Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

L'integrale di Lebesgue

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2021/22

ME 11 MAG 2022

L'INTEGRALE DI LEBESGUE COMPARE NELLA TESI « INTÉGRALE, LONGUEUR, AIRE » (1902) SCRITTA DA H. L. LEBESGUE DOTTORANDO DI ÉMILE BOREL.

DATA UNA $f: [a,b] \to [c,d]$ (LIMITATA) CONSIDERIAMO $n+1$ PUNTI $y_0 = c < y_1 < \ldots < y_n = d$ E DEFINIAMO LA SOMMA INFERIORE DI LEBESGUE $\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \left| f^{-1}([y_k, y_{k+1})) \right| = s(\Delta)$ E LA SOMMA SUPERIORE $S(\Delta) =$

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \cdot \left| f^{-1}([y_k, y_{k+1})) \right| = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \left| f^{-1}([y_{j-1}, y_j)) \right|$$

LA f SI DICE SOMMABILE SECONDO LEBESGUE SE

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} s(\Delta) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} S(\Delta) = \ell \in \mathbb{R}$$

E IN TAL CASO SI PONE $\int_a^b f(x)\,dx = \ell$. SI INTENDE, COME DI CONSUETO, $\|\Delta\| = \max_{k=1,\ldots,n} (y_k - y_{k-1})$.

MOTIVAZIONI: 1) SE f È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN ALLORA È SOMMABILE SECONDO LEBESGUE, E IL VALORE NUMERICO DEGLI INTEGRALI È LO STESSO;

2) NON VALE IL VICEVERSA: LA FUNZIONE DI DIRICHLET È SOMMABILE SECONDO LEBESGUE, E SI HA

$$\int_a^b \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = 0 \quad \text{PER OGNI } a, b;$$

3) TEOREMA DELLA CONVERGENZA LIMITATA: DATE $f_k : [a,b) \to [c,d)$ SOMMABILI, SE CONVERGONO PUNTUALMENTE A $f: [a,b] \to [c,d]$ ALLORA f È SOMMABILE, E

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \to +\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.}$$

ESEMPIO: LE $f_k(x)$ DEL 05/04 CONVERGONO A $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ E, NEL SENSO DI LEBESGUE, $\int_0^1 f(x)\,dx = 0 =$

$$= \lim_{k \to +\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

ATTENZIONE AGLI INTERVALLI ILLIMITATI:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

MA $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ NON È SOMMABILE SECONDO LEBESGUE SULL'INTERVALLO $(0, +\infty)$.

SE, PERÒ, $f(x)$ È ASSOLUTAMENTE SOMMABILE, CIOÈ SE $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$ ALLORA È SOMMABILE (SEMPLICEMENTE) E SI HA

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

ME 11 MAG 2022

APPLICAZIONE: CALCOLO NEL SENSO DI LEBESGUE

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx =$$

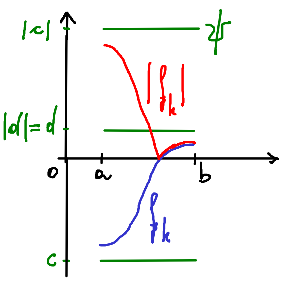
$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(1-e^{-b}\right) = 1$$

SONO STATI STABILITI ULTERIORI E PIÙ GENERALI TEOREMI DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE, SUI QUALI SI BASA IL SUCCESSO DELLA TEORIA, UNO DEI QUALI È QUELLO DELLA CONVERGENZA DOMINATA (07/04).

VE 13 MAG 2022

ESERCIZIO: DEDURRE IL TEOREMA DELLA CONVERGENZA LIMITATA DA QUELLO DELLA CONVERGENZA DOMINATA. SVOLGIMENTO: PRENDIAMO FUNZIONI $f_k(x)$ SODDISFACENTI LE IPOTESI DEL TEOREMA DELLA CONVERGENZA LIMITATA, DUNQUE $f_k : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ CONVERGENTI AD UNA $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$, E VEDIAMO SE SODDISFANO QUELLE DEL TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA. DOBBIAMO CERCARE UNA MAGGIORANTE SOMMABILE $\psi(x)$. BASTA PRENDERE $\psi(x) = \max\{|c|, |d|\}$ COSICCHÉ

1. $|f_k(x)| \leq \psi(x)$; 2. $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\,dx = (b-a)\,\psi(x) < +\infty$



E LA TESI SEGUE.

VE 13 MAG 2022

OSSERVAZIONE: OGGI SI È SOLITI DEFINIRE L'INTEGRALE DI LEBESGUE A PARTIRE DALLE FUNZIONI SEMPLICI, QUELLE CHE ASSUMONO UN NUMERO FINITO DI VALORI: SE $s(x)$ È UNA FUNZIONE SEMPLICE CHE ASSUME I VALORI $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, SI DEFINISCE

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \left| s^{-1}\left(\{\lambda_i\}\right)\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \left|\left\{ x : s(x) = \lambda_i \right\}\right|$$

NOTA: SE $s^{-1}(\{\lambda_i\})$ È UN INTERVALLO PER OGNI i, LA FUNZIONE SEMPLICE $s(x)$ SI PUÒ DIRE FUNZIONE A GRADINI (STEP FUNCTION).

OSSERVAZIONE: SE $b-a = +\infty$ SI PUÒ AVERE $0\cdot\infty$ E $\infty-\infty$. ESEMPIO: $s(x) \equiv 0$ SU $\mathbb{R}$.

IN TAL CASO $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s(x)\,dx = \sum_{i=1}^{1} 0 \cdot \left|s^{-1}(\{0\})\right| =$

$0\cdot\infty$.

ESEMPIO: $s(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(x)\,dx = -1\cdot\left|(-\infty,0)\right| + 0\cdot\left|\{0\}\right| +$$

$$+ 1\cdot\left|(0,+\infty)\right| = -\infty+\infty \ ?$$

LA DEFINIZIONE DI $\displaystyle\int_a^b s(x)\,dx$ SI ESTENDE AI DOMINI ILLIMITATI A CONDIZIONE CHE $s(x) \geq 0$ PER OGNI x. INOLTRE SI CONVIENE CHE $0\cdot\infty = 0$.

LA SOMMA INFERIORE DI f SI PUÒ VEDERE COME $\displaystyle\int_a^b s(x)\,dx$ CON $s(x)$ CHE ASSUME GLI n VALORI $y_0, \dots, y_{n-1}$ SUGLI n INSIEMI $f^{-1}\left([y_i, y_{i+1})\right)$.

 VE 13 MAG 2022

È ESSENZIALE DEFINIRE L'ESTENSIONE DEGLI INSIEMI $f^{-1}([y_k, y_{k+1}))$.

$$\boxed{\text{LA MISURA DI PEANO-JORDAN}}$$

SI PRENDE UN INSIEME LIMITATO $E \subset \mathbb{R}^n$ E, AL POSTO DEI POLIGONI USATI DA ARCHIMEDE PER ALCUNE FIGURE NOTEVOLI, USANDO GLI INTERVALLI n-DIMENSIONALI (PARALLELEPIPEDI)

$$I = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

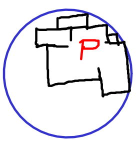
E I PLURINTERVALLI $P = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$. DEFINISCO LA MISURA INTERNA $\underline{m}(E) = \sup_{P \subset E} |P|$

E LA MISURA ESTERNA $\overline{m}(E) = \inf_{E \subset P} |P|$

DOVE OVVIAMENTE $|P| = \sum_{k=1}^{N} |I_k|$

PURCHÉ $\mathring{I}_k \cap \mathring{I}_h = \emptyset$ PER $k \neq h$

E $|I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

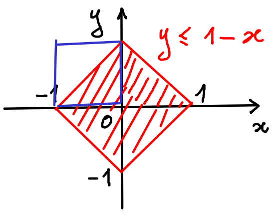


QUI $\mathring{I} = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$. L'INSIEME E SI DICE MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN SE $\underline{m}(E) = \overline{m}(E)$ E IN TAL CASO $m(E) := \overline{m}(E)$ SI DICE MISURA DI E SECONDO PEANO-JORDAN.

ESEMPI: LA MISURA (BIDIMENSIONALE) DELL'INSIEME

$E_2 = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ È $m(E) = \pi$.

LA MISURA DI $F_2 = \{(x,y) : |x|+|y| \le 1\} =$



$= \{(x_1, x_2) : \|x\|_1 \le 1\}$

È $m(F_2) = 2$.

LA MISURA (TRIDIMENSIONALE) DELL'INSIEME

$E_3 = E_2 \times \{0\} = \{(x,y,0) : x^2+y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^3$

È NULLA PERCHÉ $E_3 \subset I_\varepsilon = [-1,1] \times [-1,1] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ E $|I_\varepsilon| = 8\varepsilon$ QUINDI $\overline{m}(E_3) = \inf_{E_3 \subset P} |P| = 0$. LA MISURA DIPENDE DALLA DIMENSIONE! PRENDIAMO ORA $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

OGNI P CHE CONTIENE E CONTIENE ANCHE $[0,1]$ E PERCIÒ $|P| \ge 1$, INOLTRE $I = [0,1] \supset E$ QUINDI $\overline{m}(E) = \inf_{E \subset P} |P| = \min_{E \subset P} |P| = |[0,1]| = 1$. GLI UNICI $I = [a,b] \subset E$ SONO DEL TIPO $[a,a]$ E QUINDI $|I| = 0$. NE SEGUE CHE

$\underline{m}(E) = \sup_{P \subset E} |P| = \max_{P \subset E} |P| = 0 \neq 1$

LU 16 MAG 2022

ESERCIZIO: È SUFFICIENTE USARE INTERVALLI I PARTICOLARI, DETTI CUBI DIADICI, DATI DA

$$Q_k(z)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{z_i}{2^k},\frac{z_i+1}{2^k}\right] \quad \text{DI LATO } \frac{1}{2^k}$$

CON $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{Z}^n$, $k=0,1,2,\dots$

INDICHIAMO CON $Q=\bigcup_{j=1}^{N} Q_{k_j}(z^{(j)})$ I PLURINTERVALLI DIADICI. VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $\inf_{E\subset P}|P| = \inf_{E\subset Q}|Q|$

E CHE $\sup_{P\subset E}|P| = \sup_{Q\subset E}|Q|$ E QUINDI

$$\overline{m}(E)=\inf_{E\subset Q}|Q|,\quad \underline{m}(E)=\sup_{Q\subset E}|Q|.$$

OSSERVAZIONE BANALE: I PLURINTERVALLI DIADICI SONO PLURINTERVALLI, QUINDI

$$\inf_{E\subset P}|P| \le \inf_{E\subset Q}|Q| \quad \text{E}$$

$$\sup_{P\subset E}|P| \ge \sup_{Q\subset E}|Q|$$

L'OSSERVAZIONE FONDAMENTALE È CHE PER OGNI INTERVALLO I E PER OGNI $\varepsilon\in(0,+\infty)$ ESISTONO PLURINTERVALLI DIADICI Q'_ε, Q''_ε TALI CHE

$$Q'_\varepsilon\subset I\subset Q''_\varepsilon$$

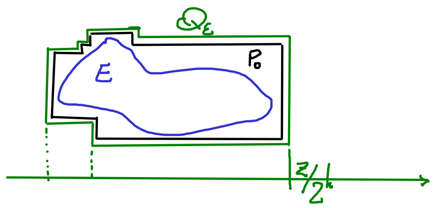
E $|Q''_\varepsilon|-|Q'_\varepsilon| = |Q''_\varepsilon\setminus Q'_\varepsilon| < \varepsilon$.

SFRUTTANDO QUESTA OSSERVAZIONE, VERIFICHIAMO CHE $\inf_{E\subset P}|P| = \inf_{E\subset Q}|Q|$. PRENDO $\varepsilon\in(0,+\infty)$. IL PRIMO MEMBRO $\inf_{E\subset P}|P|$ È IL PIÙ GRANDE MINORANTE DELL'INSIEME $\{|P| : E\subset P\}$ QUINDI $\varepsilon+\inf_{E\subset P}|P|$ NON È UN MINORANTE E PERCIÒ ESISTE ALMENO UN P_0 TALE CHE $E\subset P_0$ E $|P_0|<\varepsilon+\inf_{E\subset P}|P|$

QUINDI $\inf_{E\subset P}|P| > |P_0|-\varepsilon$. PRENDIAMO ALLORA UN PLURINTERVALLO DIADICO Q_ε TALE CHE $E\subset P_0\subset Q_\varepsilon$ E TALE CHE $|Q_\varepsilon|-|P_0|<\varepsilon$

E VEDIAMO CHE $\inf_{E\subset P}|P| > |Q_\varepsilon|-2\varepsilon$

QUINDI $\inf_{E\subset Q}|Q| = \inf_{E\subset P}|P|$.



SI NOTI CHE LA DISUGUAGLIANZA

$$\inf_{E\subset P}|P| > |Q_\varepsilon|-2\varepsilon$$

SI PUÒ ANCHE SCRIVERE $|Q_\varepsilon| < 2\varepsilon+\inf_{E\subset P}|P|$

E $Q_\varepsilon\supset E$ QUINDI $\inf_\varepsilon |Q_\varepsilon| \le \inf_{E\subset P}|P|$

MA $\inf_{E\subset Q}|Q| \le \inf_\varepsilon |Q_\varepsilon|$ DA CUI SEGUE

$\inf_{E\subset Q}|Q| \le \inf_{E\subset P}|P|$ E QUINDI L'UGUAGLIANZA.

SOTTOESERCIZI: 1. RIFARE PER LA MISURA INTERNA;

2. RIFARE PER ASSURDO: SE FOSSE

$\inf_{E\subset Q}|Q| > \inf_{E\subset P}|P|$ PRENDEREI $\varepsilon_0 :=$ $\inf_{E\subset Q}|Q| - \inf_{E\subset P}|P|$ E TROVEREI $Q_{\varepsilon_0}\supset E$

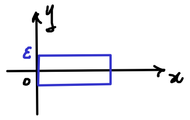
TALE CHE $|Q_{\varepsilon_0}| - \inf_{E\subset P}|P| < \varepsilon_0$: ASSURDO.

 LU 16 MAG 2022

LA MISURA DI LEBESGUE

NELLA TESI DI LEBESGUE (1902) SI DEFINISCE LA MISURA ESTERNA DI UN SOTTOINSIEME LIMITATO $E \subset \mathbb{R}^n$ PONENDO $m_e(E) = \inf_{E \subset \tilde{P}} \{ |\tilde{P}| \}$ DOVE $\tilde{P} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k$ E $|\tilde{P}| = \sum_{k=0}^{+\infty} |I_k|$ A CONDIZIONE CHE $\mathring{I}_k \cap \mathring{I}_h$ PER $k \neq h$.

ESEMPIO: SAPPIAMO CHE L'INSIEME $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ NON È MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN (SULLA RETTA). SI BADI CHE $E \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ È BANALMENTE MISURABILE PERCHÉ $E \times \{0\} \subset [0,1] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$.



INOLTRE, STANDO SULLA RETTA, E FISSATO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ POSSIAMO PRENDERE UNA FUNZIONE $q: \mathbb{N} \to E$ SURIETTIVA, DETTA « LA SUCCESSIONE DEI RAZIONALI » E UNA SERIE CONVERGENTE COME $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$. PER OGNI $k \in \mathbb{N}$ PONIAMO $I_k = \left[q(k) - \frac{\varepsilon}{2^k}, q(k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right]$ COSICCHÉ: 1. $E \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k = \tilde{P}$;

2. $\sum_{k=0}^{+\infty} |I_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\varepsilon}{2^k} = 4\varepsilon$

NE SEGUE CHE $|\tilde{P}| \leq 4\varepsilon$

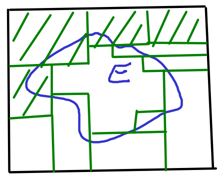
QUINDI $m_e(E) = \inf_{E \subset \tilde{P}} \{ |\tilde{P}| \} = 0$

TEOREMA: OGNI INSIEME NUMERABILE $E \subset \mathbb{R}^n$ È MISURABILE SECONDO LEBESGUE ED HA MISURA NULLA. DIMOSTRAZIONE IMMEDIATA.

NOTA: I PLURINTERVALLI $P = \bigcup_{j=0}^{N} I_j$ SONO FRA I $\tilde{P} = \bigcup_{j=0}^{+\infty} I_j$ PERCHÉ PRENDO $I_j = I_0$ DEFINITIVAMENTE, OPPURE $I_j = \emptyset$ DEFINITIVAMENTE.

MISURA INTERNA $m_i(E)$ DI UN INSIEME E LIMITATO, QUINDI $E \subset \mathring{I}_0 \subset I_0$:

$m_i(E) = |I_0| - m_e(I \setminus E)$



MISURA DI LEBESGUE DI E:

SE $m_i(E) = m_e(E)$ L'INSIEME E SI DICE MISURABILE SECONDO LEBESGUE, E SI PONE $m(E) := m_e(E)$

NE SEGUE IMMEDIATAMENTE CHE L'INSIEME E È MISURABILE SE E SOLO SE $I \setminus E$ LO È, E SI HA CHE $m(I \setminus E) = |I| - m(E)$.

NEI TESTI MODERNI SI TROVANO NUMEROSE FORMULAZIONI EQUIVALENTI, AD ESEMPIO:

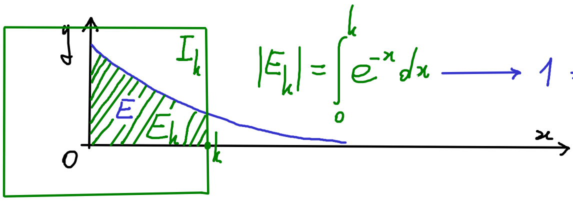
1. SE A È UN APERTO LIMITATO, $|A| = \underline{m}(A)$;
2. SE K È UN COMPATTO, $|K| = \overline{m}(K)$
3. $m_e(E) = \inf_{E \subset A} |A|$;
4. $m_i(E) = \sup_{K \subset E} |K|$

MISURA DEGLI INSIEMI ILLIMITATI

SE L'INSIEME E È ILLIMITATO, PRENDO UNA SUCCESSIONE DI INTERVALLI INVADENTI, AD ESEMPIO $I_0 = [-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ E $I_k = k\, I_0 = [-k,k]^n$, OPPURE $I_k = B(0,k)$ E DEFINISCO $E_k = E \cap I_k$. L'INSIEME DATO SI DICE MISURABILE SE TUTTI GLI E_k SONO MISURABILI. IN TAL CASO, SI PONE $m(E) = \lim_{k\to+\infty} m(E_k)$ NOTA: $E_k \subset E_{k+1}$ E $m(E_k) \le m(E_{k+1})$.

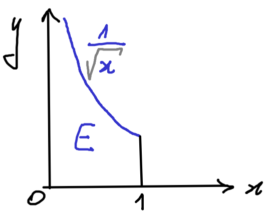
ESEMPIO:

$$E = \left\{(x,y):\ x\in[0,+\infty),\ y\in[0,e^{-x}]\right\}$$



$$|E_k| = \int_0^k e^{-x}\,dx \longrightarrow 1 = |E|$$

ESEMPIO: $E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\in(0,1),\ y\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\}$



MA 17 MAG 2022

CONFRONTO FRA LA MISURA DI LEBESGUE E QUELLA DI PEANO-JORDAN

SE L'INSIEME $E\subset\mathbb{R}^n$ È MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN ALLORA LO È ANCHE SECONDO LEBESGUE, E LE DUE MISURE SONO UGUALI:

$$\underline{m}(E) \le m_i(E) \le m_e(E) \le \overline{m}(E)$$

LA DISUGUAGLIANZA $m_e(E)\le\overline{m}(E)$ SEGUE IMMEDIATAMENTE DAL FATTO CHE I PLURINTERVALLI $P=\bigcup_{j=0}^{N} I_j$ SONO PARTICOLARI $\tilde P = \bigcup_{j=0}^{+\infty} I_j$ QUINDI $\inf_{E\subset\tilde P}|\tilde P| \le \inf_{E\subset P}|P|$.

PER VERIFICARE CHE $\underline{m}(E)\le m_i(E)$ CON LA DEFINIZIONE $m_i(E) = |I_0| - m_e(I_0\setminus E)$ SCRIVIAMO $\underline{m}(E) = |I_0| - \overline{m}(I_0\setminus E)$

ADESSO SAPPIAMO CHE

$$m_e(I_0\setminus E)\le \overline{m}(I_0\setminus E)$$

E QUINDI $|I_0| - m_i(E) \le |I_0| - \underline{m}(E)$

DA CUI LA TESI.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $m_i(E)\le m_e(E)$.

DUE DOMANDE: 1. È POSSIBILE TROVARE UN $\tilde{P} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k$, CON $\mathring{I}_k \cap \mathring{I}_h = \emptyset$ PER $k \neq h$, TALE CHE $E = [0,1] \cap \mathbb{Q} \subset \tilde{P}$ E $|\tilde{P}| < 2\varepsilon$?

SÌ. 2. È POSSIBILE DEFINIRE $m_i(F) = \sup_{\tilde{P} \subset F} |\tilde{P}|$? NO.

PRENDIAMO $q : \mathbb{N} \to E$ SURIETTIVA. PRENDIAMO $\varepsilon \in (0, +\infty)$. PONIAMO $I_0 = \left[q_0 - \frac{\varepsilon}{2}, q_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right]$. QUI E NEL SEGUITO PONIAMO $q_k = q(k)$.

CHIAMIAMO q_{k_1} IL PRIMO DEI q_k IN $q_0, q_1, q_2, \ldots$ SODDISFACENTE $q_k \notin I_0$. PRENDO $\varepsilon_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2}$ E TALE CHE $I_1 = [q_{k_1} - \varepsilon_1, q_{k_1} + \varepsilon_1] \cap I_0 = \emptyset$. CHIAMIAMO q_{k_2} IL PRIMO DEI q_k FUORI DA $I_0 \cup I_1$ E PRENDIAMO $\varepsilon_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2^3}$ TALE CHE $I_2 = [q_{k_2} - \varepsilon_2, q_{k_2} + \varepsilon_2] \cap (I_0 \cup I_1) = \emptyset$, ECCETERA. SI OTTIENE UN NUMERO FINITO O UNA SUCCESSIONE DI I_k TALI CHE:

1) $\tilde{P} = \bigcup_k I_k \supset E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

2) $|\tilde{P}| = \sum_k |I_k| = \sum_k 2\varepsilon_k \leqslant$
$$\leqslant \sum_k 2 \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leqslant 2\varepsilon$$

QUINDI $\tilde{P}$ RISPONDE AFFERMATIVAMENTE ALLA DOMANDA 1.

MA 17 MAG 2022

PENSIAMO ADESSO ALL'INSIEME $F = [0,1] \setminus \tilde{P} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. PER DEFINIZIONE (ORIGINALE) SI HA $m_i(F) = 1 - m_e(\tilde{P} \cap [0,1])$ MA $m_e(\tilde{P} \cap [0,1]) \leqslant m_e(\tilde{P}) < 2\varepsilon$ QUINDI $m_i(F) > 1 - 2\varepsilon$ MA F NON CONTIENE NESSUN INTERVALLO! QUINDI SE PONESSI $P' = \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k$ AVREI $\sup_{P' \subset F} |P'| = 0 \leqslant \leqslant 1 - 2\varepsilon$ PER $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$: QUESTO RISPONDE NEGATIVAMENTE ALLA DOMANDA 2.

ESEMPIO DI INSIEME NON MISURABILE:
G. VITALI, SUL PROBLEMA DELLA MISURA DEI GRUPPI (DEGLI INSIEMI) DI PUNTI SULLA RETTA (1905). DEFINIAMO $x \sim y$ SE $x - y \in \mathbb{Q}$ E INDICHIAMO CON G_0 UN INSIEME DI RAPPRESENTANTI SCELTI NELL'INTERVALLO $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
L'INSIEME G_0 NON È MISURABILE. INFATTI GLI INSIEMI G_0, $G_{\frac{1}{2}} = G_0 + \frac{1}{2} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x - \frac{1}{2} \in G_0 \right\}$, $G_{\frac{1}{3}}$, $G_{\frac{1}{4}}$, ... SONO A DUE A DUE DISGIUNTI E SONO CONTENUTI IN $(0,1)$ QUINDI $|G_0| + \sum_{k=2}^{+\infty} |G_{\frac{1}{k}}| = \left| \left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} G_{\frac{1}{k}} \right) \cup G_0 \right| \leqslant 1$ MA $|G_{\frac{1}{k}}| = |G_0|$ QUINDI $|G_0| = 0$.

ME 18 MAG 2022

ESERCIZIO: se $k \neq h$ allora $G_{\frac{1}{k}} \cap G_{\frac{1}{h}} = \emptyset$.

SVOLGIMENTO: dimostriamo la contronominale, cioè se $G_{\frac{1}{k}} \cap G_{\frac{1}{h}} \neq \emptyset$ allora $k=h$. Per procedere, supponiamo che ci sia $y \in G_{\frac{1}{k}} \cap G_{\frac{1}{h}}$, quindi $y \in G_{\frac{1}{k}}$ e perciò $y - \frac{1}{k} \in G_0$ e similmente $y - \frac{1}{h} \in G_0$. La differenza $\left(y - \frac{1}{k}\right) - \left(y - \frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h} - \frac{1}{k} \in \mathbb{Q}$. Quindi $\left(y - \frac{1}{k}\right) \sim \left(y - \frac{1}{h}\right)$ ma siccome G_0 è fatto prendendo un solo rappresentante da ogni classe, vuol dire che $\left(y - \frac{1}{k}\right) = \left(y - \frac{1}{h}\right)$ e quindi $k=h$ come volevasi dimostrare.

Ciò supporta la precedente dimostrazione che $|G_0| = 0$. Ma allora $\left|\bigcup_{\varrho \in \mathbb{Q}} G_\varrho\right| = \sum_{\varrho \in \mathbb{Q}} |G_\varrho| = 0$. Ma $\mathbb{R} \subset \bigcup_{\varrho \in \mathbb{Q}} G_\varrho$ il che è assurdo perché $|\mathbb{R}| > 0$. Verifichiamo che $\mathbb{R} \subset \bigcup_{\varrho \in \mathbb{Q}} G_\varrho$. Prendo un $x \in \mathbb{R}$, esso sta nella classe $[x]$ $(= A_x)$ la quale ha il rappresentante $y \in G_0$. Ciò implica che $x - y = \varrho \in \mathbb{Q}$. Ma allora $x = y + \varrho$ e quindi $x \in G_\varrho$ e la tesi segue.

LE PROPRIETÀ DEGLI INSIEMI MISURABILI

1) $\emptyset$ è misurabile;
2) il complementare $\mathbb{R}^n \setminus E$ di qualunque insieme misurabile E è a sua volta misurabile
3) se gli insiemi E_k sono misurabili per ogni k, allora l'unione $E = \bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k$ è a sua volta misurabile.

« Gli insiemi misurabili costituiscono una σ-algebra »

LE PROPRIETÀ DELLA MISURA DI LEBESGUE

1) $m(\emptyset) = |\emptyset| = 0$;
2) $\left|\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} |E_k|$

   a condizione che $E_k \cap E_h = \emptyset$ per $k \neq h$.
3) $|E| \geq 0$.

Una **misura**, detta a volte **misura positiva**, è una funzione μ avente per dominio una σ-algebra $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di un insieme dato X, che goda delle suddette proprietà. La terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ si dice **spazio mensurale**.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $m_i(E) \leq m_e(E)$.

USIAMO LE DEFINIZIONI $m_e(E) = \inf_{E \subset \tilde{P}} |\tilde{P}|$

(LEBESGUE, VEDI ANCHE ROYDEN, REAL ANALYSIS)

E $m_i(E) = |I_0| - m_e(I_0 \setminus E)$. PRENDO UN $\tilde{P} \supset E$ ED UN $\tilde{P}' \supset I_0 \setminus E$ E OSSERVO CHE $\tilde{P} \cup \tilde{P}' \supset I_0$ QUINDI $|I_0| \leq |\tilde{P}| + |\tilde{P}'|$.

SCRIVO $|\tilde{P}| \geq |I_0| - |\tilde{P}'|$, PENSO $\tilde{P}'$ FISSATO E DEDUCO CHE $m_e(E) = \inf_{E \subset \tilde{P}} |\tilde{P}| \geq$ $\geq |I_0| - |\tilde{P}'|$. SCRIVO $|\tilde{P}'| \geq |I_0| + - m_e(E)$ E DEDUCO CHE $m_e(I_0 \setminus E) =$ $= \inf_{I_0 \setminus E \subset \tilde{P}'} |\tilde{P}'| \geq |I_0| - m_e(E)$ E QUINDI

$m_e(E) \geq |I_0| - m_e(I_0 \setminus E) = m_i(E)$.

ME 18 MAG 2022

CENNI ALL'EQUIVALENZA FRA LA DEFINIZIONE ORIGINALE E QUELLA DEL TESTO

GLI APERTI A SONO $\tilde{P} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k$. PER VEDERLO, PONIAMO $P_0 = \bigcup_{Q_0(z) \subset A} Q_0(z)$,

$$P_1 = \bigcup_{\substack{Q_1(z) \subset A \\ Q_1(z) \not\subset P_0}} Q_1(z), \quad P_2 = \bigcup_{\substack{Q_2(z) \subset A \\ Q_2(z) \not\subset P_0 \cup P_1}} Q_2(z),$$

E TROVIAMO CHE $A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} P_k = \tilde{P}$.

INOLTRE $|A| = \sum_k |Q(z)| =$ $= \lim_{k \to +\infty} |P_0 \cup \ldots \cup P_k|$ E LE $S_k = \bigcup_{j=0}^{k} P_j$ SONO, SE A È LIMITATO, FATTE CON UN NUMERO FINITO DI CUBI, QUINDI:

1. $|A| = \sup_{P \subset A} |P| = \underline{m}(A)$

3. $m_e(E) = \inf_{E \subset \tilde{P}} |\tilde{P}| = \inf_{E \subset A} \underline{m}(A)$

LE DEFINIZIONI 2 E 4 SEGUONO PERCHÉ $I_0 \setminus A = K$.

ESERCIZIO: SCRIVERE UN TRIANGOLO CHIUSO $T \subset \mathbb{R}^2$ SCELTO A PIACERE RAPPRESENTANDOLO COME

$$T = \tilde{P} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k.$$

MA... È POSSIBILE?

 VE 20 MAG 2022

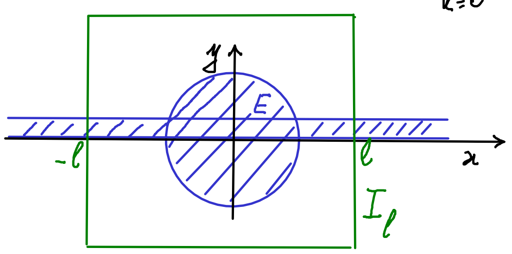
ESERCIZI: 1. CONTINUITÀ DELLA MISURA. SE $E = \bigcup_{k=0}^{+\infty} G_k$ CON $G_k \subset G_{k+1}$ MISURABILI, ALLORA $|E| = \lim_{k\to+\infty} |G_k|$. USARE LA NUMERABILE ADDITIVITÀ CON $E_k = G_{k+1} \setminus G_k$.

NOTA: LA CONTINUITÀ DELLA MISURA EQUIVALE ALLA NUMERABILE ADDITIVITÀ.

2. SE $E = \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k$ CON $B_{k+1} \subset B_k$ MISURABILI, SI PUÒ DIRE CHE $|E| = \lim_{k\to+\infty} |B_k|$?

NO, E UN CONTROESEMPIO È DATO DA $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$, $B_k = E \cup \left(\mathbb{R} \times \left(0, \frac{1}{k+1}\right)\right)$.

SI HA $|B_k| = +\infty \not\to \pi = |E| = \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k$



$$|B_k \cap I_\ell| \geq 2\ell \cdot \frac{1}{k} \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} |B_k| = +\infty$$

3. SE ESISTE UN B_{k_0} TALE CHE $|B_{k_0}| < +\infty$ ALLORA $|B_k| \le |B_{k_0}| < +\infty$ PER $k \geq k_0$ E

$$\left|\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right| = \lim_{k\to+\infty} |B_k|.$$ LO SI DEDUCE DA 1

PONENDO $G_k = (B_{k_0} \setminus B_k) \cup \left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right)$.

E OSSERVANDO CHE $\bigcup_{k=0}^{+\infty} G_k = B_{k_0}$

LA NUMERABILE ADDITIVITÀ

OSSERVAZIONE: SE GLI A_j SONO APERTI, ALLORA

$$\left|\bigcup_{j=0}^{+\infty} A_j\right| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |A_j| \quad \text{(SUBADDITIVITÀ)}$$

LO SI VEDE PERCHÉ $A_j = \tilde{P}_j = \bigcup Q_k(z)$.

LEMMA: SE K_1, K_2 SONO COMPATTI DISGIUNTI, RISULTA $|K_1 \cup K_2| \geq |K_1| + |K_1|$.
(SUPERADDITIVITÀ FINITA)

DIMOSTRAZIONE: PER DEFINIZIONE, $|K_1 \cup K_2| = \inf_{K_1 \cup K_2 \subset P} |P|$. PRENDO UN TALE PLURINTERVALLO P E LO SMISTO, CIOÈ LO PENSO COSTITUITO DA UN NUMERO FINITO DI CUBI DIADICI $Q_k(z)$ LA CUI DIAGONALE $\left(\frac{1}{2}\right)^k \sqrt{n}$ SIA PIÙ PICCOLA DELLA $\operatorname{dist}(K_1, K_2) = d_0 > 0$. CIASCUN $Q_k(z)$ NON PUÒ TOCCARE ENTRAMBI I K_1, K_2. MA ALLORA $P = P_1 \cup P_2$ CON $\mathring{P}_1 \cap \mathring{P}_2 = \emptyset$ E $P_1 \cap K_2 = \emptyset = P_2 \cap K_1$. DUNQUE $|P| = |P_1| + |P_2| \geq \inf_{K_1 \subset P_1} |P_1| + \inf_{K_2 \subset P_2} |P_2| = |K_1| + |K_2|$ E PERCIÒ $|K_1 \cup K_2| = \inf_{K_1 \cup K_2 \subset P} |P| \geq |K_1| + |K_2|$.

VE 20 MAG 2022

TEOREMA: SE GLI E_j SONO MISURABILI E $E_j \cap E_h = \emptyset$ PER $j \neq h$, ALLORA L'INSIEME $E = \bigcup_{j=0}^{+\infty} E_j$ È MISURABILE E $|E| = \sum_{j=0}^{+\infty} |E_j|$.

DIMOSTRAZIONE. SUPPONIAMO CHE $E_j \subset I_\ell$ PER OGNI j. IL CASO GENERALE SEGUE PER $\ell \to +\infty$.

PRIMA PARTE: ANCORAGGIO ALLA SCATOLA. PRESO $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ESISTONO $K_j \subset E_j \subset A_j$ TALI CHE

$$|A_j| - |E_j| \le |A_j| - |K_j| < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

SOMMANDO SU j DA 0 AD N TROVIAMO

$$\sum_{j=0}^{N} |E_j| \le \sum_{j=0}^{N} |A_j| < \sum_{j=0}^{N} |K_j| + 2\varepsilon$$

$$\le \left|\bigcup_{j=0}^{N} K_j\right| + 2\varepsilon = |F_N| + 2\varepsilon$$

$$\le |I_\ell| + 2\varepsilon$$

DOVE $F_N = \bigcup_{j=0}^{N} K_j$.

NE SEGUE CHE $\sum_{j=0}^{+\infty} |E_j| \le \sum_{j=0}^{+\infty} |A_j| < +\infty$.

SECONDA PARTE: MISURA ESTERNA.

$$m_e(E) = \inf_{E \subset A} |A| \le \left|\bigcup_{j=0}^{+\infty} A_j\right| \overset{\text{SUBADDITIVITÀ}}{\le} \sum_{j=0}^{+\infty} |A_j|$$

MA $|A_j| < |E_j| + \frac{\varepsilon}{2^j}$, QUINDI $\sum_{j=0}^{N} |A_j| <$

$< \sum_{j=0}^{N} |E_j| + 2\varepsilon$, QUINDI

$$m_e(E) \le \sum_{j=0}^{+\infty} |E_j| + 2\varepsilon.$$

TERZA PARTE: MISURA INTERNA.

$$m_i(E) = \sup_{F \subset E} |F| \ge |F_N| \ge \sum_{j=0}^{N} |E_j| - 2\varepsilon$$

QUINDI $m_i(E) \ge \sum_{j=0}^{+\infty} |E_j| - 2\varepsilon$

E LA CONCLUSIONE SEGUE.

COROLLARIO: SE GLI INSIEMI E'_j SONO MISURABILI, ALLORA L'UNIONE $E = \bigcup_{j=0}^{+\infty} E'_j$ È MISURABILE, E $|E| \le \sum_{j=0}^{+\infty} |E'_j|$.

PER VEDERLO, SI PRENDE $E_0 = E'_0$ E $E_k = E'_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} E'_i$ PER $h \geq 1$.

 VE 20 MAG 2022

L'INSIEME DI CANTOR $\mathcal{C}$

CONCEPITO DA CANTOR NELLO STUDIO DELLA SERIE DI FOURIER, HA LA POTENZA (O CARDINALITÀ) DEL CONTINUO E MISURA DI PEANO-JORDAN NULLA.

QUINDI: 1. L'INSIEME DELLE PARTI $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ NON HA LA POTENZA DEL CONTINUO;

2. OGNI $E \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$, CIOÈ $E \subset \mathcal{C}$ HA MISURA $|E| \leq |\mathcal{C}| = 0$.

NE SEGUE CHE ESISTONO INSIEMI MISURABILI $E \subset \mathcal{C}$ CHE NON SONO BORELIANI: LA σ-ALGEBRA DEGLI INSIEMI MISURABILI È PIÙ AMPIA DELLA σ-ALGEBRA DEI BORELIANI.

PER DEFINIRE L'INSIEME DI CANTOR $\mathcal{C}$, PER OGNI PLURINTERVALLO $P = \bigcup_{k=1}^{N} [a_k, b_k]$ DEFINIAMO IL PLURINTERVALLO $P' = f(P) =$

$$= \bigcup_{k=1}^{N} \left(\left[a_k, a_k + \frac{b_k - a_k}{3}\right] \cup \left[b_k - \frac{b_k - a_k}{3}, b_k\right] \right)$$

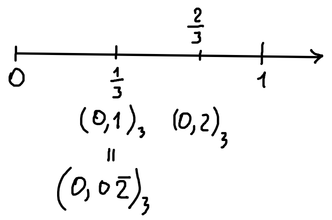
DOPODICHÉ PONIAMO $P_0 = [0,1]$, $P_{k+1} = f(P_k)$ PER $k \geq 0$, E $\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} P_k$.

AD ESEMPIO: $P_1 = f(P_0) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

$P_2 = f(P_1) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$.

SI DIMOSTRA PER INDUZIONE CHE $|P_k| = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ E QUINDI $\overline{m}(\mathcal{C}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \longrightarrow 0$ E PERCIÒ $m_e(\mathcal{C}) \leq \overline{m}(\mathcal{C}) = 0$.

PER VEDERE CHE $\mathcal{C}$ HA LA CARDINALITÀ DEL CONTINUO, SI POSSONO RAPPRESENTARE I PUNTI $x \in \mathcal{C}$ NELLA FORMA $x = (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_3$ DOVE $a_i \in \{0, 2\}$ E $a_i \neq 1$ PER OGNI i.



SI NOTI CHE SI PUÒ ANCHE SCRIVERE $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ E SI BADI CHE $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ È EQUIPOTENTE A $\mathbb{R}$.

LU 23 MAG 2022

FUNZIONI MISURABILI

PER APPLICARE LA DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE, È NECESSARIO CHE LA FUNZIONE INTEGRANDA SIA TALE CHE, PER QUALUNQUE INTERVALLO $[y_0, y_1)$, LA CONTROIMMAGINE $f^{-1}([y_0, y_1))$ SIA UN INSIEME MISURABILE, DUNQUE SIA DEFINITA LA MISURA $|f^{-1}([y_0, y_1))|$. IN TAL CASO SI DICE CHE f È MISURABILE. VI SONO VARI MODI EQUIVALENTI DI DARE LA DEFINIZIONE:

1. PER OGNI $t \in \mathbb{R}$ RISULTA MISURABILE L'INSIEME $f^{-1}((-\infty, t))$;
2. PER OGNI $t \in \mathbb{R}$ RISULTA MISURABILE L'INSIEME $f^{-1}((-\infty, t])$;
3. PER OGNI $t \in \mathbb{R}$ RISULTA MISURABILE L'INSIEME $f^{-1}((t, +\infty))$;
4. PER OGNI $t \in \mathbb{R}$ RISULTA MISURABILE L'INSIEME $f^{-1}([t, +\infty))$;
5. PER OGNI BORELIANO $B \subset \mathbb{R}$ RISULTA MISURABILE L'INSIEME $f^{-1}(B)$.

ESEMPIO DI FUNZIONE NON MISURABILE:

$$f(x) = \chi_{G_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in G_0 \\ 0, & \text{SE } x \in \mathbb{R} \setminus G_0 \end{cases}$$

LA CONTROIMMAGINE DELLA SEMIRETTA $(\frac{1}{2}, +\infty)$ È L'INSIEME NON MISURABILE G_0.

ESERCIZIO: TROVARE LA MISURA (BIDIMENSIONALE) DEL GRAFICO $\Gamma = \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$.

TEOREMA: SE $f : [a,b] \longrightarrow [c,d)$ È MISURABILE, ALLORA È SOMMABILE.

DIMOSTRAZIONE: PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE SE $\|\Delta\| < \delta$ ALLORA $S(\Delta) - s(\Delta) < \varepsilon$.

INFATTI $S(\Delta) - s(\Delta) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) \cdot |f^{-1}([y_k, y_{k+1}))| \leq$$

$$\leq \|\Delta\| \sum_{k=0}^{n-1} |f^{-1}([y_k, y_{k+1}))| =$$

$$= \|\Delta\| \left| \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-1}([y_k, y_{k+1})) \right| = \|\Delta\| \, |[a,b]| =$$

$$= \|\Delta\| \cdot (b-a) \xrightarrow[\|\Delta\| \to 0]{} 0.$$

NOTA BENE: È ESSENZIALE CHE $b - a < +\infty$ E $d - c < +\infty$. ESEMPIO: $\frac{\sin x}{x}$ È MISURABILE MA NON È SOMMABILE SULL'INTERVALLO $(0, +\infty)$.

COME VEDERE SE UNA FUNZIONE È MISURABILE?

LEMMA: SE I È UN INTERVALLO, APERTO O CHIUSO, LIMITATO O ILLIMITATO, E $f \in C^0(I)$, ALLORA f È MISURABILE PERCHÉ QUALUNQUE SIA L'INTERVALLO (y_0, y_1), L'INSIEME $f^{-1}((y_0, y_1))$ È UN APERTO RELATIVO DI I E QUINDI È UN INSIEME MISURABILE.

TEOREMA: SE $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ SONO FUNZIONI MISURABILI (DUNQUE IL DOMINIO È MISURABILE) ALLORA:

1. $f(x) \pm g(x)$ È UNA FUNZIONE MISURABILE;
2. $f(x) \cdot g(x)$ È UNA FUNZIONE MISURABILE;
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ È UNA FUNZIONE MISURABILE AVENTE PER DOMINIO $E_0 = \{x \in E : g(x) \neq 0\}$

LU 23 MAG 2022

DIMOSTRAZIONE: PRESO $t\in\mathbb{R}$, VERIFICHIAMO CHE L'INSIEME $E_t=\{x\in E: f(x)+g(x)<t\}$ È MISURABILE. BASTA OSSERVARE CHE $E_t=\{x\in E: f(x)<t-g(x)\}$ E QUINDI $E_t=$

$$=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{x\in E: f(x)<q<t-g(x)\}=$$

$$=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\left(\{x\in E: f(x)<q\}\cap\{x\in E: q<t-g(x)\}\right)$$

$$=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\left(\{x\in E: f(x)<q\}\cap\{x\in E: g(x)<t-q\}\right)$$

INTERSEZIONE DI DUE INSIEMI MISURABILI PER IPOTESI

UNIONE NUMERABILE DI INSIEMI MISURABILI

LA DIMOSTRAZIONE DELLE ALTRE PARTI DELL'ENUNCIATO SI PUÒ TROVARE SUL TESTO.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE L'INSIEME E_0 È MISURABILE.

TEOREMA: SE LE $f_n:E\to\mathbb{R}$ SONO MISURABILI, E CONVERGONO PUNTUALMENTE AD $f:E\to\mathbb{R}$, ALLORA f È MISURABILE.

DIMOSTRAZIONE: DICO CHE SE LE $g_n:E\to\mathbb{R}$ SONO MISURABILI, E SE $g_n(x)\le g_{n+1}(x)$ PER OGNI $x\in E$ (SUCCESSIONE MONOTONA) ALLORA LA FUNZIONE $g(x)=\lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ È MISURABILE.

INFATTI, PRESO $t\in\mathbb{R}$, CONSIDERO L'INSIEME E_t

$=\{x\in E: g(x)>t\}=\{x\in E: g_n(x)>t$ PER ALMENO UN $n\}=\bigcup_{n=0}^{+\infty} g_n^{-1}((t,+\infty))$

UNIONE NUMERABILE DI INSIEMI MISURABILI PER IPOTESI

SECONDA PARTE: $g_n(x):=\inf_{k\ge n} f_k(x)$ È MISURABILE QUALUNQUE SIA n. PRENDO $t\in\mathbb{R}$ E STUDIO

$E_t=\{x\in E: g_n(x)<t\}=\{x\in E: f_k(x)<t$ PER ALMENO UN $k\ge n\}=\bigcup_{k=n}^{+\infty} f_k^{-1}((-\infty,t))$.

CONCLUSIONE: LA FUNZIONE $g(x)=\lim_{n\to+\infty} g_n(x)$

$=\liminf_{k\to+\infty} f_k(x)=\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$ È MISURABILE.

LEMMA: SE $f(y)$ È CONTINUA, E $y(x)$ È MISURABILE, ALLORA $f(y(x))$ È MISURABILE. DIMOSTRAZIONE: APPLICARE LA DEFINIZIONE. IL RISULTATO SI ESTENDE ALLE FUNZIONI DI CARATHÉODORY $f(x,y)$ MISURABILI COME FUNZIONI DI x QUALUNQUE SIA y E CONTINUE IN y PER QUASI OGNI x.

Corollario

SE UNA FUNZIONE $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ È DERIVABILE IN (a,b), ALLORA LA FUNZIONE

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty} n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)$$

È MISURABILE IN QUANTO LIMITE DELLA SUCCESSIONE $f_n(x)=n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)$.

L'INTEGRALE DI LEBESGUE

1) IL DOMINIO DI INTEGRAZIONE PUÒ NON ESSERE UN INTERVALLO

2) LA FUNZIONE INTEGRANDA PUÒ ESSERE ILLIMITATA

3) IL DOMINIO DI INTEGRAZIONE PUÒ ESSERE ILLIMITATO

DEFINIZIONE: SE $f:E\to[0,+\infty)$ È MISURABILE, SI PONE

$$\int_E f(x)\,dx=\sup_{0\le s(x)\le f(x)}\int_E s(x)\,dx$$

DOVE $s(x)$ SONO FUNZIONI SEMPLICI, QUINDI MISURABILI E CHE ASSUMONO VALORI $\lambda_1,\dots,\lambda_N$, E

$$\int_E s(x)\,dx=\left|\bigcup_{i=1}^{N}\{x\in E:\ s(x)=\lambda_i\}\times[0,\lambda_i]\right|$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left|\{x\in E:\ s(x)=\lambda_i\}\times[0,\lambda_i]\right|$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\left|\{x\in E:\ s(x)=\lambda_i\}\right|\cdot\lambda_i}_{=0 \text{ SE } \lambda_i=0}$$

PERCHÉ $|\mathbb{R}\times\{0\}|_2=0$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI $\int_E s(x)\,dx$

L'INTERPRETAZIONE SI ESTENDE A

$$\int_E f(x)\,dx=|G|,\quad \text{CON } G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}:\ x\in E,\ y\in[0,f(x)]\}$$

DEFINIZIONE: SE $f : E \to \mathbb{R}$ È MISURABILE,

SI PONE $\displaystyle\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx$

A CONDIZIONE CHE $\displaystyle\min\left\{\int_E f^+(x)\,dx, \int_E f^-(x)\,dx\right\} < +\infty$.

SI INTENDE CHE $f^{\pm}(x) = \max\{\pm f(x), 0\} =$

$$= \frac{|f(x)| \pm f(x)}{2} \geq 0.$$

TEOREMA DELLA CONVERGENZA MONOTONA (TEOREMA DI BEPPO LEVI): SE LE $f_n(x) : E \to \mathbb{R}$ SONO MISURABILI E $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ALLORA

$$\int_E \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx$$

COROLLARIO: LA SERIE $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$, CON $g_k \geq 0$ E MISURABILI, È INTEGRABILE TERMINE A TERMINE.

DIMOSTRAZIONE: SI APPLICA IL TEOREMA DELLA CONVERGENZA MONOTONA ALLE $\displaystyle f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DELLA CONVERGENZA MONOTONA: POSTO $\displaystyle f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$,

SI HA $\displaystyle\int_E f(x)\,dx = |G| = \left|\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} G_n\right) \cup \Gamma\right|$

MA IL GRAFICO $\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$

DI UNA $f(x)$ MISURABILE HA MISURA NULLA:

$$\Gamma \subset \bigcup_{k=1}^{N} \left(f^{-1}([y_k, y_{k+1})) \times [y_k, y_{k+1})\right)$$

E SI RAGIONA COME IL 23/05.

ME 25 MAG 2022

DUNQUE $\displaystyle\int_E f(x)\,dx = |G| = \left|\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} G_n\right) \cup \Gamma\right| =$

$$\left|\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} G_n\right)\right| = \lim_{n\to+\infty} |G_n| = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

ESEMPIO: SE $f_n(x) = -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} = f_{n+1}(x)$

ALLORA $f_n(x) \to f(x) \equiv 0$ MA $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) = -\infty$.

ESERCIZIO: SE $0 \leq f_{n+1}(x) < f_n(x)$ COSA SI PUÒ DIRE? SVOLGIMENTO: APPLICANDO LA LEZIONE DEL 20/05 COSTRUIAMO IL CONTROESEMPIO $f_n(x) = \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} = f_{n+1}(x) \geq 0$ NEL QUALE $f_n(x) \to f(x) \equiv 0$ MA $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = +\infty \not\to 0$.

SE PERÒ RISULTA $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n_0}(x)\,dx < +\infty$ PER ALMENO UN n_0, ALLORA $\displaystyle\int_E \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

OSSERVAZIONE: SE PONIAMO $g_n(x) = n$ ABBIAMO $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx = +\infty$ PER OGNI n, E

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = +\infty.$$

 ME 25 MAG 2022

SAPPIAMO CHE SE $f_n(x) \geq 0$ E SE $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, NON È DETTO CHE $\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx$. INFATTI NELL'ESEMPIO PRECEDENTE SI HA

$$\int_E f(x)\,dx < \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx$$

LEMMA DI FATOU: SE LE $f_n : E \to [0,+\infty)$ SONO MISURABILI, ALLORA

$$\int_E \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) \right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx$$

DIMOSTRAZIONE: APPLICO IL TEOREMA DI BEPPO LEVI ALLE FUNZIONI $g_k(x) = \inf_{n\geq k} f_n(x) \geq 0$ CHE SODDISFANO $g_k(x) \leq g_{k+1}(x)$. SO CHE $\lim_{k\to+\infty} g_k(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ E QUINDI POSSO SCRIVERE $\int_E \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{k\to+\infty} \int_E g_k(x)\,dx$. MA ESSENDO $g_k(x) \leq f_n(x)$ PER OGNI $n \geq k$, SI HA $\int_E g_k(x)\,dx \leq \int_E f_n(x)\,dx$ E QUINDI $\int_E g_k(x)\,dx \leq \inf_{n\geq k} \int_E f_n(x)\,dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx$

LA TESI SEGUE DALLA DISUGUAGLIANZA ROSSA.

TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA (CFR. 07/04): SE LE $f_n : E \to \mathbb{R}$ SONO MISURABILI, E SE ESISTE UNA MAGGIORANTE SOMMABILE $\psi(x)$, CIOÈ UNA FUNZIONE MISURABILE TALE CHE 1. $|f_n(x)| \leq \psi(x)$ PER OGNI n; 2. $\int_E \psi(x)\,dx < +\infty$, ALLORA, SE ESISTE IL LIMITE $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, SI HA $\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx$.

NOTA: SI PUÒ SEMPRE PORRE $\psi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$ MA CHI CI DICE CHE $\int_E \psi(x)\,dx < +\infty$? ESEMPIO: SE $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$ SU $E = [0,1]$ SONO CERTO CHE LA FUNZIONE $\psi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} 2nxe^{-nx^2}$ SODDISFA $\int_0^1 \psi(x)\,dx = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA: PONGO $g_n(x) = \psi(x) - f_n(x) \geq 0$ E APPLICO IL LEMMA DI FATOU: PER IPOTESI, $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \psi(x) - f(x)$ QUINDI

$$\int_E \psi(x)\,dx - \int_E f(x)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \left(\int_E (\psi(x) - f_n(x))\,dx \right) = \int_E \psi(x)\,dx - \limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx$$

QUINDI

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx \leq \int_E f(x)\,dx.$$

PER COMPLETARE LA DIMOSTRAZIONE SI PONE

$h_n(x) = 2\phi(x) + f_n(x) \geq 0$ E SI GIUNGE A

$\int_E f(x)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx$, LA QUALE,

COMBINATA CON $\limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx \leq \int_E f(x)\,dx$,

DÀ LA TESI.

VE 27 MAG 2022

APPLICAZIONE: PONIAMO $I = [0,1] \times \{0\}$ E

DEFINIAMO $V(x,y) = \int_I \frac{\mu(s)\,ds}{\sqrt{(x-s)^2+y^2}}$: È

CONTINUA? CIOÈ, SE $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$,

RISULTA $V(x_n,y_n) \to V(x_0,y_0)$ OVVERO

$$\int_I \frac{\mu(s)\,ds}{\sqrt{(x_n-s)^2+y_n^2}} \to \int_I \frac{\mu(s)\,ds}{\sqrt{(x_0-s)^2+y_0^2}} \;?$$

PER RISPONDERE BASTA PORRE $f_n(s) = \frac{\mu(s)}{\sqrt{(x_n-s)^2+y_n^2}}$

E OSSERVARE CHE $\lim_{n\to+\infty} f_n(s) = \frac{\mu(s)}{\sqrt{(x_0-s)^2+y_0^2}} = f(s)$.

SIA $f(s)$ CHE $f_n(s)$ SONO DEFINITE PER $s \in [0,1]$

SE $(x_0,y_0) \notin I$ COSICCHÉ $\sqrt{(x_0-s)^2+y_0^2} =$

$= \operatorname{dist}((x_0,y_0),(s,0)) \geq d_0 > 0$ ESSENDO $d_0 =$

$= \inf_{s\in[0,1]} \operatorname{dist}((x_0,y_0),(s,0)) = \operatorname{dist}((x_0,y_0), I)$.

PER CONTINUITÀ, SI HA $\operatorname{dist}((x,y), I) \geq \frac{d_0}{2} > 0$

PER OGNI $(x,y) \in B_r(x_0,y_0)$.

POSSIAMO AFFERMARE

CHE $\int_0^1 f_n(s)\,ds \longrightarrow \int_0^1 f(s)\,ds$ SE TROVIAMO UNA

FUNZIONE SOMMABILE $\phi(s)$ TALE CHE

$$|f_n(s)| = \frac{|\mu(s)|}{\sqrt{(x_n-s)^2+y_n^2}} \leq \frac{2}{d_0}|\mu(s)| \leq \phi(s).$$

OCCORRE E BASTA CHE μ SIA SOMMABILE: SE μ È SOMMABILE, LA FUNZIONE

$V(x,y) = \int_0^1 \frac{\mu(s)\,ds}{\sqrt{(x-s)^2+y^2}}$ È CONTINUA IN $\mathbb{R}^2 \setminus I$!

DERIVAZIONE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

IN GENERALE, LA FUNZIONE $V(x) = \int_E f(x,s)\,ds$,

CON f CONTINUA RISPETTO ALLA x,

È CONTINUA IN $\bar{x}$ SE ESISTE $\phi(s)$ SOMMABILE TALE

CHE $|f(x,s)| \leq \phi(s)$ PER OGNI $x \in B_r(\bar{x})$.

SIMILMENTE, SE ESISTE $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x,s)$ IN $B_r(\bar{x})$

E SE $\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(x,s)\right| \leq \psi(s)$ SOMMABILE, SI HA

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}(\bar{x}) = \int_E \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x},s)\,ds$$

PER SEMPLICITÀ PRENDIAMO $x \in \mathbb{R}$, IL CHE NON LEDE LA GENERALITÀ, E APPLICHIAMO LA DEFINIZIONE DELLA DERIVATA:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(V(\bar{x}+h) - V(\bar{x})\right)$$

USEREMO LA DEFINIZIONE SUCCESSIONALE DI LIMITE (« TEOREMA PONTE »)

CIOÈ PRENDIAMO UNA SUCCESSIONE ARBITRARIA DI $h_m \to 0$ E STUDIAMO LA QUANTITÀ

$$\frac{1}{h_m}\int_E \left(f(\bar{x}+h_n, s) - f(\bar{x}, s) \right) ds =$$

$$= \int_E f'(c_n(s), s)\, ds$$

PER LA DERIVABILITÀ DI $f(x,s)$ RISPETTO AD x SAPPIAMO CHE $f'(c_n(s), s) =$

$$= \frac{f(\bar{x}+h_n, s) - f(\bar{x}, s)}{h_n} \longrightarrow f'(\bar{x}, s)$$

AFFINCHÉ $\dfrac{V(\bar{x}+h_n) - V(\bar{x})}{h_n} \longrightarrow \int_E f'(\bar{x}, s)\, ds$

È DUNQUE SUFFICIENTE CHE $\left| f'(c_n(s), s) \right| \leq \phi(s)$ SOMMABILE.

APPLICAZIONI A:

TRASFORMATA DI FOURIER DI $f(t)$, CHE È

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt, \quad i^2 = -1$$

TRASFORMATA DI LAPLACE $\mathcal{L}f(x) =$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\, dt : \quad \frac{d}{dx}\mathcal{L}f(x) =$$

$$= -\int_0^{+\infty} t e^{-tx} f(t)\, dt$$

REGOLARIZZATA DI FRIEDRICHS DI $f(t)$, CHE È

$$f_m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \rho_m(x-t)\, dt$$

DOVE ρ_m È UNA FUNZIONE A CAMPANA COME NELLA LEZIONE DEL 20/04.

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

1. f, g SOMMABILI, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \lambda f + \mu g$ SOMMABILE E $\int_E (\lambda f + \mu g)\, dx = \lambda \int_E f\, dx + \mu \int_E g\, dx$

2. $f \geq 0$, $E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$, $E_n \cap E_h = \emptyset$ PER $n \neq h$ $\Rightarrow \int_E f\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{E_n} f\, dx$

3. $\left(f = f^+ - f^- ; \quad |f| = f^+ + f^- \right)$

f È SOMMABILE SE E SOLO SE $|f|$ LO È

NOTA: $\left| \chi_{\mathbb{Q}}(x) - \frac{1}{2} \right| \equiv \frac{1}{2}$ RIEMANN-INTEGRABILE

E SI HA CHE $\left| \int_E f\, dx \right| \leq \int_E |f|\, dx$

4. $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ AMMESSO CHE I DUE INTEGRALI SIANO BEN DEFINITI

I TEOREMI DI FUBINI E DI TONELLI

UNA MOTIVAZIONE: $\iint_\Omega V(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \iint_\Omega \left(\int_I \frac{\mu(s)\,ds}{\sqrt{(x-s)^2+y^2}} \right) dx\,dy$$

INTEGRALE ITERATO. SI VUOLE SAPERE SE

$$= \int_I \left(\iint_\Omega \frac{dx\,dy}{\sqrt{(x-s)^2+y^2}} \right) \mu(s)\,ds.$$

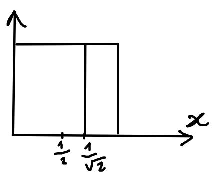
LEMMA: SE $E\subset\mathbb{R}^2$ È MISURABILE, CONSIDERO LE SEZIONI $E_x = \{ y\in\mathbb{R} : (x,y)\in E \} \subset \mathbb{R}$.

1. PER QUASI OGNI x, E_x È MISURABILE: L'INSIEME DEGLI $x\in\mathbb{R}$ TALI CHE E_x NON È MISURABILE HA MISURA UNIDIMENSIONALE NULLA.

2. LA FUNZIONE $f(x) = |E_x|$ È MISURABILE.

3. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = |E|$

ESEMPIO: $E = \{ (x,y) : x\in[0,1],\ y\in G_0$ SE $x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$, ALTRIMENTI $y\in[0,1] \}$



$|E|=1$

$f(x)=1$ PER $x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$

TEOREMA DI FUBINI: SE $f(x,y)$ È SOMMABILE SU $E\subset\mathbb{R}^2$, ALLORA PER QUASI OGNI x (y) LA FUNZIONE $y\ (x) \longmapsto f(x,y)$ È SOMMABILE, E POSSIAMO DEFINIRE $\int_{E_x (y)} f(x,y)\,dy \in \mathbb{R}$ PER QUASI OGNI x. INOLTRE SI HA

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{E_x} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_E f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{E_y} f(x,y)\,dx\right)dy$$

ESEMPIO: $f(x,y) = \frac{|x|}{xy}$ SU $E=[-1,1]\times[0,1]$

$E_x=[0,1]$, $E_y=[-1,1]$

$$\int_{E_x} f(x,y)\,dy = \begin{cases} +\infty, & x>0 \\ -\infty, & x<0 \end{cases}$$

$$\int_{E_y} f(x,y)\,dx = \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,dx = 0$$

$$f^+(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \quad \text{E} \quad \int_E f^+\,dx\,dy = +\infty$$

$$f^-(x,y) = \begin{cases} 0, & x>0 \\ \frac{1}{y}, & x<0 \end{cases} \quad \text{E} \quad \int_E f^-\,dx\,dy = +\infty$$

PER SAPERE SE $f(x,y)$ È SOMMABILE, RICORDIAMO CHE LO È SE E SOLO SE $|f(x,y)|$ È SOMMABILE.

SI PUÒ DUNQUE USARE IL

TEOREMA DI TONELLI: SE $g(x,y) \geq 0$ È MISURABILE,

ALLORA
$$\int_E g(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_x} g(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{E_y} g(x,y)\,dx \right) dy$$
FINITI, O $+\infty$

APPLICAZIONE: $g(x,y) = \left| \frac{|x|}{xy} \right| = \frac{1}{y}$ IN $E = [-1,1] \times [0,1]$.

$$\int_E g(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{1}{y}\,dy \right)}_{+\infty} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{y} \left(\int_{-1}^{1} dx \right) dy = +\infty$$