'a tratti', corrispondenti a successive plasticizzazioni, che impongono lo studio della risposta 'in fasi'.

## (b) concettuali.

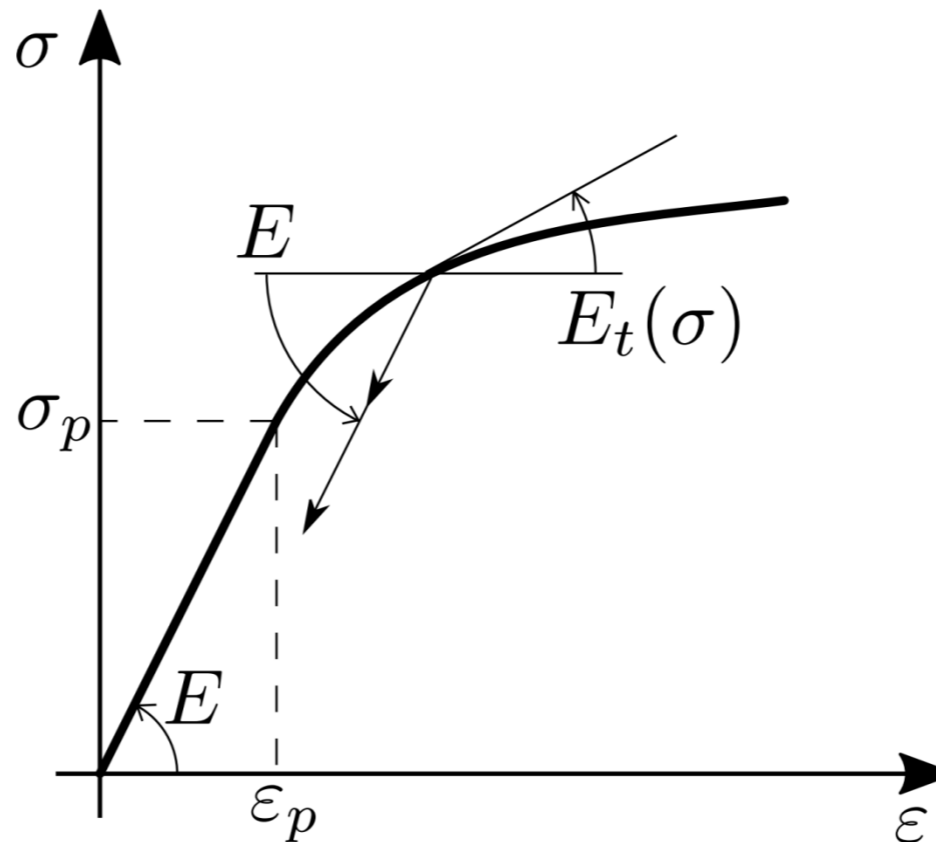
Riguardo le ragioni concettuali, l'approccio statico al fenomeno di instabilità, pure applicato con successo ai sistemi elastici, quale conseguenza del teorema di Lagrange-Dirichlet, non trova più la medesima giustificazione in fase elasto-plastica, venendo meno l'ipotesi fondamentale di conservazione dell'energia. Fanno eccezione i casi, pure frequenti, in cui le sollecitazioni sono monotonamente crescenti, o al più stazionarie, in ogni punto del corpo. Non verificandosi infatti rientri elastici, il sistema elasto-plastico si comporta come elastico nonlineare, al quale sono applicabili gli strumenti d'indagine già introdotti in elasticità. Nel caso più generale, tuttavia, in cui sono presenti scarichi elastici, e volendo limitare l'analisi (già complessa) al regime statico, occorre invocare il *Criterio Statico di Stabilità*, quale principio autonomo di stabilità. In base a tale criterio, anche detto *dell'equilibrioadiacente*, un sistema elasto-plastico perde di stabilità quando, all'aumentare del carico dallo zero, viene meno l'unicità della soluzione del problema meccanico, cioè quando la *matrice di rigidezza tangente diviene per la prima volta singolare*.

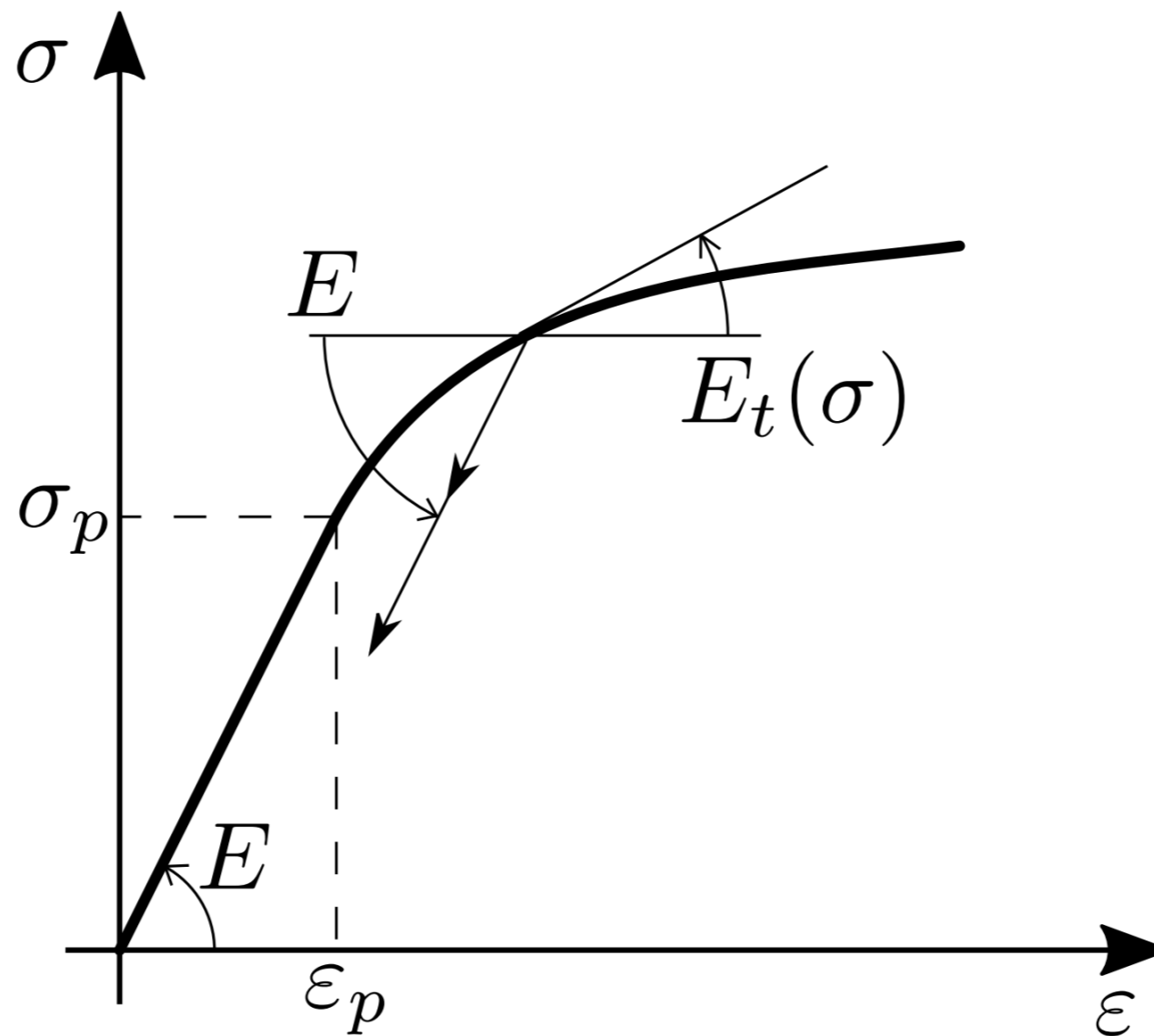
# Il buckling elasto-plastico della singola trave

- ★ La teoria del modulo elastico tangente
- ★ La teoria del modulo elastico ridotto

# La teoria del modulo elastico tangente

Si consideri una trave costituita da materiale elasto-plastico incrudente, il cui legame tensione-deformazione è rappresentato in **Figura**. Detta  $\sigma_p$  la tensione limite elastica (in cui si confondono le tensioni di proporzionalità e di snervamento): se  $|\sigma| \leq \sigma_p$  il materiale è in fase elastica lineare, se  $|\sigma| > \sigma_p$  il materiale è in fase plastica. Nella fase elastica, il modulo di elasticità (o di Young, uguale alla pendenza della retta) è  $E$ ; nella fase plastica, si definisce *modulo elastico tangente* la pendenza della tangente alla curva,  $E_t(\sigma) := \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ . Il modulo elastico tangente è minore o uguale al modulo di Young, cioè  $E_t(\sigma) \leq E$ , ed inoltre, a differenza di quest'ultimo, non è costante, ma è funzione della tensione  $\sigma$ .





Legame elasto-plastico incrudente, modulo di Young  $E$  e modulo tangente  $E_t$ .



Se la trave è compressa da una forza assiale  $P$ , che, nella configurazione rettilinea, induce sulla sezione di area  $A$  una tensione uniforme  $\sigma = \frac{P}{A}$  in modulo maggiore di  $\sigma_p$ , la trave si comporta ancora come elastica, ma con un modulo elastico apparente  $E_t(\sigma)$ , in luogo del modulo di Young  $E$ . Conseguentemente, il carico critico euleriano si modifica in:

$$P_c = \pi^2 \frac{E_t(\sigma_c) I}{\ell_0^2}$$

e la tensione critica  $\sigma_c = \frac{P_c}{A}$  diviene:

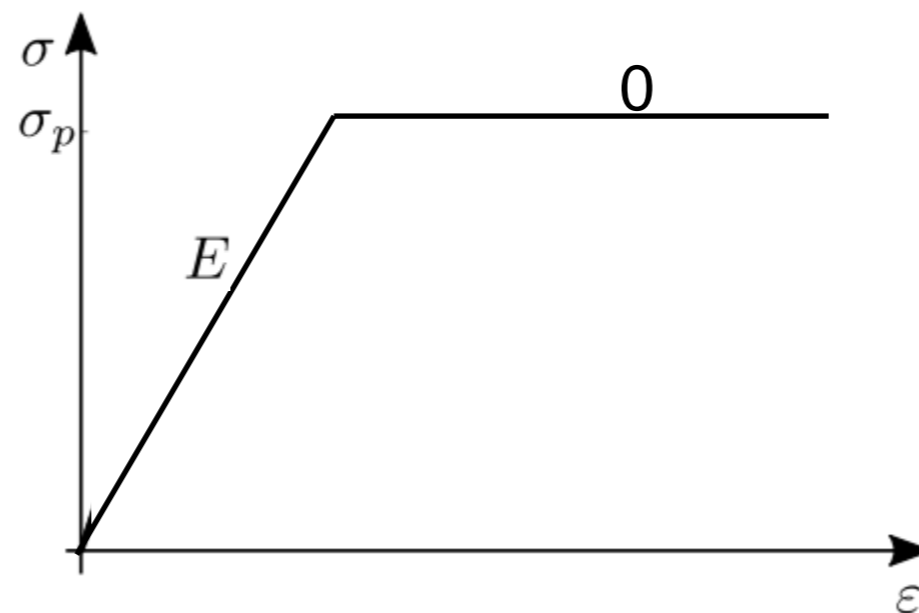
$$\sigma_c = \pi^2 \frac{E_t(\sigma_c)}{\lambda^2}$$

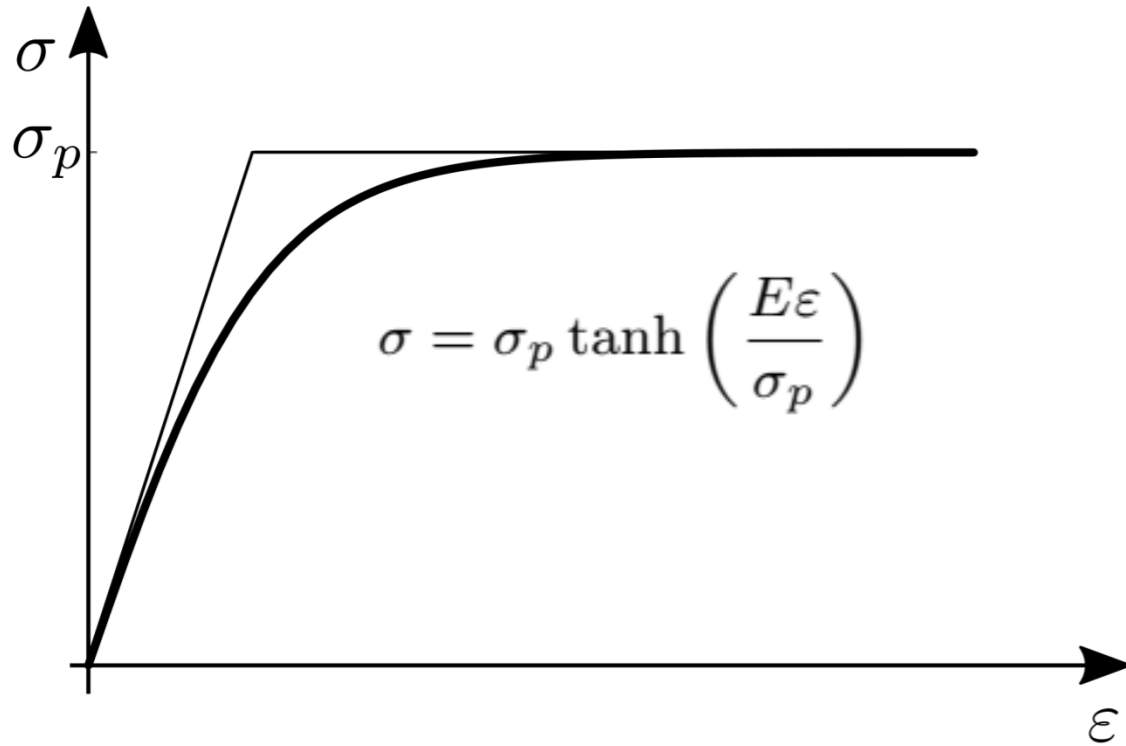
dove  $\lambda := \frac{\ell_0}{\varrho}$  è la snellezza della trave, e  $\varrho := \sqrt{\frac{I}{A}}$  il giratore d'inerzia della sezione. La precedente è nota come *tensione critica di Shanley*, sebbene sia stata prima introdotta da Engesser.

## Il legame elasto-plastico perfetto

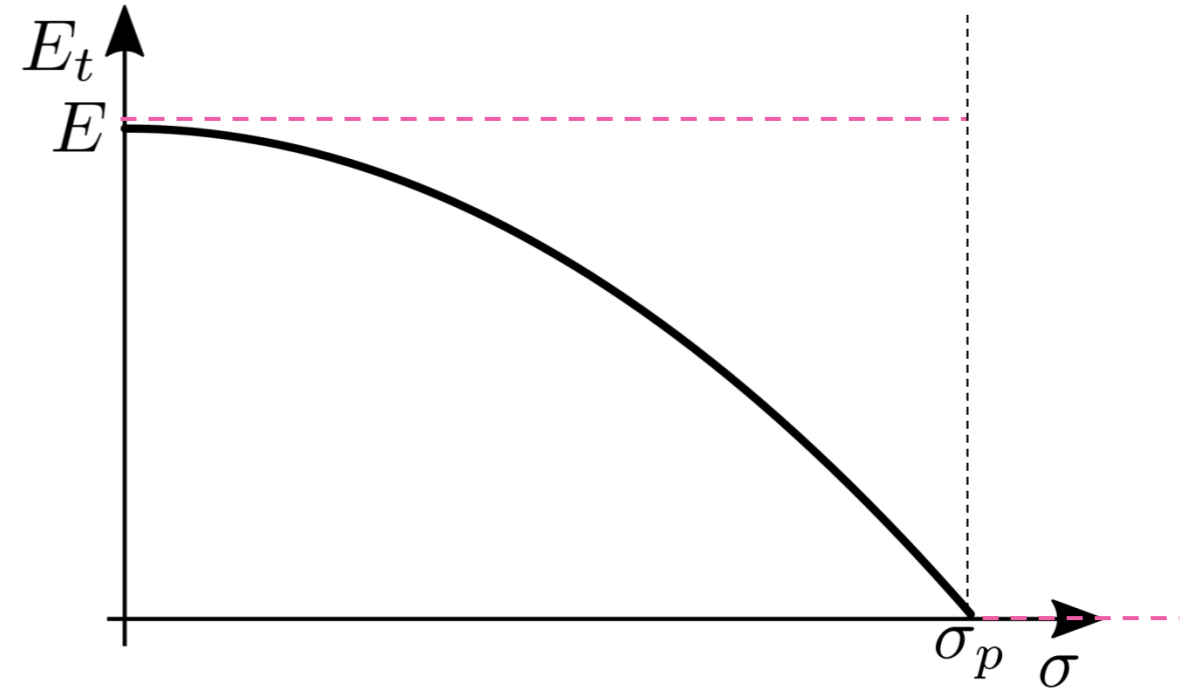
Quale esempio di applicazione della teoria del modulo elastico tangente, si consideri una trave costituita da materiale elasto-plastico perfetto.

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{se } |\varepsilon| \leq \frac{\sigma_p}{E} \\ \pm\sigma_p & \text{se } \varepsilon \gtrless \pm \frac{\sigma_p}{E} \end{cases}$$





(a)


 (b)  $E_t(\sigma) = E \left(1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_p}\right)^2\right)$ 

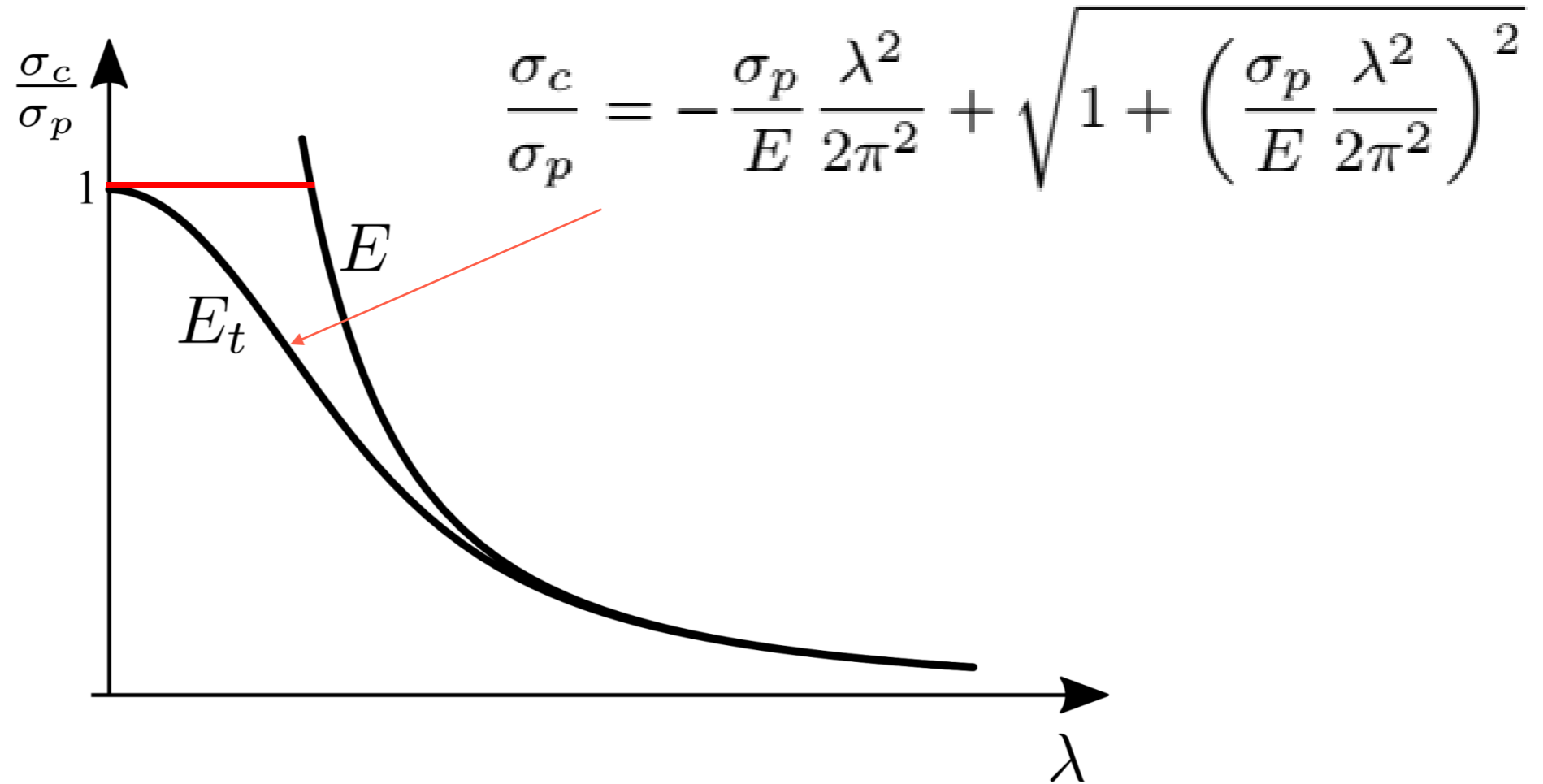
Legame elasto-plastico perfetto: (a) regolarizzazione del legame,  
(b) modulo elastico tangente in funzione della tensione,



$$\sigma = \sigma_p \tanh \left( \frac{E\varepsilon}{\sigma_p} \right) \quad E_t = \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon}$$

$$E_t(\sigma) = E \left( 1 - \left( \frac{\sigma}{\sigma_p} \right)^2 \right) \quad \sigma_c = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \left( 1 - \left( \frac{\sigma_c}{\sigma_p} \right)^2 \right)$$

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_p} = -\frac{\sigma_p}{E} \frac{\lambda^2}{2\pi^2} + \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma_p}{E} \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \right)^2}$$



(c)

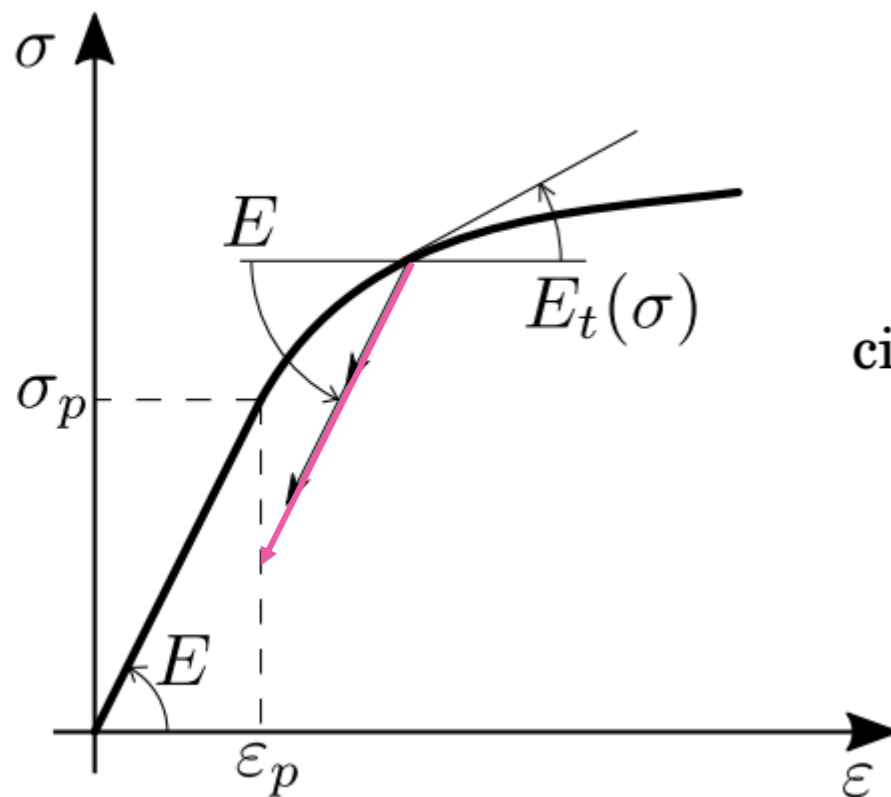
(c) tensione critica in funzione della snellezza

(curva  $E_t$ ), confrontata con la legge di Eulero (curva  $E$ ).

## La teoria del modulo elastico ridotto

Il metodo del modulo elastico tangente si presta ad una fondata obiezione. Quando la trave perde di stabilità e si inflette, occorre distinguere il comportamento delle fibre compresse (dalla parte della concavità della trave) da quello delle fibre tese (dalla parte della convessità della trave). Poiché sul percorso fondamentale tutte le fibre sono egualmente compresse, le prime sperimentano un *aumento (in valore assoluto) di compressione*, descritto dal modulo elastico tangente  $E_t$ ; le seconde, tuttavia, subiscono una *riduzione di compressione*, che induce uno scarico elastico, descritto dal modulo elastico  $E$  (si veda ancora la **Figura** ). In definitiva, la relazione tra incremento di tensione  $\dot{\sigma}$  ed incremento di deformazione  $\dot{\varepsilon}$  è:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E_t \dot{\varepsilon} & \text{se } \dot{\varepsilon} < 0 \\ E \dot{\varepsilon} & \text{se } \dot{\varepsilon} > 0 \end{cases}$$



cioè il materiale si comporta come elastico, ma *bi-modulare*.



Si consideri dunque la generica sezione della trave, soggetta a compressione uniforme e ad un disturbo infinitesimo che induca flessione. Detta  $\dot{\kappa}$  la curvatura incrementale alla generica ascissa, e assunta valida la conservazione delle sezioni piane, il campo di elongazioni sulla sezione è descritto da  $\dot{\varepsilon} = \dot{\kappa}y_n$ , dove  $y_n$  è la distanza orientata misurata dall'asse neutro incognito. Poiché lo sforzo normale resta invariato nella perturbazione, e tenuto costante ad  $N_0 = -P$ , l'equilibrio alla traslazione della sezione richiede che sia:

$$\dot{N} = \int_{\mathcal{A}} \dot{\sigma} dA = \int_{\mathcal{A}^+} E \dot{\kappa} y_n dA + \int_{\mathcal{A}^-} E_t \dot{\kappa} y_n dA = 0$$

dove  $\mathcal{A}^+$  è la regione tesa,  $\mathcal{A}^-$  quella compressa  
Da queste si ricava l'equazione dell'asse neutro:

$$E S_n^+ + E_t S_n^- = 0$$

in cui  $S_n^\pm$  sono i momenti statici delle aree  $\mathcal{A}^\pm$  rispetto all'asse neutro

dall'equilibrio alla rotazione, si trae:

$$\dot{M} = \int_A \dot{\sigma} y_n dA = \int_{A^+} E \dot{\kappa} y_n^2 dA + \int_{A^-} E_t \dot{\kappa} y_n^2 dA$$

da cui si ottiene la legge momento-curvatura:

$$\dot{M} = (E I_n^+ + E_t I_n^-) \dot{\kappa}$$

dove  $I_n^\pm$  sono i momenti d'inerzia delle aree  $A^\pm$  rispetto all'asse neutro.

Questa può più convenientemente riscriversi come:

$$\dot{M} = E_r I_y \dot{\kappa}$$

dove:

$$E_r := \frac{E I_n^+ + E_t I_n^-}{I_y}$$

è il modulo elastico ridotto e  $I_y$  è il momento d'inerzia dell'intera sezione *valutato rispetto all'asse baricentrico*. Si può verificare che  $E_t < E_r < E$ .

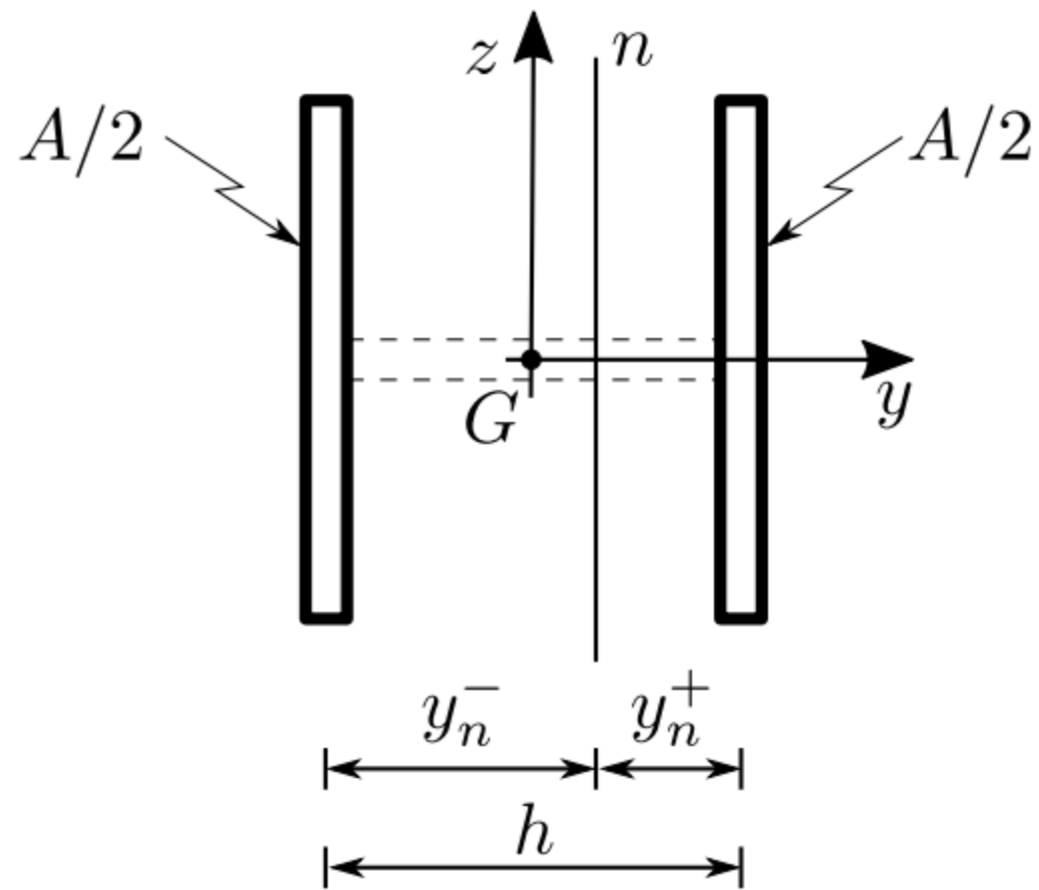
Poiché la legge  $\dot{M} = E_r I_y \dot{\kappa}$

è formalmente analoga a quella di un materiale monomodulare, si trae che la tensione critica della colonna bi-modulare è:

$$\sigma_c = \pi^2 \frac{E_r (\sigma_c)}{\lambda^2}$$

La formula è nota come *tensione critica di Von Kármán*

## Il modulo di elasticità ridotto della sezione a doppio T limite



Modulo elastico ridotto della sezione a doppio T limite.

Si consideri una sezione a doppio T limite, costituita da due piattabande, ciascuna di area  $A/2$ , collegate da un'anima evanescente, poste a distanza  $h$  (Fig. ). Denotate con  $y_n^+$  ed  $y_n^- = h - y_n^+$  le distanze dall'asse neutro incognito, rispettivamente della piattabanda tesa e compressa, si scrive:

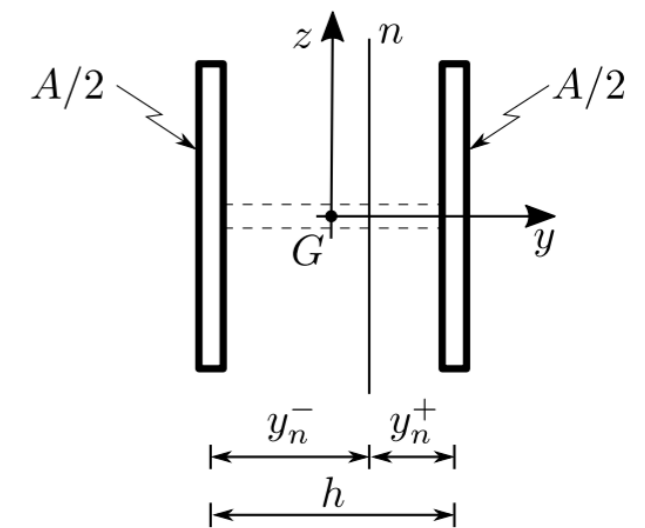
$$\frac{A}{2} [E y_n^+ - E_t (h - y_n^+)] = 0 \longleftarrow E S_n^+ + E_t S_n^- = 0$$

da cui si ricava:

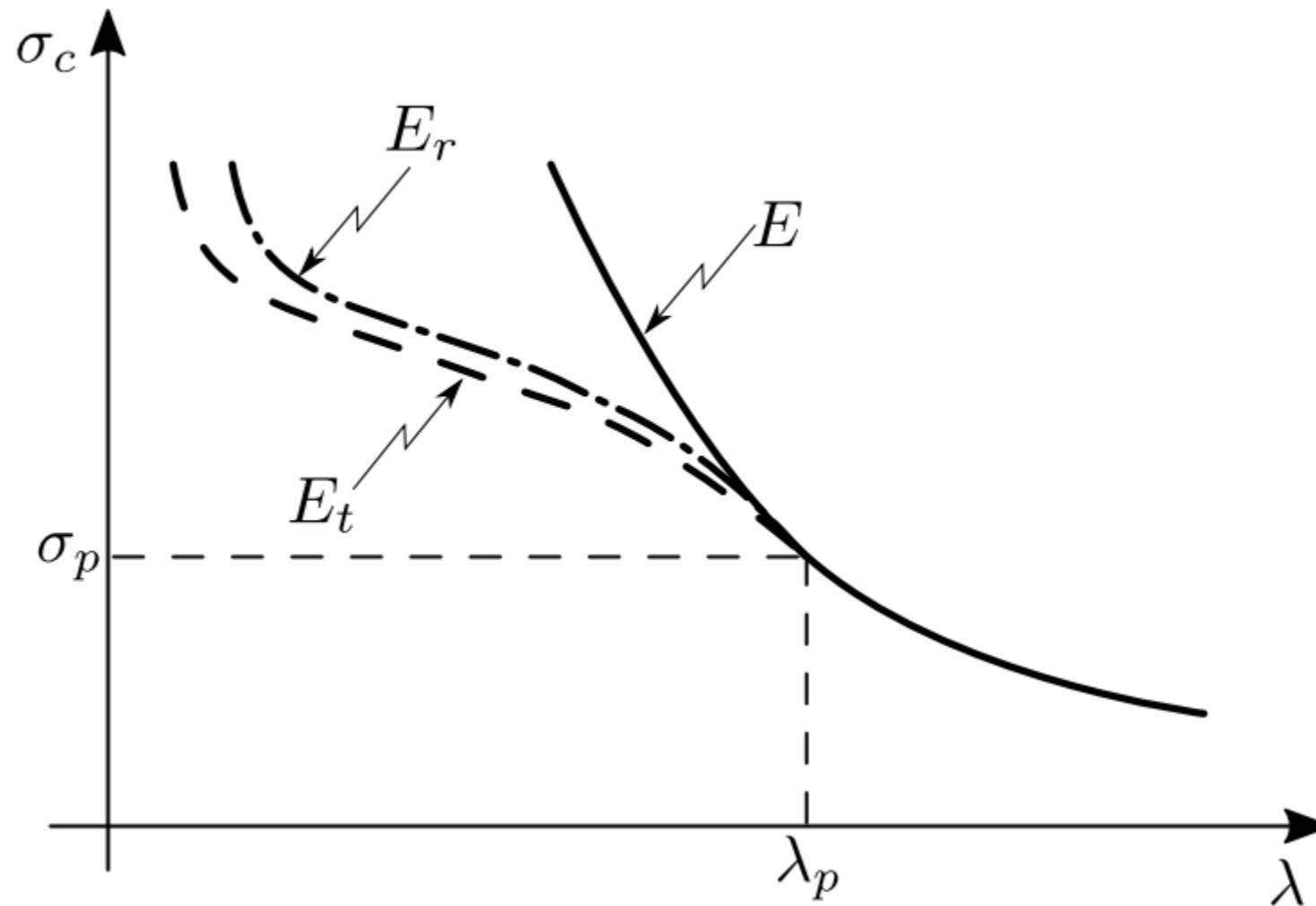
$$y_n^+ = \frac{E_t}{E + E_t} h, \quad y_n^- = \frac{E}{E + E_t} h$$

I momenti d'inerzia delle due piattabande, calcolati rispetto all'asse neutro, sono  $I_n^\pm = \frac{A}{2} y_n^{\pm 2}$ , mentre il momento d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse baricentrico è  $I_y = A \left(\frac{h}{2}\right)^2$ . Conseguentemente, si trae il modulo elastico ridotto:

$$E_r := \frac{E I_n^+ + E_t I_n^-}{I_y} \longrightarrow E_r = \frac{2E E_t}{E + E_t}$$



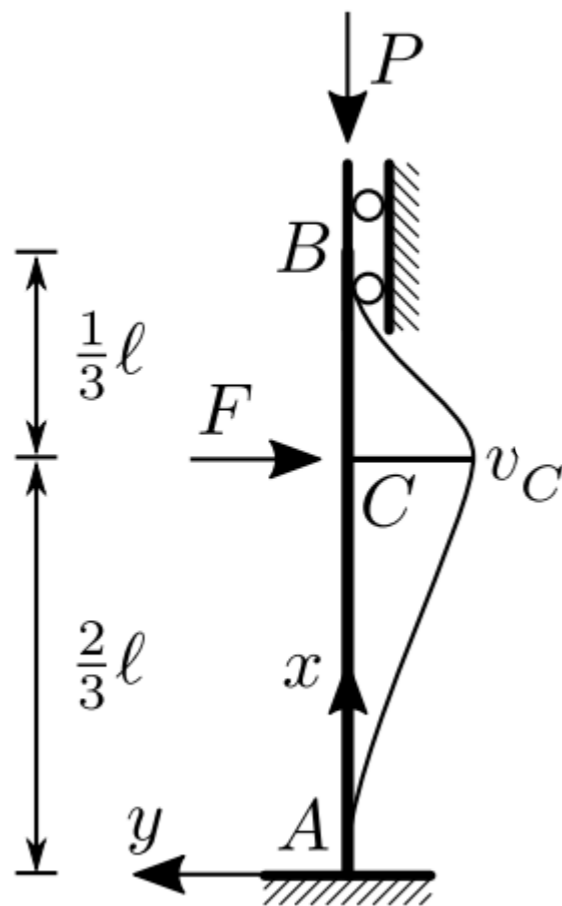
Procedendo come già descritto per la formula di Shanley,



**Figura** Tensione critica in funzione della snellezza;  $E$ : curva di Eulero;  $E_t$ : teoria del modulo elastico tangente;  $E_r$ : teoria del modulo elastico ridotto.

La colonna compressa soggetta a forze trasversali monotonamente crescenti

Quale esempio si considera una colonna  $AB$  di luce  $\ell$  e rigidezza  $EI$ , doppiamente incastrata, soggetta ad una forza verticale di compressione  $P$  tenuta costante, e ad una forza orizzontale  $F$ , applicata nel punto  $C$  sito a  $2/3$  dell'altezza, che è fatta crescere. Si vuole determinare la curva push-over  $F = F(v_c)$ , con  $v_c$  lo spostamento di  $C$ , positivo se concorde con la forza.



$$M = \begin{cases} EI \kappa & |\kappa| \leq \frac{M_p}{EI} \\ \pm M_p & \kappa \gtrless \pm \frac{M_p}{EI} \end{cases}$$

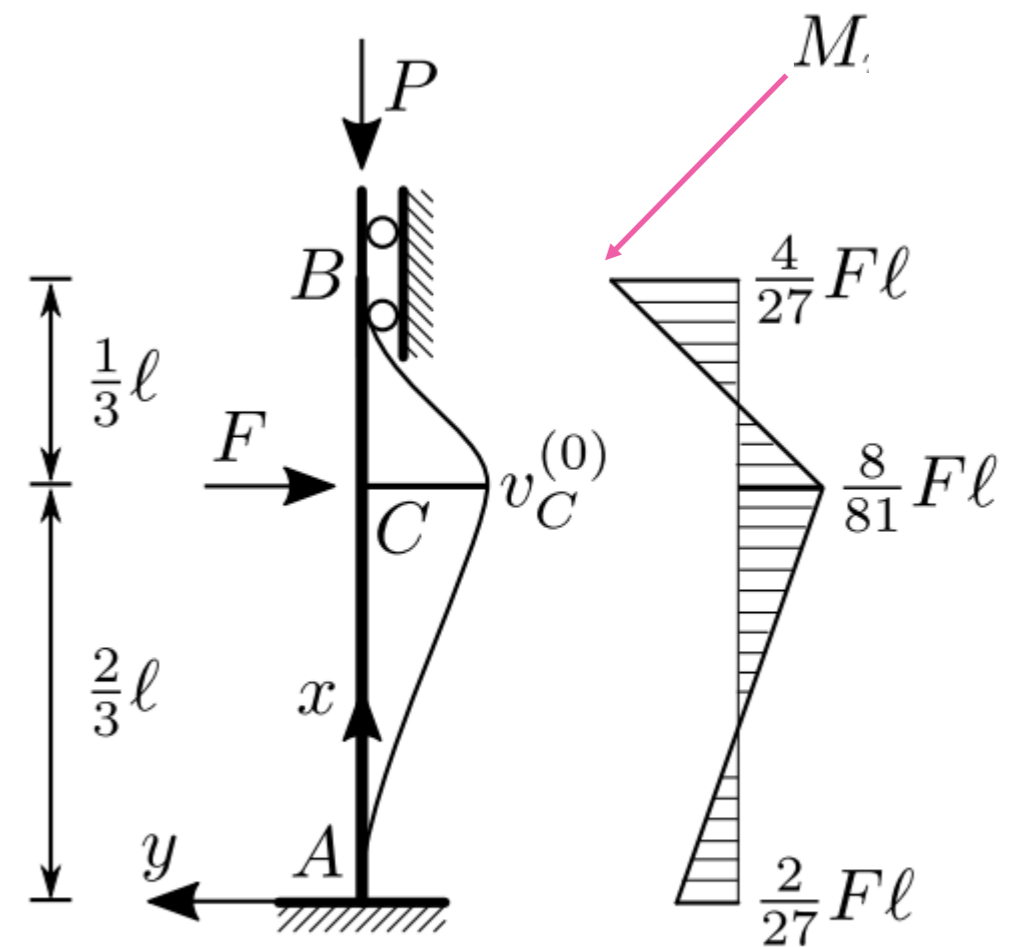
dove  $M_p$  è il momento plastico,

## Risposta push-over al primo ordine

Si ignora dapprima la forza verticale  $P$ , e si esegue l'analisi secondo la teoria lineare. Al crescere della forza  $F$ , si distinguono le seguenti strutture evolutive, o fasi

- la colonna (denotata come struttura 0) è interamente elastica, cosicché lo schema statico è quello della trave incastro-glifo; il relativo diagramma dei momenti è indicato in

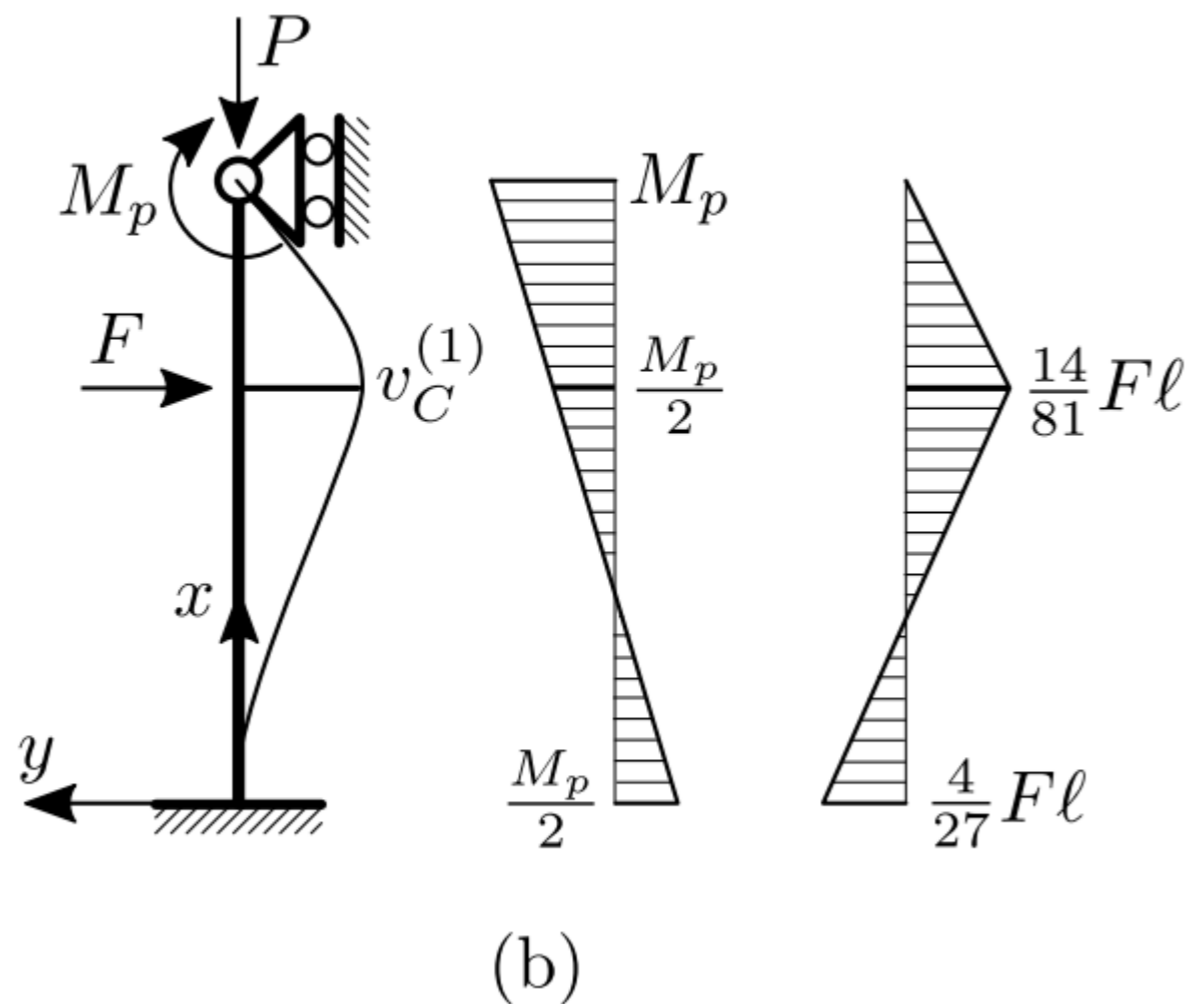
$$v_C^{(0)} = \frac{8}{2187} \frac{F \ell^3}{EI}$$



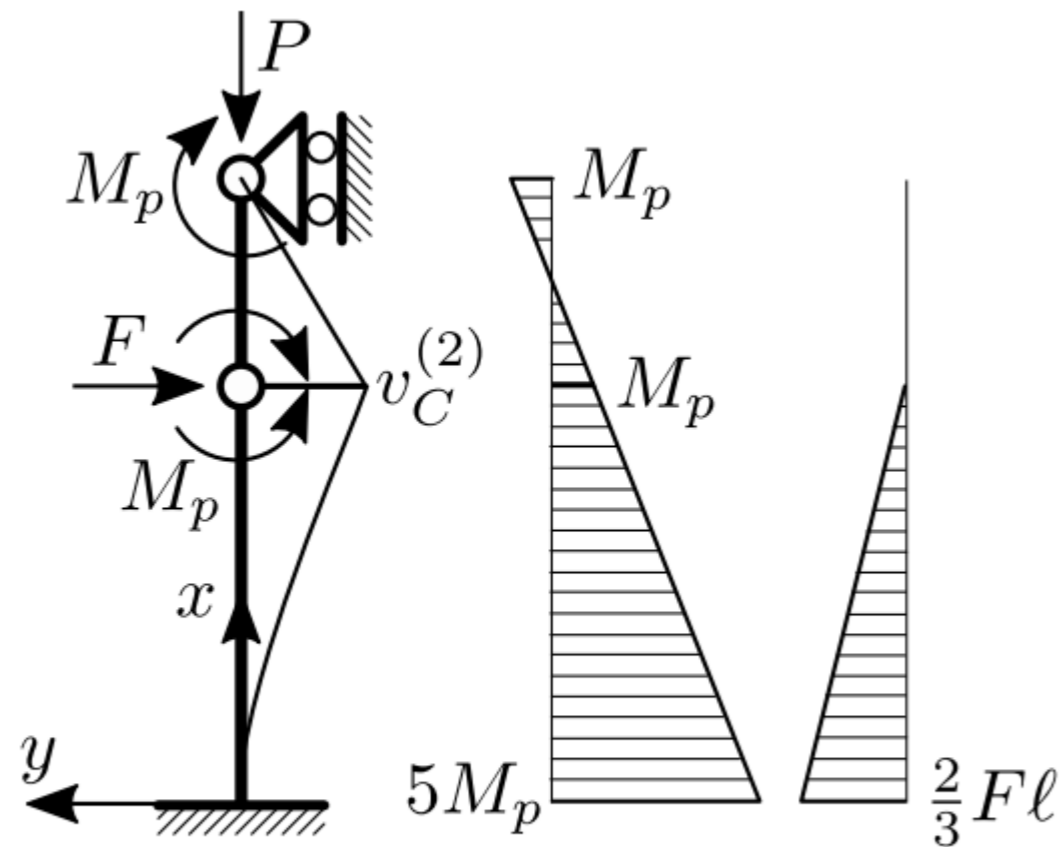
(a)

- la colonna (denotata come struttura 1) si è plasticizzata in testa, cosicché lo schema statico è quello della trave incastro-carrello; il diagramma dei momenti è somma di quello relativo al momento di plasticizzazione  $M_p$  agente in testa, e quello relativo alla forza  $F$ , indicati in **Figura** ; lo spostamento di  $C$  è uguale a:

$$v_C^{(1)} = \frac{20}{2187} \frac{F \ell^3}{EI} - \frac{1}{27} \frac{M_p \ell^2}{EI}$$



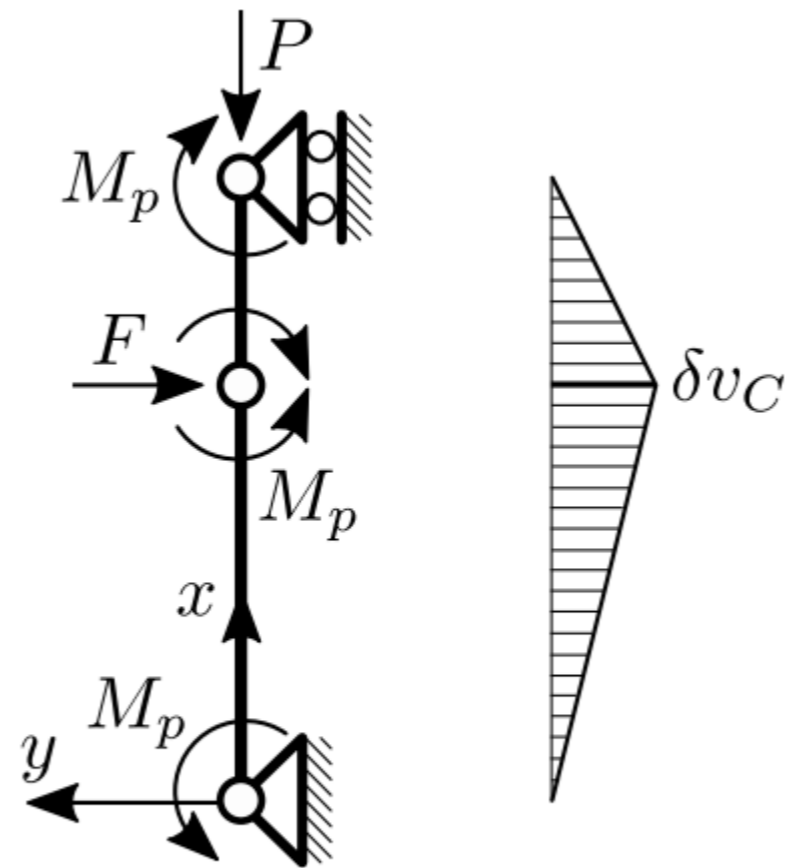
- la colonna (denotata come struttura 2) si è plasticizzata sia in testa sia in campata, nel punto  $C$ , cosicché lo schema statico è quello di una mensola che supporta uno dei due estremi di una trave appoggiata; il diagramma dei momenti è somma di quello indotto dalle tre coppie  $M_p$ , agenti alle due cerniere (una esterna in testa ed una interna in campata), nonché alla forza  $F$ , lo spostamento in  $C$  è uguale a:



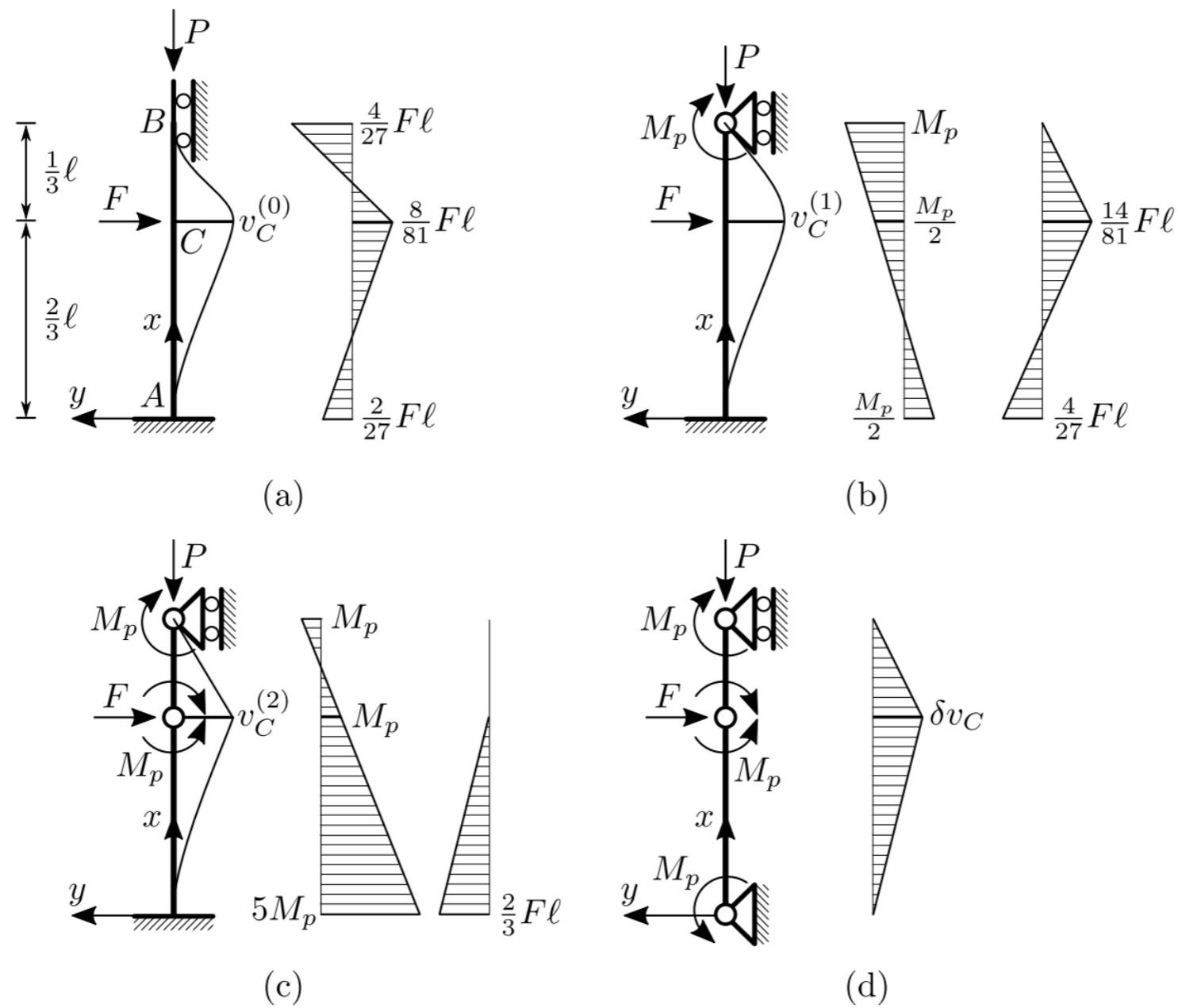
$$v_C^{(2)} = \frac{8}{81} \frac{F\ell^3}{EI} - \frac{22}{27} \frac{M_p\ell^2}{EI}$$

(c)

- Successivamente la struttura collassa all'atto della formazione della terza cerniera plastica al piede dove è indicato anche il cinematismo di collasso.



(d)



**Figura** Schemi statici evolutivi di una trave doppiamente incastrata e relativi diagrammi dei momenti: (a) colonna elastica (struttura 0), (b) colonna plasticizzata in testa (struttura 1), (c) colonna plasticizzata in testa ed in campata (struttura 2), (d) cinematismo di collasso.

La fase 0 ha termine all'atto della formazione della prima cerniera plastica, cioè quando il momento flettente in testa,  $-\frac{4}{27}F\ell$ , eguaglia il momento plastico  $-M_p$ ; forza e spostamento corrispondenti valgono:

$$F_1 := \frac{27}{4} \frac{M_p}{\ell} = 6.75 \frac{M_p}{\ell}, \quad v_{C1} := \frac{2}{81} \frac{M_p \ell^2}{EI} \simeq 0.025 \frac{M_p \ell^2}{EI}$$

dove  $v_{C1}$  denota  $v_C^{(0)}$  calcolato per  $F = F_1$ .

La fase 1 termina all'atto della formazione della seconda cerniera plastica, cioè quando il momento in  $C$ ,  $\frac{14}{81}F\ell - \frac{M_p}{2}$ , eguaglia il momento ultimo  $M_p$ ; forza e spostamento corrispondentemente valgono:

$$F_2 := \frac{243}{28} \frac{M_p}{\ell} \simeq 8.68 \frac{M_p}{\ell}, \quad v_{C2} := \frac{8}{189} \frac{M_p \ell^2}{EI} \simeq 0.042 \frac{M_p \ell^2}{EI}$$

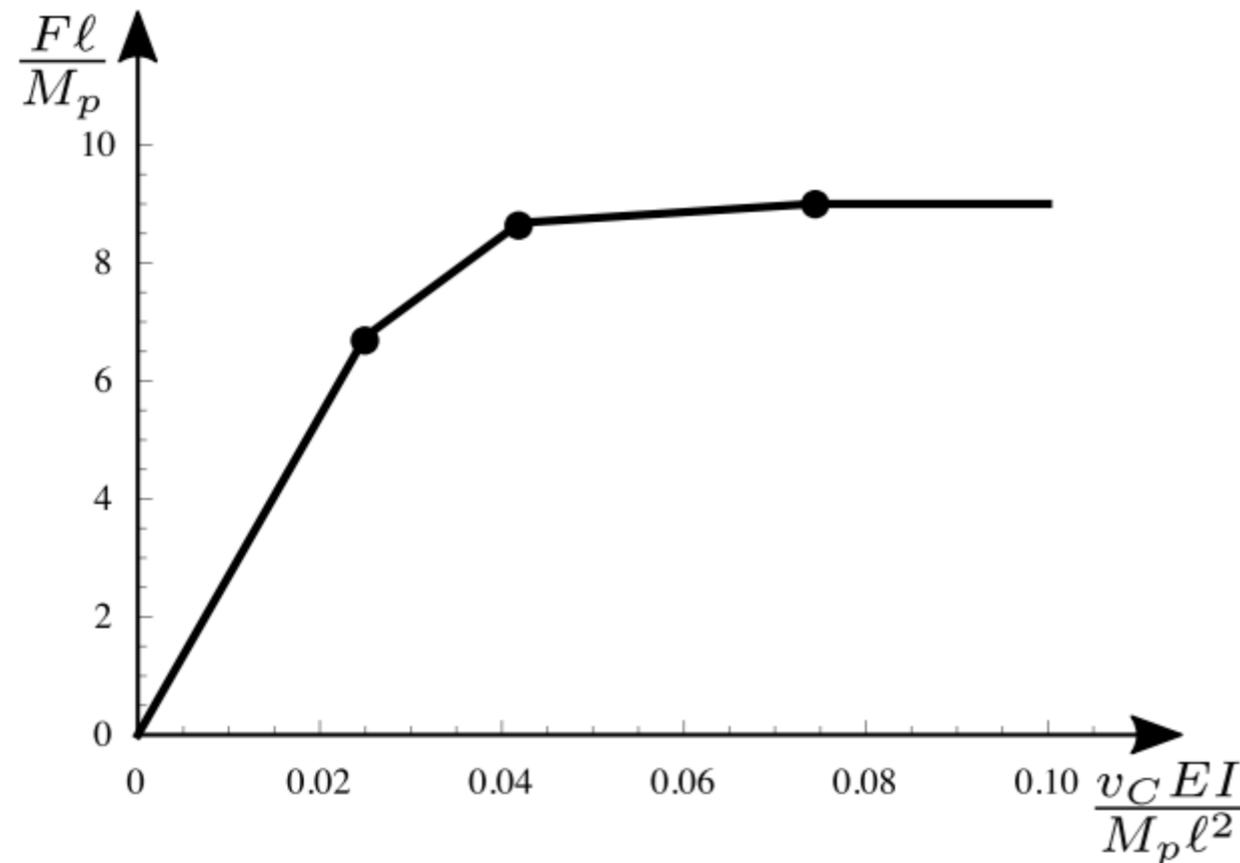
dove  $v_{C2}$  denota  $v_C^{(1)}$  calcolato per  $F = F_2$ .

Il collasso si verifica quando, al termine della fase 2, il momento flettente al piede,  $-\frac{2}{3}F\ell + 5M_p$ , eguaglia il momento ultimo  $-M_p$ ; forza e spostamento corrispondentemente valgono:

$$F_u := F_3 := 9 \frac{M_p}{\ell}, \quad v_{C3} := \frac{2}{27} \frac{M_p \ell^2}{EI} \simeq 0.074 \frac{M_p \ell^2}{EI}$$

dove  $v_{C3}$  denota  $v_C^{(2)}$  calcolato per  $F = F_3$ .

Riportando infine nel piano  $(F, v_C)$  i punti di coordinate  $(F_k, v_{Ck})$ , ed unendoli con dei segmenti, si ottiene la cercata curva push-over ( **Figura** ). L'ultimo tratto, orizzontale, indica la labilizzazione della colonna.



analisi al I ordine

Curva push-over per la colonna doppiamente incastrata

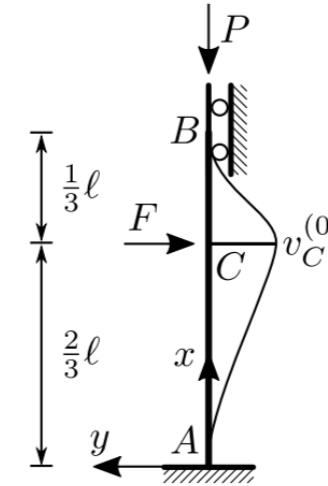
## Risposta push-over al secondo ordine

Si tengono ora in conto gli effetti geometrici indotti dalla forza  $P$ , sin qui trascurati. Preliminarmente, si valutano i carichi critici  $P_c^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2$ ) di ciascuna delle strutture che descrivono l'evoluzione elasto-plastica della colonna. Si ha:

$$P_c^{(0)} = 4 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

$$P_c^{(1)} = 2.05 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

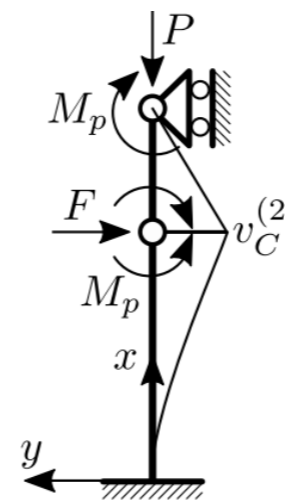
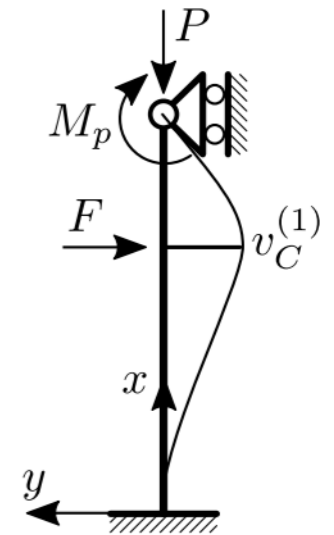
$$P_c^{(2)} = 0.213 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$



$P_c^{(0)}$  è il carico critico della trave doppiamente incastrata

$P_c^{(1)}$  il carico critico della trave incastro-appoggio

$P_c^{(2)}$  è il carico critico di una mensola disposta in serie ad una biella



$$P_c^{(2)} < P_c^{(1)} < P_c^{(0)}$$

Quando sulla colonna agisce la forza assiale  $P$ , il diagramma dei momenti  $M^{(k)}(x)$  e lo spostamento  $v_C^{(k)}$  di ciascuna struttura  $k = 0, 1, 2$ , valutati al I ordine, sono (circa) amplificati di:

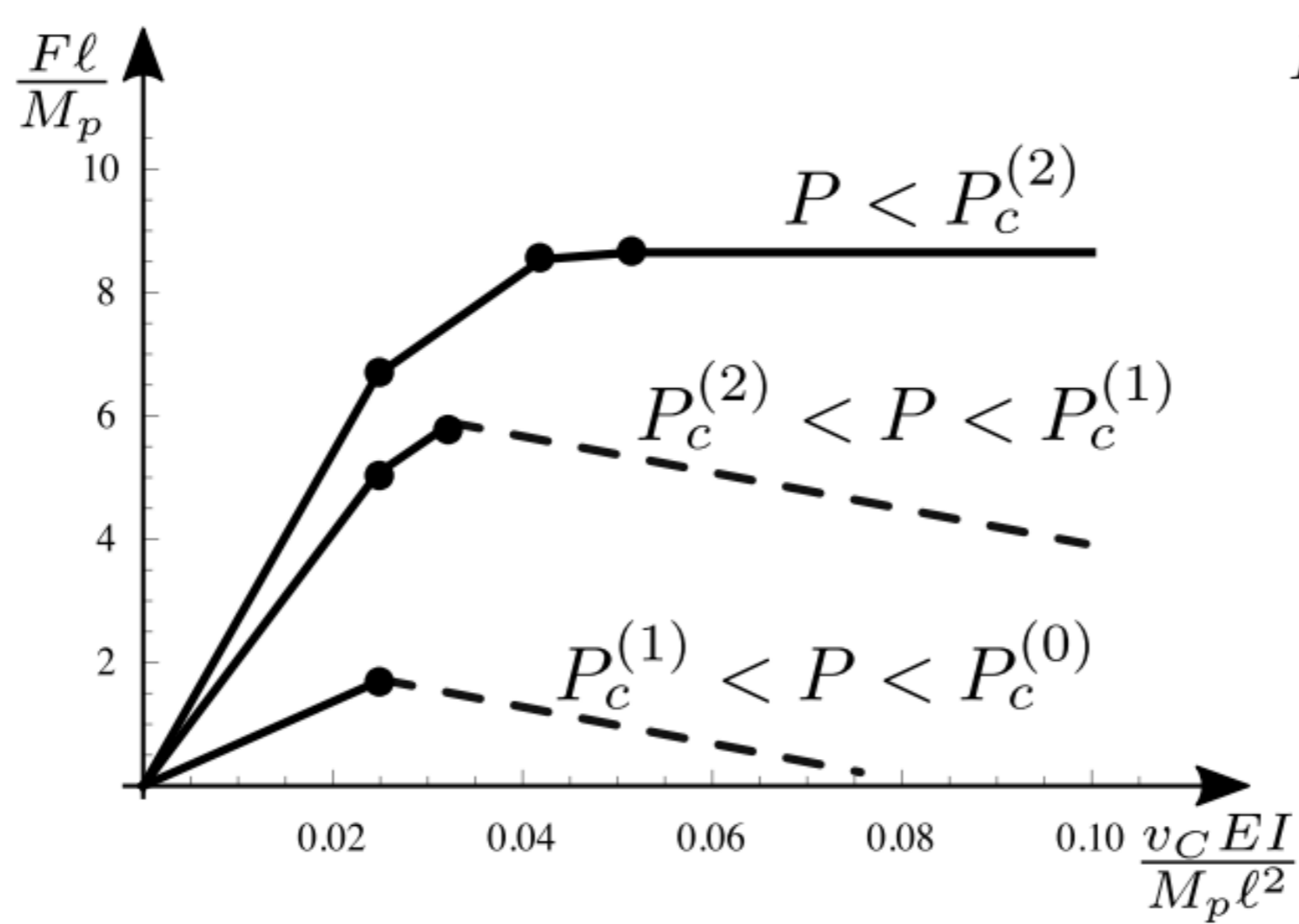
$$\alpha^{(k)} := \frac{1}{1 - \frac{P}{P_c^{(k)}}}$$

risulta cioè:

$$\tilde{M}^{(k)}(x) = \alpha^{(k)} M^{(k)}(x), \quad \tilde{v}_C^{(k)} = \alpha^{(k)} v_C^{(k)}$$

dove la tilde denota la grandezza al II ordine. È possibile allora ripetere l'analisi precedente ed ottenere i valori di forza  $\tilde{F}_{k+1}$  e spostamento  $\tilde{v}_{Ck+1}$  all'atto della formazione della  $k$ -esima cerniera plastica. Questi valori si desumono dalle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{27} \alpha^{(0)} \tilde{F}_1 \ell &= -M_p, & \tilde{v}_{C1} &= \alpha^{(0)} \frac{8}{2187} \frac{\tilde{F}_1 \ell^3}{EI}, \\ \alpha^{(1)} \left( \frac{14}{81} \tilde{F}_2 \ell - \frac{M_p}{2} \right) &= M_p, & \tilde{v}_{C2} &= \alpha^{(1)} \left( \frac{20}{2187} \frac{\tilde{F}_2 \ell^3}{EI} - \frac{1}{27} \frac{M_p \ell^2}{EI} \right), \\ \alpha^{(2)} \left( -\frac{2}{3} \tilde{F}_3 \ell + 5M_p \right) &= -M_p, & \tilde{v}_{C2} &= \alpha^{(2)} \left( \frac{8}{81} \frac{\tilde{F}_3 \ell^3}{EI} - \frac{22}{27} \frac{M_p \ell^2}{EI} \right) \end{aligned}$$



Curva push-over per la colonna doppiamente incastrata

analisi al II ordine, con  $\frac{P\ell^2}{\pi^2 EI} = 0.05, 1, 3$ .

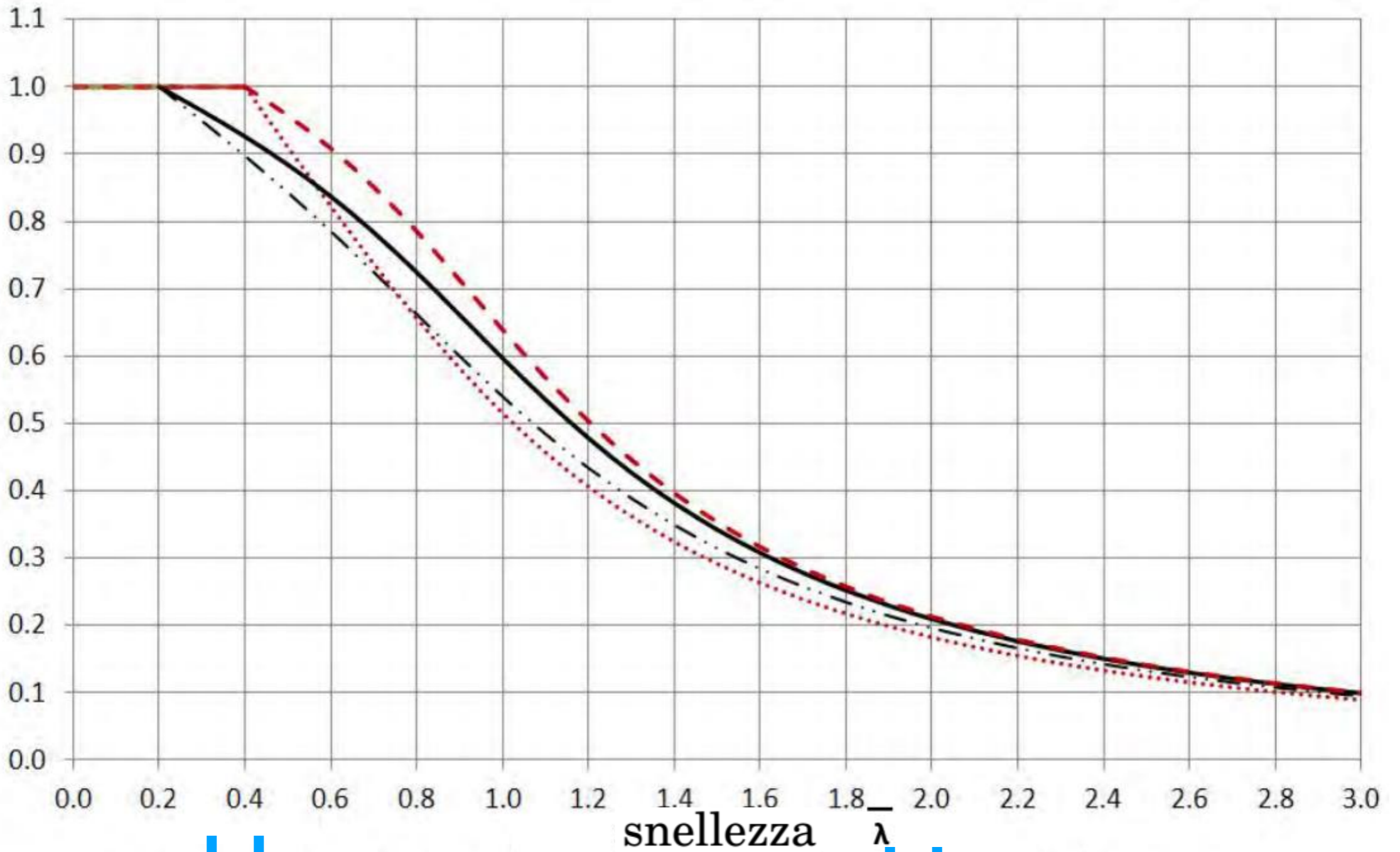
Le curve esemplificano i seguenti casi.

- $P < P_c^{(2)}$ , cioè la forza assiale è più piccola del più piccolo carico critico. Il fenomeno d'instabilità non si manifesta, e la struttura raggiunge il collasso per labilizzazione, come nella teoria del primo ordine. Tuttavia, gli effetti geometrici rendono la colonna più flessibile, cosicché la curva push-over è più bassa .
- $P_c^{(2)} < P < P_c^{(1)}$ . La struttura 0 evolve nella struttura 1, come nel caso precedente, ma con maggiori deformazioni, a causa del maggiore effetto geometrico. Quando però la struttura 1 si modifica nella struttura 2, cioè all'atto della formazione della seconda cerniera plastica, poiché la forza assiale è più grande del relativo carico critico, si raggiunge il collasso per instabilità (la curva push-over assume una pendenza negativa).
- $P_c^{(1)} < P < P_c^{(0)}$ . Il collasso per instabilità si verifica all'atto della formazione della prima cerniera plastica.

Il caso  $P_c^{(0)} < P$  non ha qui interesse, in quanto l'instabilità si verifica in fase elastica.



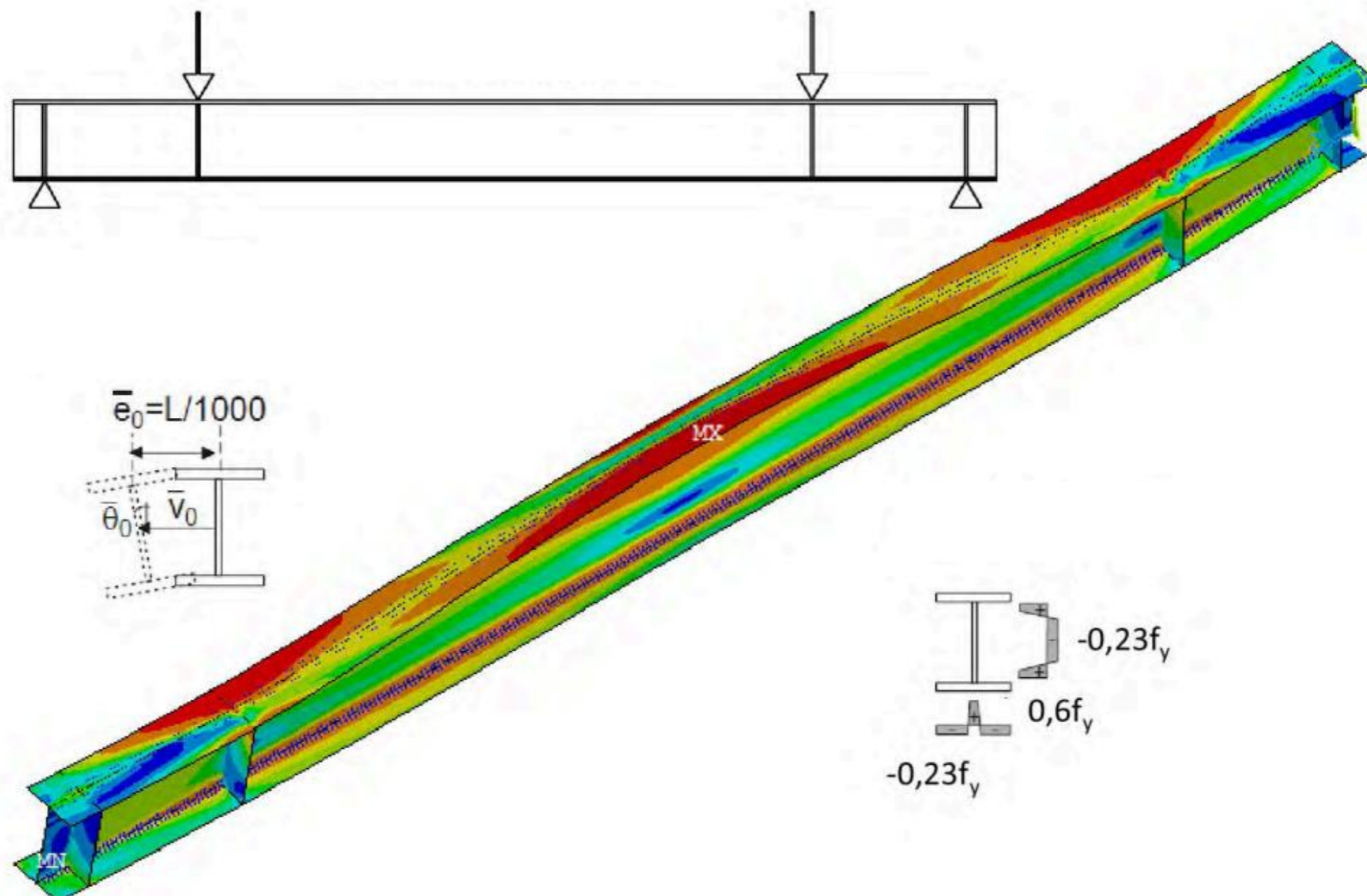
# EUROCODE 3



— H steel  
— C

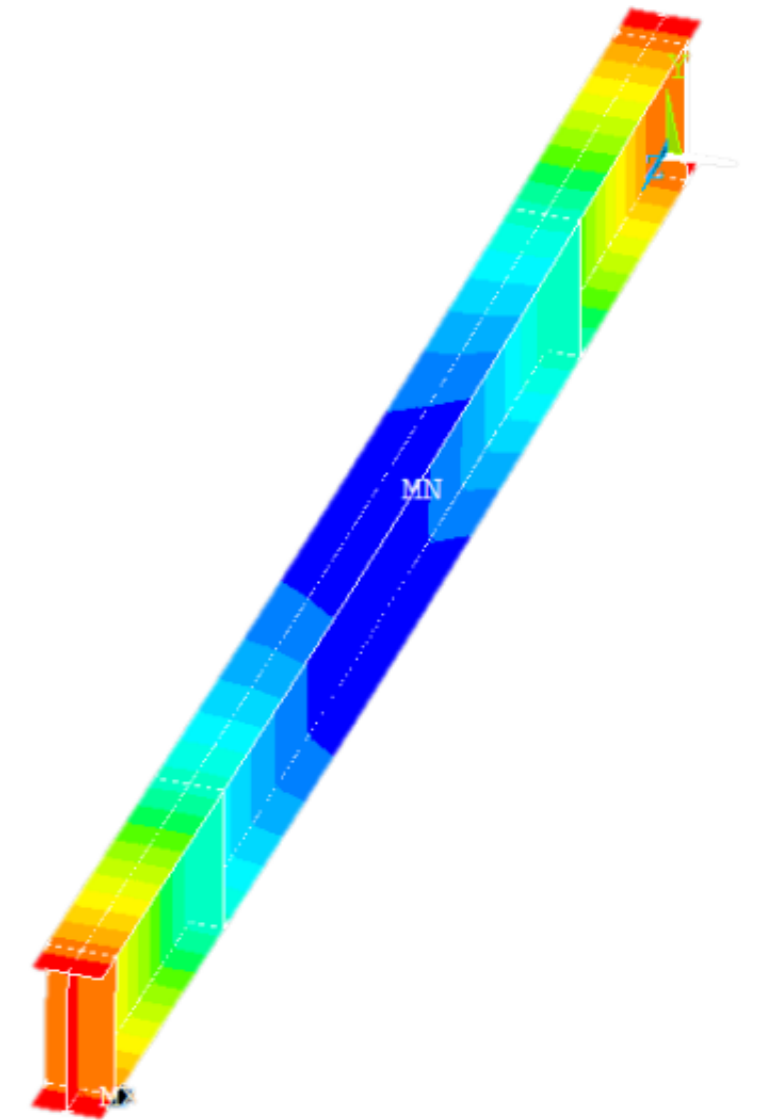
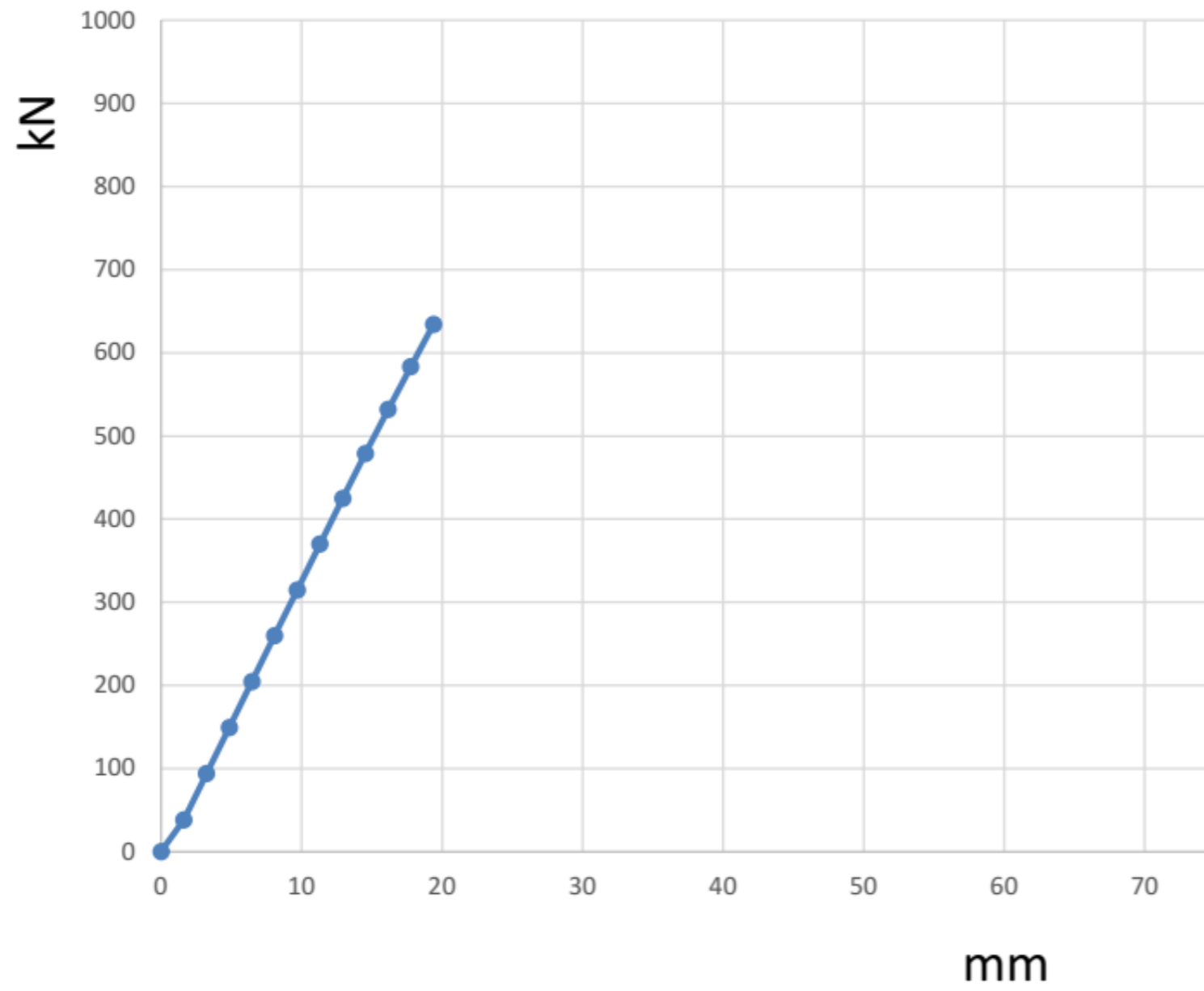
..... H steel  
- - - C

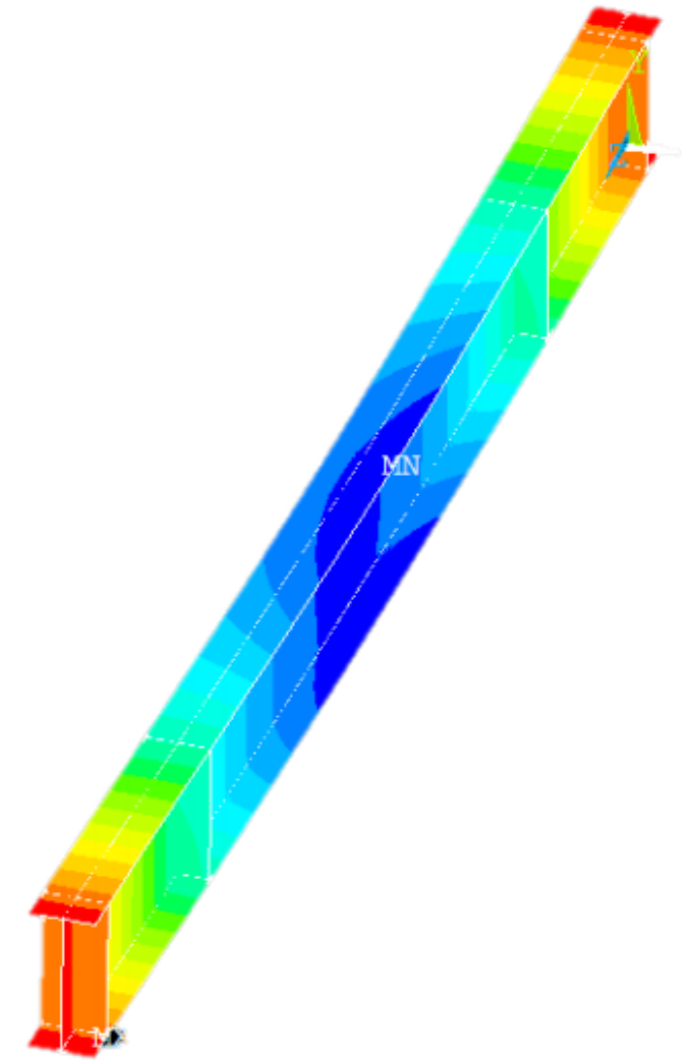
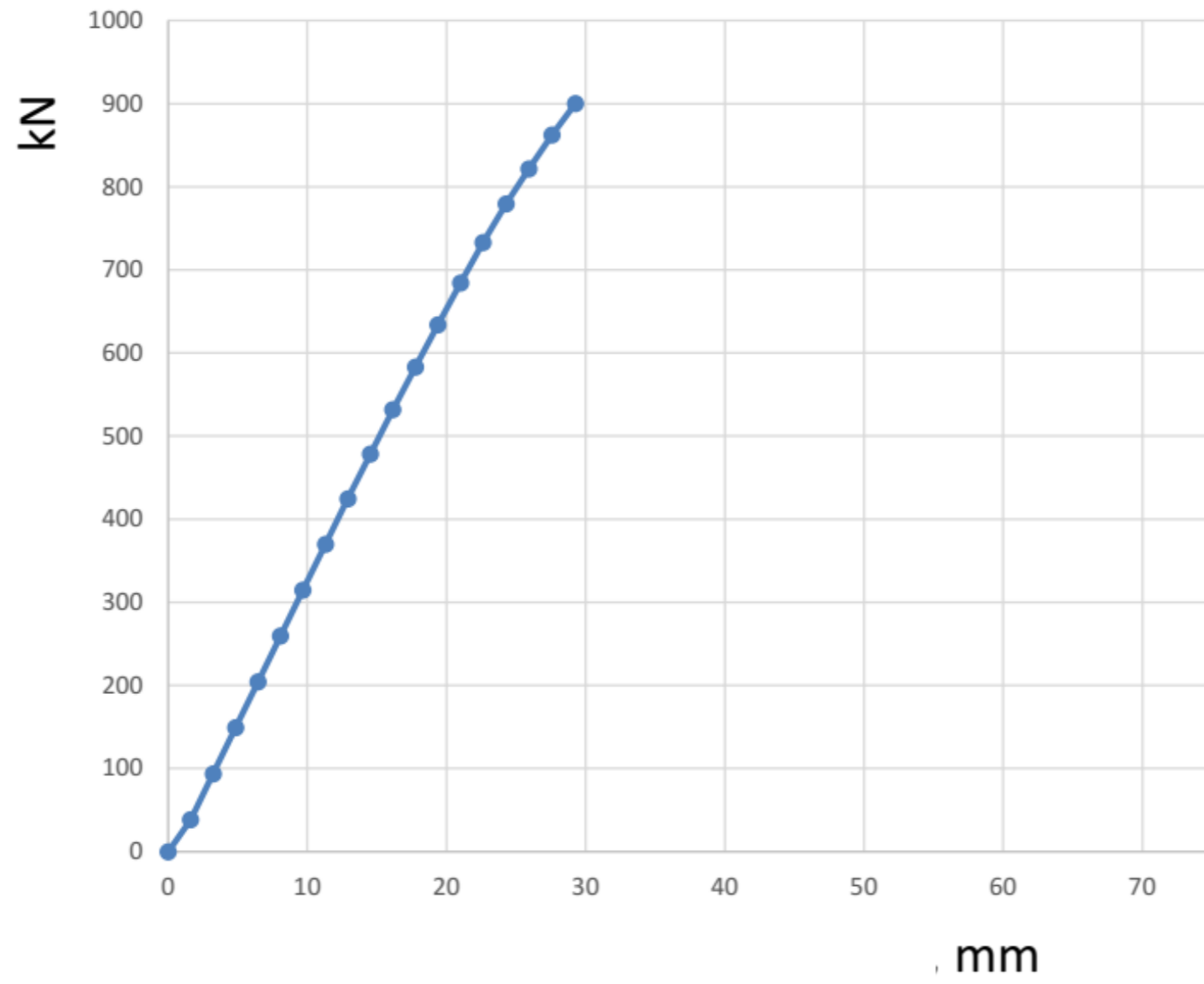
# ELEMENTI FINITI

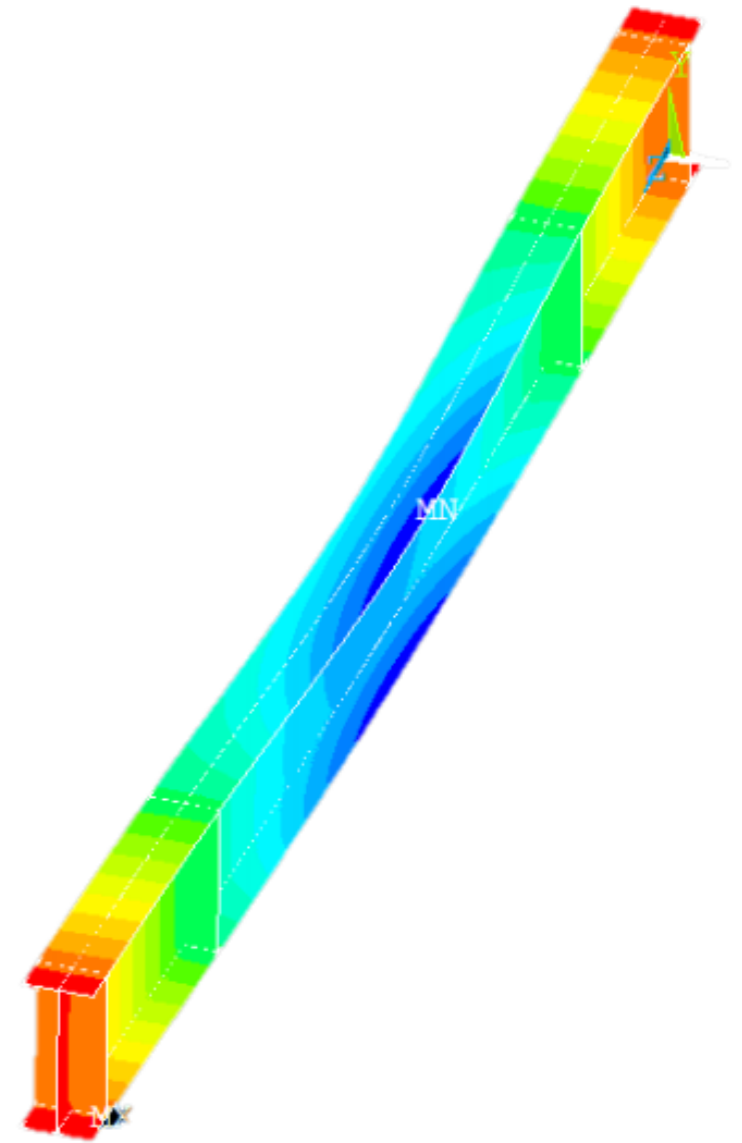
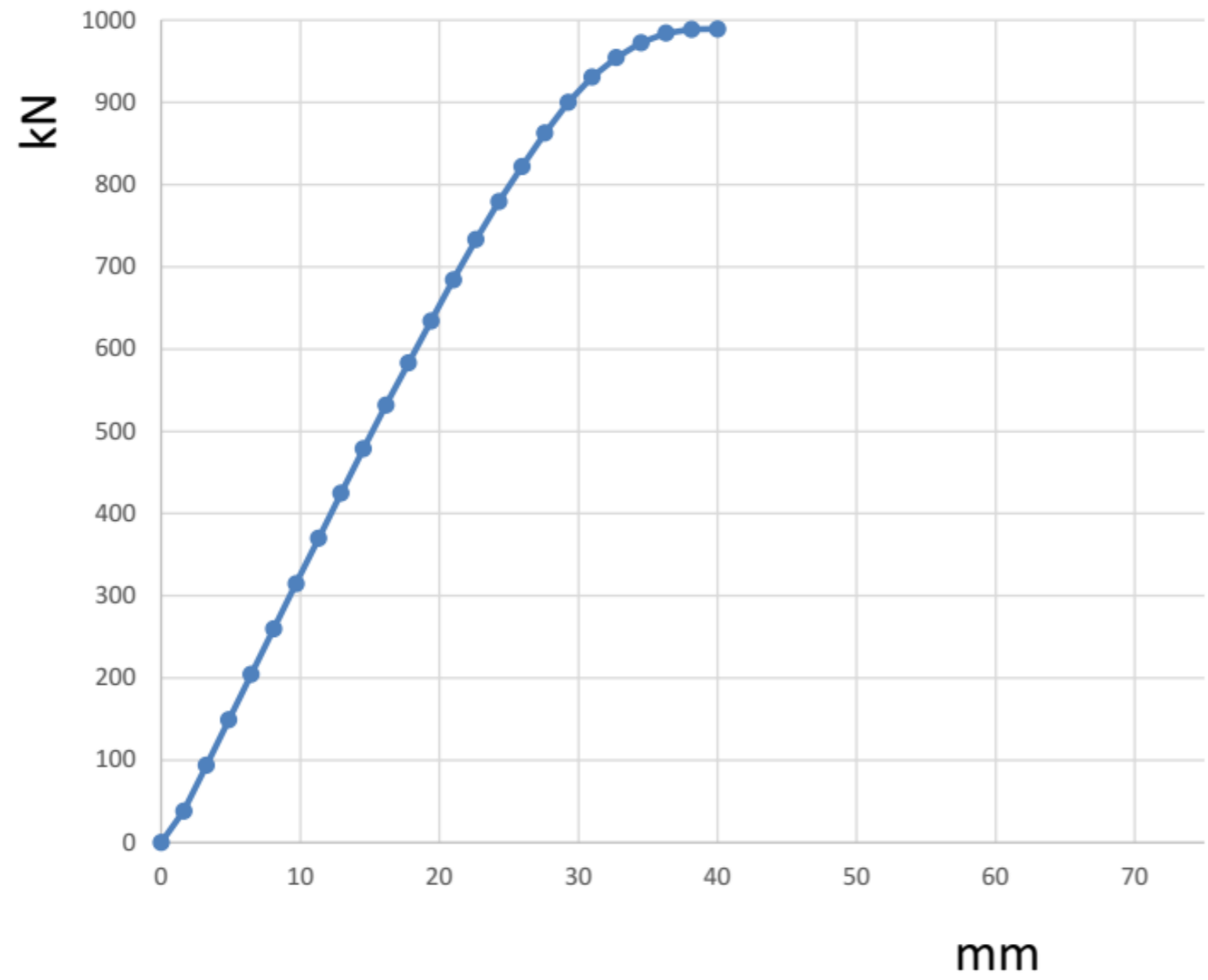


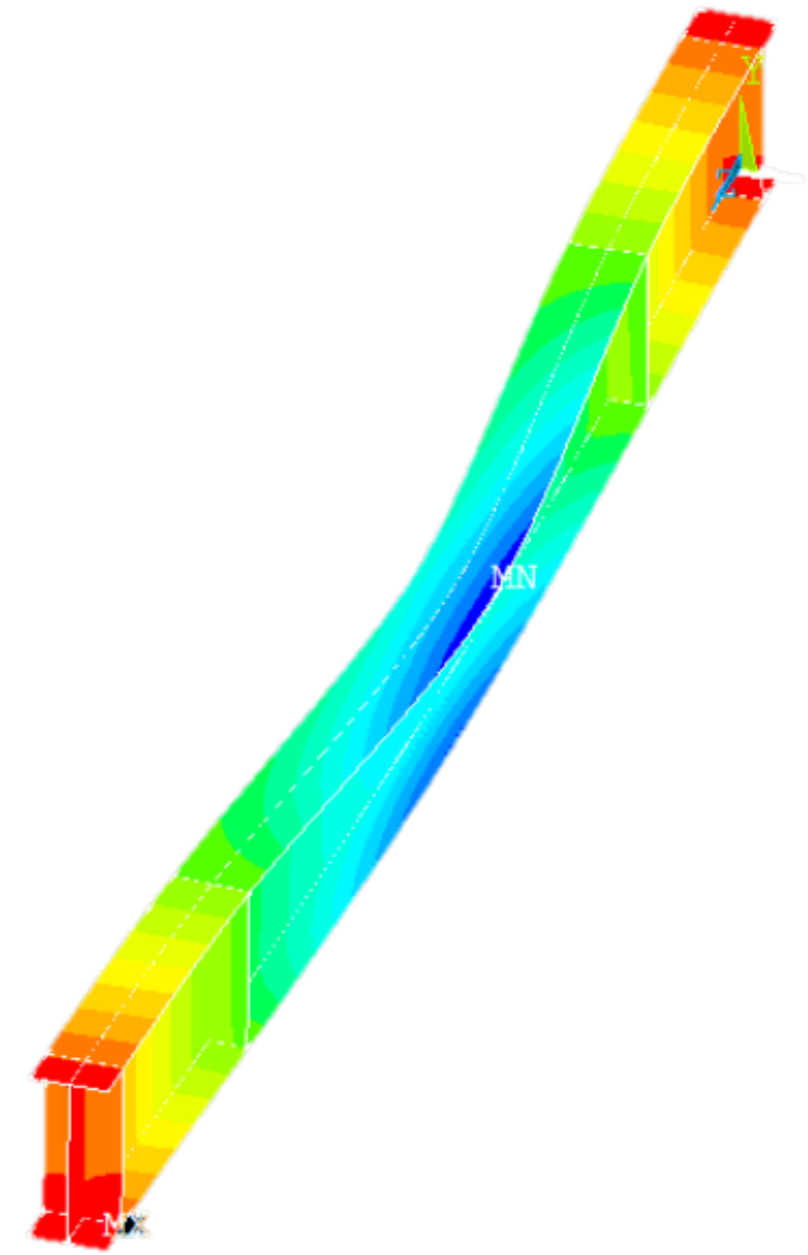
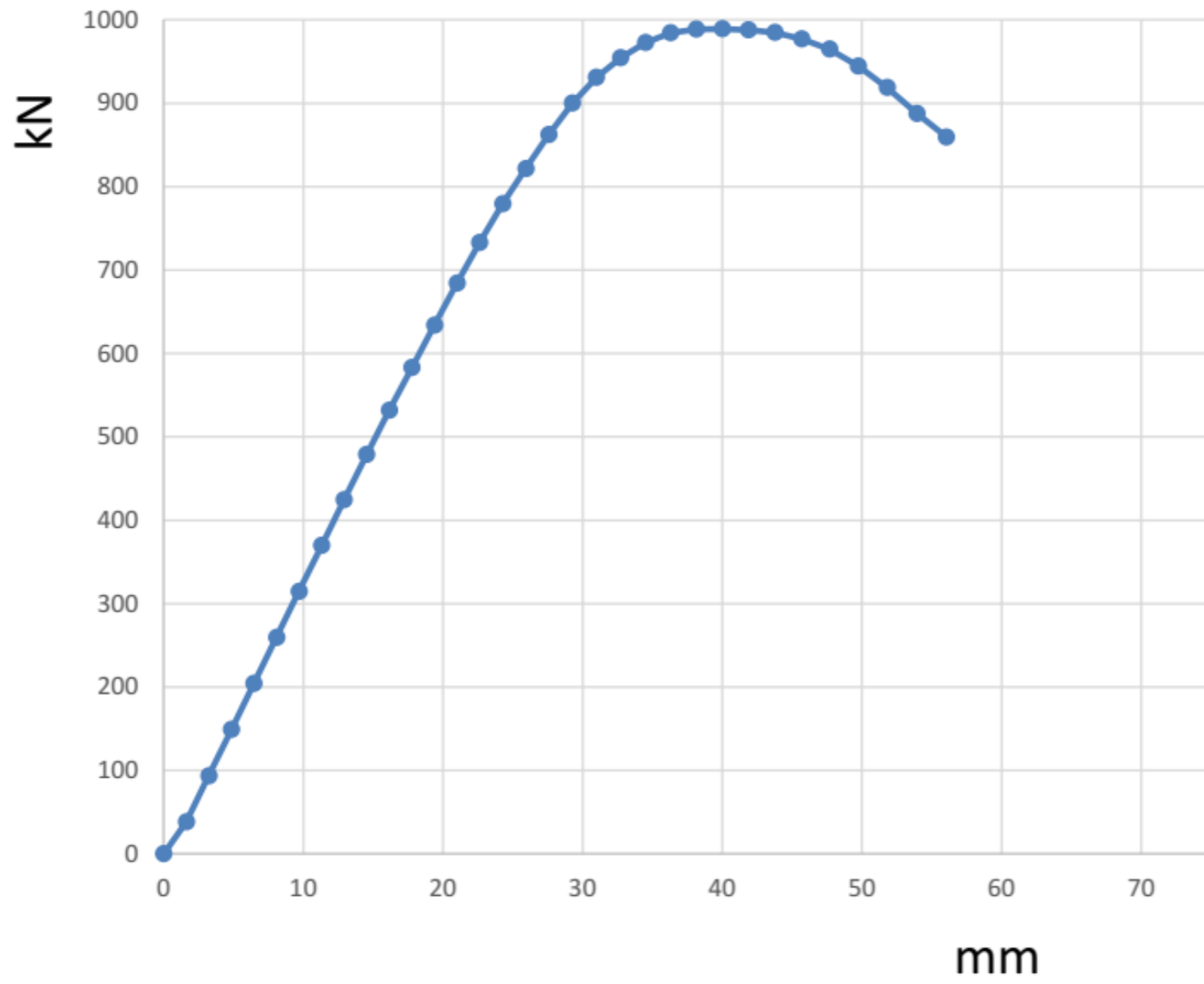


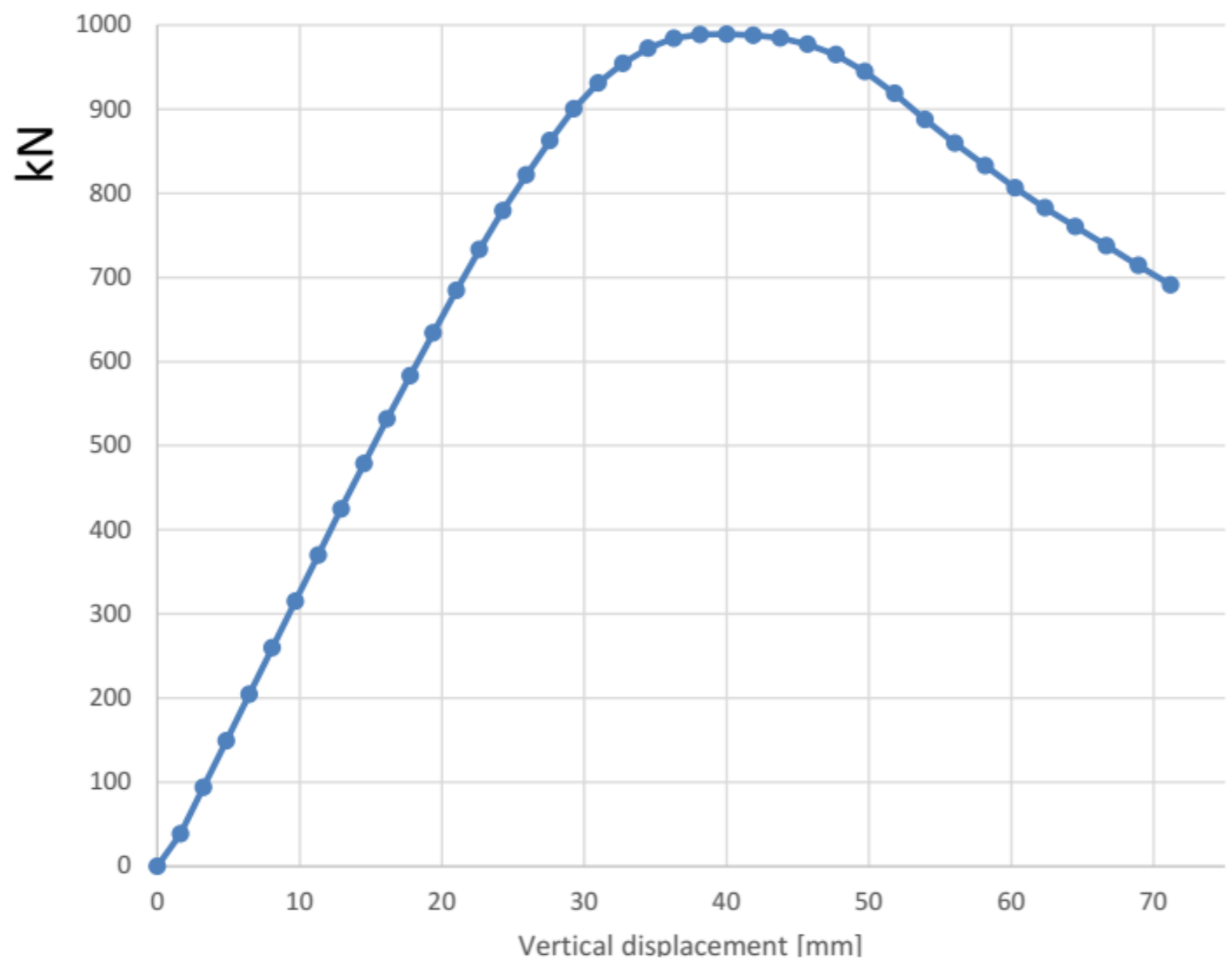
## Curva push-over











mm

