Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Successioni e serie di funzioni

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2021/22

PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

PER LEGITTIMARE LA DIMOSTRAZIONE DEL 30/03 DOBBIAMO VERIFICARE CHE, SE UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $f_k(x)$ CONVERGE AD UNA FUNZIONE $f(x)$, ALLORA GLI INTEGRALI $\int_a^b f_k(x)\,dx$ CONVERGONO A $\int_a^b f(x)\,dx$. IN GENERALE, QUESTO NON SUCCEDE! ESEMPIO N. 1:

$$f_k(x) = kx\,e^{-kx^2} \quad \text{PER } x\in[0,1].$$

(A) FISSATO $x_0\in[0,1]$ I VALORI $f_k(x_0) = k x_0\, e^{-k x_0^2}$ TENDONO A $f(x_0)=0$.

SI PARLA DI CONVERGENZA PUNTUALE.

(B) È CHIARO CHE $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. VEDIAMO ALLORA

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2kx\,e^{-kx^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-kx^2}\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(e^{-k}-1\right) = \frac{1-e^{-k}}{2}$$

QUINDI $\lim_{k\to+\infty}\int_0^1 f_k(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x)\,dx$.

PEGGIO ANCORA: SE LE $f_k(x)$ SONO INTEGRABILI, E CONVERGONO PUNTUALMENTE A UNA FUNZIONE $f(x)$ IN $[a,b]$, NON È DETTO CHE f SIA INTEGRABILE!

SAPPIAMO, INFATTI, CHE LA FUNZIONE $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$

$$= \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

NON È INTEGRABILE SU NESSUN INTERVALLO $[a,b]$ CON $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq b$.

PRENDIAMO, ALLORA, UNA FUNZIONE SURIETTIVA $q:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ E PONIAMO $q_n = q(n)$ E $X_n = \{q_0,\dots,q_n\}$. SIA

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x\in X_k \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus X_k\end{cases} = \chi_{X_k}(x).$$

VERIFICHIAMO CHE, PER OGNI $x_0\in\mathbb{R}$, RISULTA $\lim_{k\to+\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$. SE $x_0\in\mathbb{Q}$ ALLORA RISULTA $x_0 = q(n_0)$ PER ALMENO UN $n_0\in\mathbb{N}$ (SURIETTIVITÀ DI q) QUINDI $x_0\in X_n$ PER OGNI $n\geq n_0$ E PERCIÒ $f_k(x_0) = 1$ PER $k\geq n_0$ DA CUI SEGUE CHE $\lim_{k\to+\infty} f_k(x_0) = 1 = f(x_0)$.

SE, INVECE, $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ALLORA $x_0\notin X_n$ E QUINDI $f_k(x_0) = 0$ PER OGNI k E $\lim_{k\to+\infty} f_k(x_0) = 0 = f(x_0)$. SI NOTI CHE LE FUNZIONI $f_k(x)$ SONO INTEGRABILI SU OGNI $[a,b]$ E $\int_a^b f_k(x)\,dx = 0$.

LA CONVERGENZA UNIFORME

SI DICE CHE UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI $f_k(x)$ CONVERGE AD UNA FUNZIONE $f(x)$ UNIFORMEMENTE SU UN INSIEME $X \subset \mathbb{R}$ SE PER OGNI $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ESISISTE k_0 TALE CHE PER OGNI $k \geq k_0$ E PER OGNI $x \in X$ RISULTA $\left|f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon$, CIOÈ $f(x)-\varepsilon < f_k(x) < f(x)+\varepsilon$, CON UNA NOTEVOLE INTERPRETAZIONE GEOMETRICA.

SI VEDE FACILMENTE CHE, SE $f_k \to f$ UNIFORMEMENTE SU X, ALLORA LA SUCCESSIONE NUMERICA DEGLI $s_k = \sup_{x\in X} \left|f_k(x)-f(x)\right|$ TENDE A ZERO IN QUANTO PER $k\geq k_0$ RISULTA $s_k \leq \varepsilon$. VALE IL VICEVERSA IN QUANTO PER OGNI $x\in X$ SI HA $\left|f_k(x)-f(x)\right| \leq s_k$.

ESERCIZIO: VERIFICHIAMO CHE LE $f_k(x) = kxe^{-kx^2}$ CONVERGONO A $f(x)=0$ IN $[0,1]$ NON UNIFORMEMENTE. POSTO $s_k = \sup_{[0,1]} \left|f_k(x) - f(x)\right| = \max_{[0,1]} kxe^{-kx^2}$ SI VEDE CHE $s_k \longrightarrow +\infty$.

INFATTI $s_k \geq f_k(x_k)$ COMUNQUE SIA $x_k \in [0,1]$.

CON $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ SI HA $f_k(x_k) = \frac{\sqrt{k}}{e} \longrightarrow +\infty$.

MA 05 APR 2022

OSSERVAZIONE: LA CONVERGENZA UNIFORME CONSERVA LA LIMITATEZZA, CIOÈ, SE $\sup_X \left|f_k(x)\right| < +\infty$ PER OGNI k, E SE $f_k(x) \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE IN X, ALLORA f È LIMITATA.

INFATTI PRENDO $\varepsilon = 1$ E TROVO f_{k_0} TALE CHE

$$f_{k_0}(x) - \varepsilon < f(x) < f_{k_0}(x)+\varepsilon$$

E LA TESI SEGUE.

TEOREMA: SE $f_k(x)$ È CONTINUA IN $x_0 \in X$ PER OGNI k E SE $f_k \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE IN X ALLORA f È CONTINUA IN x_0 (SERVE CHE X SIA UN INTERVALLO, OPPURE CHE SIA IL DOMINIO DI f. DISTURBA CHE X SIA UN SOTTOINSIEME PROPRIO DEL DOMINIO DI f)

SUPPONIAMO CHE X SIA UN INTERVALLO. PRESO $\varepsilon \in (0,+\infty)$ DEVO «TROVARE» UN INTORNO DI x_0 TALE CHE $\left|f(x)-f(x_0)\right| < \varepsilon$ IN TALE INTORNO.

STANTE LA CONVERGENZA UNIFORME, ESISTE f_{k_0} TALE CHE $\left|f_{k_0}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ PER OGNI $x \in X$.

ESSENDO f_{k_0} CONTINUA, RISULTA $\left|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ IN UN INTORNO I DI x_0. QUINDI PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE $\left|f(x)-f(x_0)\right| \leq$

$$\leq \left|f(x)-f_{k_0}(x)\right| + \left|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)\right| + \left|f_{k_0}(x_0) - f(x_0)\right|$$

GI 07 APR 2022

TEOREMA: SE LE f_k SONO CONTINUE IN $[a,b]$ (DUNQUE INTEGRABILI) E SE $f_k \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE IN $[a,b]$ ALLORA (f È CONTINUA E)

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\left|\int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le$$

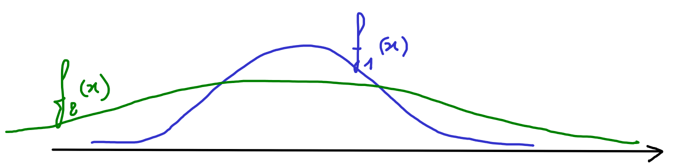
$$\le \int_a^b \left|f_k(x)-f(x)\right| dx \le (b-a)\,s_k \to 0.$$

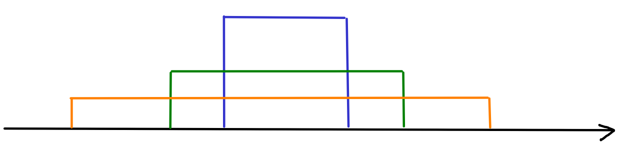
OSSERVAZIONE: SERVE CHE $b-a<+\infty$.

ESEMPIO: $f_k(x) = \dfrac{k}{k^2+x^2} \le \dfrac{1}{k} \longrightarrow 0$

QUINDI $f_k(x) \longrightarrow f(x)\equiv 0$ UNIFORMEMENTE SU $\mathbb{R}$.

TUTTAVIA $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\,dx = \operatorname{arctg}\frac{x}{k}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$





INDIPENDENTEMENTE DALLA LIMITATEZZA DEL DOMINIO DI INTEGRAZIONE, SE ESISTE UNA FUNZIONE $\varphi(x)$ (OPPURE $g(x)$) TALE CHE:

1. $|f_k(x)| \le \varphi(x)$
2. $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx < +\infty$

SI DICE CHE $\varphi(x)$ È UNA MAGGIORANTE SOMMABILE

SI PUÒ PASSARE AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE (TEOREMA DELLA CONVERGENZA DOMINATA).

NON È RICHIESTA LA CONVERGENZA UNIFORME.

OSSERVAZIONE. LA SITUAZIONE DEL 30/03 ERA DIVERSA:

SERVE CHE $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t,y_k(t))\,dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt.$

SE $y_k \longrightarrow y$ UNIFORMEMENTE, SI HA

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_k(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt\right| \le$$

$$\le \int_{x_0}^{x} \left|f(t,y_k(t)) - f(t,y(t))\right| dt \le$$

$$\le L\int_{x_0}^{x} |y_k(t)-y(t)|\,dt \le (b-a)\,L\,s_k \longrightarrow 0.$$

ESERCIZIO: USARE LA CONTINUITÀ (UNIFORME) DI f E NON LA LIPSCHITZIANITÀ

PER GIUSTIFICARE LA DIMOSTRAZIONE DEL 30/03 RESTA DA VERIFICARE CHE $y_k \longrightarrow y$ UNIFORMEMENTE.

A MAGGIOR RAGIONE, LA DIFFICOLTÀ RISIEDE NEL FATTO CHE y È INCOGNITA. CI SERVIREMO DEL CRITERIO DI CAUCHY UNIFORME (LA COMPLETEZZA DI $C^0([a,b])$):

LE SUCCESSIONI FONDAMENTALI IN $C^0([a,b])$, CIOÈ TALI CHE, POSTO $s_{mk} = \sup_{[a,b]} |f_m(x) - f_k(x)|$, SI HA

$\displaystyle\lim_{m,k\to+\infty} s_{mk} = 0$, CONVERGONO UNIFORMEMENTE.

GI 07 APR 2022

DIMOSTRAZIONE: (I) PER OGNI $x_0 \in [a,b]$ SI HA

$$\left|f_n(x_0) - f_k(x_0)\right| \le \delta_{nk} \xrightarrow[n,k\to+\infty]{} 0$$

QUINDI LA SUCCESSIONE NUMERICA $\left(f_n(x_0)\right)$ È FONDAMENTALE IN $\mathbb{R}$ E QUINDI CONVERGE AD UN LIMITE FINITO $f(x_0)$. RIMANE DEFINITA UNA FUNZIONE f LIMITE PUNTUALE DI f_n. (II) LA CONVERGENZA È UNIFORME. PRESO $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ESISTE k_0 TALE CHE SE $n,k \ge k_0$ SI HA $\delta_{nk} < \varepsilon$ QUINDI

$$f_k(x) - \varepsilon < f_n(x) < f_k(x) + \varepsilon \quad \text{IN } [a,b].$$

SICCOME $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ PER OGNI x, NE SEGUE

$$f_k(x) - \varepsilon \le f(x) \le f_k(x) + \varepsilon \quad \text{QUINDI}$$

$\left|f_k(x) - f(x)\right| \le \varepsilon$ IN $[a,b]$ E LA TESI SEGUE.

VALE IL VICEVERSA: SE $f_n \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE, RISULTA $\lim\limits_{n,k\to+\infty} \delta_{nk} = 0$ (ESERCIZIO DA SVOLGERSI CON LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

RESTA DA VERIFICARE CHE LA SUCCESSIONE DELLE $f_k(x)$ È FONDAMENTALE. PREMESSA: UNA SERIE DI FUNZIONI $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ SI DICE CONVERGENTE PUNTUALMENTE / UNIFORMEMENTE ALLA FUNZIONE $S(x)$ SE LA SUCCESSIONE DELLE SOMME RIDOTTE (O PARZIALI) $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE / UNIFORMEMENTE AD $S(x)$.

UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE (MA NON NECESSARIA) PER LA CONVERGENZA UNIFORME DI UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ È LA TOTALE CONVERGENZA, CIOÈ LA CONVERGENZA DELLA SERIE NUMERICA $\sum_{k=0}^{+\infty} \sup \left|f_k(x)\right|$ (CRITERIO DI WEIERSTRASS). OSSERVAZIONE: PER LA TOTALE CONVERGENZA DELLA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ OCCORRE E BASTA CHE ESISTA UNA SUCCESSIONE DI COSTANTI M_k TALI CHE: 1. $\left|f_k(x)\right| \le M_k$; 2. $\sum_{k=0}^{+\infty} M_k < +\infty$. IN TAL CASO, INFATTI, SI HA $\sup\limits_x \left|f_k(x)\right| \le M_k$. OSSERVAZIONE: UNA SERIE UNIFORMEMENTE CONVERGENTE PUÒ NON ESSERE TOTALMENTE CONVERGENTE, COME AD ESEMPIO CAPITA CON $f_k(x) \equiv \frac{(-1)^k}{k}$. IN QUESTO CASO SI HA CHE $S_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE (PERCHÉ NON DIPENDE DA x) MA NON TOTALMENTE PERCHÉ $\sup\limits_x \left|f_k(x)\right| = \frac{1}{k}$ E QUINDI $\sum_{k=1}^{+\infty} \sup\limits_x \left|f_k(x)\right| = +\infty$. DIMOSTRIAMO CHE LA TOTALE CONVERGENZA IMPLICA QUELLA UNIFORME.

VERIFICHIAMO CHE LA SUCCESSIONE DELLE $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE. USIAMO IL CRITERIO DI CAUCHY UNIFORME: VEDIAMO SE $\sup\limits_x \left|S_n(x) - S_k(x)\right| \xrightarrow[n,k\to 0]{} 0$.

NON È RESTRITTIVO SUPPORRE $k < n$ E QUINDI $\left|S_n(x) - S_k(x)\right| \le \sum_{i=k+1}^{n} \left|f_i(x)\right| \le \sum_{i=k+1}^{n} \sup\limits_x \left|f_i(x)\right|$ IL CHE IMPLICA

$$\sup_x \left|S_n(x) - S_k(x)\right| \le \sum_{i=k+1}^{n} \sup_x \left|f_i(x)\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

ABBIAMO USATO IL CRITERIO DI CAUCHY PER LE SERIE NUMERICHE: UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CONVERGE AD UNA SOMMA FINITA SE E SOLO SE $\sum_{i=k+1}^{n} a_i \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$

PER VEDERLO BASTA RICORDARE CHE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CONVERGE QUANDO LA SUCCESSIONE DELLE $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ CONVERGE.

PER IL CRITERIO DI CAUCHY, CIÒ AVVIENE SE E SOLO SE $S_n - S_k \xrightarrow[n,k\to+\infty]{} 0.$ MA QUESTO SIGNIFICA CHE $\sum_{i=k+1}^{n} a_i \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ COME AFFERMATO.

VE 08 APR 2022

$$\boxed{\text{UN UTILE ESEMPIO MODELLO}}$$

STUDIAMO LE FUNZIONI $f_k(x) = x^k$ SULL'INTERVALLO $(0,1)$. CERCHIAMO IL LIMITE $\lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ E VEDIAMO SE LA CONVERGENZA È UNIFORME. PER OGNI $x\in(0,1)$ SI TROVA $\lim_{k\to+\infty} x^k = 0$. PONIAMO ALLORA $s_k = \sup_{(0,1)} x^k = 1$ CHE NON È IL MASSIMO PERCHÉ $x^k < 1$ IN $(0,1)$ SE $k \geq 1$.

OGNI $y_0 < 1$ NON È UN MAGGIORANTE DI x^k PERCHÉ $x^k > y_0$ PER $x \in (1-\delta, 1)$.

SICCOME $s_k \equiv 1 \not\to 0$ LA CONVERGENZA NON È UNIFORME.

VE 08 APR 2022

STUDIAMO ALLORA L'INTERVALLO $(0,b)$ CON $b\in(0,1)$. SI HA ANCORA $\lim_{k\to+\infty} x^k = 0$ PER OGNI $x\in(0,b)\subset(0,1)$. INOLTRE $s_k = \sup_{(0,b)} x^k = b^k$ CHE NON È UN MASSIMO.

SICCOME $s_k = b^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ PERCHÉ $b\in(0,1)$, LA CONVERGENZA È UNIFORME.

STUDIAMO ALLORA $f_k(x) = x^k$ PER $x\in(0,1]$.

ADESSO $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{SE } x\in(0,1) \\ 1, & \text{SE } x=1. \end{cases}$

ESSENDO $f_k \in C^0((0,1])$, SE CONVERGONO UNIFORMEMENTE SI HA $f\in C^0((0,1])$, MA SICCOME f È DISCONTINUA, LA CONVERGENZA NON È UNIFORME.

PROPOSIZIONE: SE $f_k \to f$ UNIFORMEMENTE IN UN $X\subset\mathbb{R}$ ALLORA $f_k\to f$ UNIFORMEMENTE IN OGNI $S\subset X$. DIMOSTRAZIONE:

$$\sup_{x\in S} |f_k(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in X} |f_k(x)-f(x)| \to 0.$$

APPLICAZIONE: SE x^k CONVERGESSE UNIFORMEMENTE SU $(0,1]$, CONVERGEREBBE UNIFORMEMENTE ANCHE SU $(0,1)$, IL CHE NON AVVIENE.

PROPOSIZIONE 1. SE $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ PER $x \in X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ALLORA LA CONVERGENZA È UNIFORME SU X. DIMOSTRAZIONE: PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTONO $k_1, \dots, k_n$ TALI CHE

$$|f_k(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \text{ PER } k \geq k_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

PRENDO $k_0 = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ E POSSO SCRIVERE $\max_{i=1,\dots,n} |f_k(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ PER $k \geq k_0$.

PROPOSIZIONE 2. SE $f_k \to f$ UNIFORMEMENTE SU $X \subset \mathbb{R}$ E SE $\lim_{k\to+\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$ ALLORA $f_k \to f$ UNIFORMEMENTE SU $X \cup \{x_0\}$

DIMOSTRAZIONE: ESERCIZIO SULLA FALSARIGA DELLA PROPOSIZIONE PRECEDENTE.

APPLICAZIONE: SE x^k CONVERGESSE UNIFORMEMENTE SU $(0,1)$ ALLORA CONVERGEREBBE UNIFORMEMENTE SU $(0,1]$ MA CIÒ NON AVVIENE PERCHÉ $f(x)$ È DISCONTINUA.

VE 08 APR 2022

$$\boxed{\text{SCAMBIO DEI LIMITI}}$$

TEOREMA: PRENDIAMO UNA SUCCESSIONE (f_k) CONVERGENTE UNIFORMEMENTE AD f SU (a,b) EVENTUALMENTE ILLIMITATO. SE ESISTONO FINITI I LIMITI $\ell_k = \lim_{x\to b^-} f_k(x)$ ALLORA:

1) LA SUCCESSIONE DEGLI ℓ_k AMMETTE LIMITE FINITO $\ell \in \mathbb{R}$;

2) RISULTA $\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell$. IN SINTESI:

$$\lim_{x\to b^-} \lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{x\to b^-} f_k(x)$$

OSSERVAZIONE: IL TEOREMA CONTINUA A VALERE PER $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ SOSTITUENDO b CON $+\infty$: SE $f_k \to f$ UNIFORMEMENTE SU $\mathbb{N}$, E SE ESISTONO FINITI I LIMITI $\lim_{n\to+\infty} f_k(n) = \ell_k$, ALLORA

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} f_k(n) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_k(n)$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. 1) USO IL CRITERIO DI CAUCHY. PRESO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE k_0 TALE CHE SE $n, k \geq k_0$ RISULTA $|f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ PER OGNI $x \in (a,b)$ OVVERO $x \in \mathbb{N}$. PASSANDO AL LIMITE PER $x \to b^-$ OVVERO PER $x \to +\infty$ SI OTTIENE $|\ell_n - \ell_k| \leq \varepsilon$ QUINDI $\ell_k \to \ell \in \mathbb{R}$.

2) USO LA DEFINIZIONE DI LIMITE PER VERIFICARE CHE $\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell$. PRESO $\varepsilon \in (0,+\infty)$ ESISTE k_0 TALE CHE $\left|f_k(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ SE $k \geq k_0$ E $x \in (a,b)$ OVVERO $x \in \mathbb{N}$. ESISTE ANCHE k_1 TALE CHE $\left|\ell_k - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ SE $k \geq k_1$. POSTO $k_2 = \max\{k_0, k_1\}$, SICCOME $\lim_{x\to b^-} f_{k_2}(x) = \ell_{k_2}$

ESISTE x_0 TALE CHE $\left| f_{k_2}(x) - \ell_{k_2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

PER $x \in (x_0, b)$. IN TALE INTERVALLO RISULTA QUINDI

$$\left|f(x)-\ell\right| \leq \left|f(x) - f_{k_2}(x)\right| + \left|f_{k_2}(x) - \ell_{k_2}\right| + \left|\ell_{k_2} - \ell\right|$$

$< \varepsilon$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

COROLLARIO: SE $f_k \in C^0((a,b])$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A f IN $(a,b]$, ALLORA $\lim_{x\to b^-} f_k(x) = f_k(b)$ $(= \ell_k)$. QUINDI PER IL TEOREMA PRECEDENTE SI HA CHE 1) LE $f_k(b)$ AMMETTONO LIMITE ℓ MA QUESTO LO SAPPIAMO, ANZI, $f_k(b) \to f(b)$ PER IPOTESI. 2) RISULTA $\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell = f(b)$

DUNQUE $f(x)$ È CONTINUA DA SINISTRA IN $x = b$.

APPLICAZIONE: SAPPIAMO CHE LA SERIE GEOMETRICA $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ CONVERGE A $\frac{1}{1-x}$ SU $(-1, 1)$.

PER DEFINIZIONE, LA CONVERGENZA UNIFORME DELLA SERIE EQUIVALE A QUELLA DELLA SUCCESSIONE DELLE $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & x \neq 1, \\ n+1, & x = 1 \end{cases}$

CHE ESSENDO POLINOMI SONO CONTINUE E QUINDI

$$\lim_{x\to 1} S_n(x) = S_n(1) = n+1 = \ell_n.$$

SE $S_n(x)$ CONVERGE A $S(x) = \frac{1}{1-x}$ UNIFORMEMENTE SU $(a, 1)$, ALLORA LA SUCCESSIONE $\ell_n = n+1$ AMMETTE LIMITE FINITO, IL CHE NON È VERO, DUNQUE LE $S_n(x)$ NON CONVERGONO UNIFORMEMENTE SU $(a,1)$.

ESERCIZIO: RIFARE APPLICANDO LA DEFINIZIONE DELLA CONVERGENZA UNIFORME.

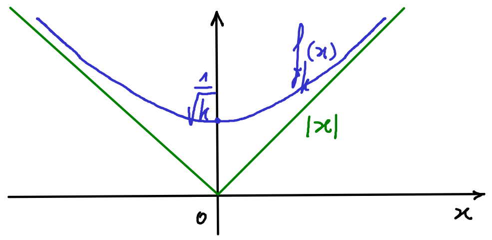
ESERCIZIO: COME DEVO PRENDERE $\tau \in (0,+\infty)$ AFFINCHÉ LA SERIE CONVERGA UNIFORMEMENTE SULL'INTERVALLO $[-\tau, \tau]$?

ESERCIZIO: STABILIRE SE LE $f_k(x) = \sqrt{\frac{1}{k} + x^2}$ CONVERGONO UNIFORMEMENTE, SE SONO DERIVABILI, E SE LA FUNZIONE LIMITE LO È.

1) ESSENDO $\lim_{k\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{k}+x^2} = \sqrt{x^2} = |x|$

PER STABILIRE SE LA CONVERGENZA È UNIFORME CONSIDERIAMO $\delta_k = \sup_x \left(\sqrt{\frac{1}{k}+x^2} - |x|\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

ESSENDO $\lim_{k\to+\infty} \delta_k = 0$, LA CONVERGENZA È UNIFORME. 2) APPLICANDO LE REGOLE DI DERIVAZIONE SI TROVA $f_k'(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{k}+x^2}}$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ E IN PARTICOLARE $f_k'(0) = 0$.



3) MALGRADO L'UNIFORME CONVERGENZA, LA FUNZIONE LIMITE $|x|$ NON È DERIVABILE NEL PUNTO $x = 0$.

PER ASSICURARE LA DERIVABILITÀ DELLA FUNZIONE LIMITE SERVE L'UNIFORME CONVERGENZA DI f_k'

LU 11 APR 2022

TEOREMA: SUPPONIAMO CHE LE $f_k : (a,b) \to \mathbb{R}$ CONVERGANO IN (ALMENO) UN PUNTO $x_0 \in (a,b)$ E CHE LE LORO DERIVATE f_k' (ESISTANO E) CONVERGANO UNIFORMEMENTE IN (a,b) AD UNA FUNZIONE $g(x)$. ALLORA: 1) LE FUNZIONI f_k CONVERGONO IN (a,b) AD UNA FUNZIONE $f(x)$; 2) LA f È DERIVABILE E SI HA CHE $f'(x) = g(x)$ IN (a,b):

$$\left(\lim_{k\to+\infty} f_k(x)\right)' = \lim_{k\to+\infty} f_k'(x)$$

ESEMPIO: SICCOME $f_k(x) = \sqrt{\frac{1}{k}+x^2}$ CONVERGE A $f(x) = |x|$ SU TUTTO $\mathbb{R}$ MA f NON È DERIVABILE NEL PUNTO $x = 0$ VUOL DIRE CHE LE $f_k'(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{k}+x^2}}$

CONVERGONO A $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,+\infty) \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

NON UNIFORMEMENTE, IL CHE È EVIDENTE IN QUANTO LE f_k' SONO CONTINUE E g NON LO È NELL'ORIGINE.

COROLLARIO: SE LE $f_k(x,y)$ SONO IN $C^1(\Omega)$, Ω APERTO IN $\mathbb{R}^2$, CONVERGONO IN Ω AD f, E SE $\frac{\partial f_k}{\partial x}$ E $\frac{\partial f_k}{\partial y}$ CONVERGONO UNIFORMEMENTE A $g_1(x,y)$ E $g_2(x,y)$ IN Ω, ALLORA ESISTONO $\frac{\partial f}{\partial x} = g_1$ $\frac{\partial f}{\partial y} = g_2$ CONTINUE, E $f \in C^1(\Omega)$.

 LU 11 APR 2022

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: APPLICHIAMO IL TEOREMA DI LAGRANGE ALLA FUNZIONE $f_n(x) - f_k(x)$:

$$f_n(x) - f_k(x) = f_n(x_0) - f_k(x_0) + \left(f_n'(c) - f_k'(c)\right)(x - x_0)$$

I. ESSENDO $f_k(x_0)$ UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE, PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ RISULTA $\left|f_n(x_0) - f_k(x_0)\right| < \varepsilon$ PER $n, k \geq k_0$ OPPORTUNO. INOLTRE, PER LA CONVERGENZA UNIFORME DI f_k' ESISTE k_1 TALE CHE

$\left|f_n'(c) - f_k'(c)\right| < \varepsilon$ PER $n, k \geq k_1$ QUALUNQUE SIA c.

DUNQUE SE $n, k \geq k_2 = \max\{k_0, k_1\}$ RISULTA

$\left|f_n(x) - f_k(x)\right| < \varepsilon + (b-a)\varepsilon$. PER L'ARBITRARIETÀ DI ε, LE f_k CONVERGONO AD UNA $f(x)$ IN TUTTO (a, b).

II. PER DIMOSTRARE CHE $f'(x) = g(x)$ FACCIO IL LIMITE $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. APPLICO ALLE FUNZIONI $\dfrac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}$ IL TEOREMA SULLO SCAMBIO DEI LIMITI. ESSE CONVERGONO UNIFORMEMENTE A $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ IN $(a, b) \setminus \{x_0\}$. INFATTI

$$\left|\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|f_n'(c) - f_k'(c)\right|$$

$< \varepsilon$ PER $n, k \geq k_1$. INOLTRE $\dfrac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} \to f_k'(x_0)$

QUINDI $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to \lim\limits_{k \to +\infty} f_k'(x_0) = g(x_0)$

ESERCIZIO: TROVARE f_k CHE NON CONVERGONO SEBBENE f_k' CONVERGA UNIFORMEMENTE

MA 12 APR 2022

FUNZIONI ANALITICHE

LE FUNZIONI e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$

PONGONO UN PROBLEMA DI DEFINIZIONE!

VEDI W. RUDIN: ANALISI REALE E COMPLESSA,

CHE ESORDISCE DEFINENDO $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

IN GENERALE, LE SERIE DI POTENZE SONO SERIE DI FUNZIONI I CUI TERMINI $f_k(x)$ HANNO LA FORMA $f_k(x) = a_k x^k$ CON $a_k \in \mathbb{R}$.

MOTIVAZIONE: LA SERIE DI TAYLOR DI UNA $f(t)$ È $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k$ QUINDI,

POSTO $a_k = \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}$ E $x = t - t_0$ DIVENTA

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. PER ESEMPIO: $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

CON $a_k = \frac{1}{k!}$ E $x \in \mathbb{R}$. OPPURE: $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ DOVE $a_k = 1$ PER OGNI k

E $x \in (-1, 1)$. L'INSIEME DEGLI $x \in \mathbb{R}$ DOVE UNA SERIE DI POTENZE CONVERGE È UN INTERVALLO (LIMITATO O ILLIMITATO, APERTO, CHIUSO, SEMIAPERTO) OPPURE È $\{0\}$.

ESEMPIO: TROVIAMO I COEFFICIENTI a_k IN MODO TALE CHE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGA SOLO NEL PUNTO $x = 0$. PRENDIAMO $a_k = k^k$

E OTTENIAMO LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} (kx)^k$. SE FISSO $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ TROVO $\lim_{k \to +\infty} |kx|^k = +\infty$ QUINDI LA SERIE NON CONVERGE.

OSSERVAZIONE: COMUNQUE SI PRENDANO I COEFFICIENTI a_k, QUANDO $x = 0$ LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ SI RIDUCE AL SOLO PRIMO TERMINE, CHE È a_0 E CONVERGE BANALMENTE.

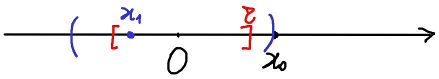
SI INTENDE CHE $0^0 = 1$: CIÒ CONSENTE DI SCRIVERE IL POLINOMIO $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ BREVEMENTE COME $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

LA LOCUZIONE « 0^0 È INDETERMINATO » SIGNIFICA CHE SE $f(x) > 0$ E $f, g \to 0$ ALLORA IL LIMITE DI $(f(x))^{g(x)}$ PUÒ ESSERE UN $\ell \in [0, +\infty)$ OPPURE $+\infty$ OPPURE NON ESISTERE A SECONDA DI COME SONO SCELTE LE FUNZIONI f E g.

MA 12 APR 2022

TEOREMA: SE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE IN UN PUNTO $x_0 \neq 0$ ALLORA PER OGNI $r \in (0, |x_0|)$ LA SERIE CONVERGE TOTALMENTE NELL'INTERVALLO $[-r, r]$.

COROLLARIO: PRENDO $x_1 \in (-|x_0|, |x_0|)$ E POI SCELGO $r \in (|x_1|, |x_0|)$ COSICCHÉ LA SERIE CONVERGE TOTALMENTE IN $[-r, r] \ni x_1$.
QUINDI LA SERIE CONVERGE IN $(-|x_0|, |x_0|)$.



ESEMPIO: LA SERIE LOGARITMICA $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$ CONVERGE NEL PUNTO $x_0 = -1$ A $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\log 2 < 0$ MA NON CONVERGE NEL PUNTO $x_1 = -x_0 = 1$ PERCHÉ $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$
TANTOMENO CONVERGE NELL'INTERVALLO $[-1, 1]$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: SICCOME LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_0^k$ CONVERGE PER IPOTESI, SI HA NECESSARIAMENTE $\lim_{k\to+\infty} |a_k x_0|^k = 0$

(N.B.: $b_k \to 0$ SE E SOLO SE $|b_k| \to 0$)

PRESO $r \in (0, |x_0|)$ VEDIAMO SE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE TOTALMENTE NELL'INTERVALLO $[-r, r]$.

SI HA CHE $s_k = \sup_{[-r, r]} |a_k x^k| = |a_k| r^k$

DUNQUE $s_k = |a_k| r^k = |a_k x_0|^k \cdot \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^k < \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^k$ PER $k \geq k_0$ PERCHÉ $|a_k x_0|^k < 1$ PER $k \geq k_0$. MA LA SERIE GEOMETRICA $\sum_{k=k_0}^{+\infty} \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^k$ CONVERGE PERCHÉ $\frac{r}{|x_0|} < 1$ QUINDI $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k < +\infty$ PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO.

NE SEGUE CHE L'INSIEME DI CONVERGENZA È UN INTERVALLO CENTRATO NELL'ORIGINE. IL RAGGIO r DI TALE INTERVALLO È INDIVIDUATO COME SEGUE: POSTO $L = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, +\infty]$

SI HA $r = \begin{cases} +\infty, & \text{SE } L = 0, \\ \frac{1}{L}, & \text{SE } L \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{SE } L = +\infty. \end{cases}$

CON $\limsup_{k\to+\infty} b_k$ SI INTENDE IL $\lim_{n\to+\infty} s_n$ DOVE $s_n = \sup_{k \geq n} b_k \geq \sup_{k \geq n+1} b_k = s_{n+1}$.

QUINDI SE ESISTE $s_n < +\infty$ RISULTA $\lim_{n\to+\infty} s_n < +\infty$

ALTRIMENTI $s_n = +\infty$ PER OGNI n E SI PONE $\limsup_{k\to+\infty} b_k = +\infty$. N.B. SE $b_k \to \ell \in \mathbb{R}$ ALLORA $\ell - \varepsilon < b_k < \ell + \varepsilon$ PER $k \geq k_0$ QUINDI $\ell - \varepsilon < s_n \leq \ell + \varepsilon$ PER $n \geq k_0$.

ESEMPIO: SE $b_k = (-1)^k$ ALLORA $s_n \equiv 1 \to 1$ QUINDI $\limsup_{k\to+\infty} (-1)^k = 1$.

ME 13 APR 2022

IL RAGGIO ϱ DELL'INTERVALLO DI CONVERGENZA È INDIVIDUATO COME SEGUE:

POSTO $L = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, +\infty]$

SI HA $\varrho = \begin{cases} +\infty, & \text{SE } L = 0, \\ \frac{1}{L}, & \text{SE } L \in (0,+\infty), \\ 0, & \text{SE } L = +\infty. \end{cases}$

NEL CASO $\varrho = +\infty$ SI INTENDE CHE LA SERIE CONVERGE SU $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, NEL CASO $\varrho = 0$ LA SERIE CONVERGE SOLO NEL PUNTO $x = 0$.

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO CHE $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L \in (0, +\infty)$. PONIAMO $\varrho = \frac{1}{L}$. PRENDIAMO $x \in (-\varrho, \varrho) \setminus \{0\}$ E VERIFICHIAMO CHE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE PER IL CRITERIO DELLA RADICE.

OSSERVO CHE $\sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \sqrt[k]{|a_k|} <$

$< |x| \cdot (L+\varepsilon) = q < 1$

PER $k \geq n_0$ E $\varepsilon < \frac{1}{|x|} - L$, AD ESEMPIO $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|x|} - L\right)$, IL CHE È POSSIBILE IN QUANTO $\frac{1}{|x|} - L > 0$ PERCHÉ $|x| <$ $< \varrho = \frac{1}{L}$. QUINDI $|a_k x^k| < q^k$ PER $k \geq k_0$. POICHÉ $\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k < +\infty$, LA TESI SEGUE PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO.

SECONDA PARTE: PRENDO $x \in \mathbb{R} \setminus [-\varrho, \varrho]$, CIOÈ $|x| > \varrho = \frac{1}{L}$. VERIFICHIAMO CHE $a_k x^k \not\to 0$. INDIVIDUIAMO UNA SUCCESSIONE k_n TALE CHE $|a_{k_n} x^{k_n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

FISSATO $\varepsilon > 0$, ESISTE UNA SUCCESSIONE STRETTAMENTE CRESCENTE (k_n) TALE CHE $\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} > L - \varepsilon$. INFATTI SI HA $s_n > L - \varepsilon$ PER $n \geq n_0$. IN PARTICOLARE $s_{n_0} > L - \varepsilon$ QUINDI ESISTE $k_0 \geq n_0$ TALE CHE $\sqrt[k_0]{|a_{k_0}|} > L - \varepsilon$. PONGO $n_1 = k_0 + 1$ E DA $s_{n_1} > L - \varepsilon$ SEGUE L'ESISTENZA DI $k_1 \geq n_1 > k_0$ TALE CHE $\sqrt[k_1]{|a_{k_1}|} > L - \varepsilon$

PONGO $n_2 = k_1 + 1$ E TROVO $\sqrt[k_2]{|a_{k_2}|} > L - \varepsilon$ ECCETERA. DUNQUE $\sqrt[k_n]{|a_{k_n} x^{k_n}|} = |x| \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|}$

$> |x| (L - \varepsilon) = q > 1$ PER OGNI n E $\varepsilon < L - \frac{1}{|x|}$ IL CHE È POSSIBILE PERCHÉ $L - \frac{1}{|x|} > 0$ IN QUANTO $|x| > \frac{1}{L}$.

AD ESEMPIO $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(L - \frac{1}{|x|}\right) > 0$.

MA ALLORA $|a_{k_n} x^{k_n}| > q^{k_n} \longrightarrow +\infty$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

ME 13 APR 2022

OSSERVAZIONE: DI SOLITO ESISTE IL LIMITE $r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$. IN TAL CASO, ESSO FORNISCE IL RAGGIO DELL'INTERVALLO DI CONVERGENZA:

1) IL TEOREMA SI PUÒ RIDIMOSTRARE USANDO IL CRITERIO DEL RAPPORTO;

2) LEMMA: SE $\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = r$ ALLORA $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{r}$ (SI DIMOSTRA CON LA DEFINIZIONE DI LIMITE);

3) È INUTILE PRENDERE $\liminf_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} < \limsup_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$.

PER ASSIMILARE TALI ENUNCIATI, CONSIDERIAMO ALCUNE SERIE NOTEVOLI. SERIE GEOMETRICA:

$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$. QUI $a_k \equiv 1$ QUINDI $\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \equiv 1$

E $\sqrt[k]{|a_k|} \equiv 1$ QUINDI $r = 1$ COME SAPPIAMO.

SERIE ESPONENZIALE: $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. QUI

$a_k = \frac{1}{k!}$ QUINDI $\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = k+1 \longrightarrow +\infty$ QUINDI

$r = +\infty$. POSTO $x = -t^2$ PER $t \in \mathbb{R}$ SI TROVA

$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$ CHE CONVERGE TOTALMENTE IN $[-r, r]$ PER OGNI $r \in (0, +\infty)$.

FUNZIONI CIRCOLARI: $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^k$ DOVE $t = x^2$.

N.B. PER LE SERIE CONVERGENTI VALE LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x = x \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

PERCHÉ $\sum_{k=0}^{m} a_k x = x \sum_{k=0}^{m} a_k$

POSTO $a_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ TROVIAMO $\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = (2k+3)(2k+2)$

QUINDI $r = +\infty$. ESERCIZIO: $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$= \cos x$.

INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE

SE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE IN $(-r, r)$, $r > 0$,

ALLORA CONVERGE TOTALMENTE IN $[-\delta, \delta]$ CON $\delta \in (0, r)$ QUINDI, ESSENDO $f_k(x) = a_k x^k$ FUNZIONI CONTINUE, LA SOMMA $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ È CONTINUA IN $(-r, r)$ E, PER IL TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE,

$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_0^x t^k\,dt$ PER OGNI

$x \in (-r, r)$ DUNQUE $= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} =$

$= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_{j-1}}{j} x^j$

ME 13 APR 2022

APPLICAZIONI: $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x) =$

$$= \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^j}{j}$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\boxed{\text{DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE}}$$

DATA $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGENTE IN $(-r, r)$, $r>0$,

E POSTO $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, POSSIAMO SCRIVERE

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) a_{j+1} x^j \ ?$$

SÌ SE QUESTA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE.

ME 20 APR 2022

ESERCIZIO: TROVARNE IL RAGGIO DI CONVERGENZA (È ANCORA r). SAPPIAMO CHE ESSO SI RICAVA

DA $L = \displaystyle\text{"}\lim_{j\to+\infty}\text{"} \sqrt[j]{(j+1)|a_{j+1}|} =$

$$= \lim_{j\to+\infty} \sqrt[j]{j+1} \cdot \text{"}\lim_{j\to+\infty}\text{"} \sqrt[j]{|a_{j+1}|}$$

MA $\sqrt[j]{|a_{j+1}|} = \left(|a_{j+1}|^{\frac{1}{j+1}}\right)^{\frac{j+1}{j}}$, $\frac{j+1}{j} \to 1$ E QUINDI

$$\text{"}\lim_{j\to+\infty}\text{"} \sqrt[j]{|a_{j+1}|} = \text{"}\lim_{j\to+\infty}\text{"} \sqrt[j+1]{|a_{j+1}|}$$

ME 20 APR 2022

A RIGORE, OCCORRE GIUSTIFICARE DUE PASSAGGI:

1) SE $\text{"}\lim_{k\to+\infty}\text{"} |a_k| = L$ E SE $b_k \to 1$ ALLORA

$$\text{"}\lim_{k\to+\infty}\text{"} |a_k| b_k = L;$$

2) $\text{"}\lim_{k\to+\infty}\text{"} |a_k|^{b_k} = L.$

GIUSTIFICHIAMO IL PRIMO, LIMITANDOCI AL CASO IN CUI $L \in (0, +\infty)$. PRESO $\varepsilon \in (0,1)$ RISULTA:

$$L - \varepsilon < s_n < L + \varepsilon \quad \text{DOVE} \quad s_n = \sup_{k \geq n} |a_k|$$

E $n \geq n_0$ OPPORTUNO, E POSSIAMO ANCHE SUPPORRE CHE $1-\varepsilon < b_n < 1+\varepsilon$ PER $n \geq n_0$.

CONSIDERIAMO $t_n = \displaystyle\sup_{k\geq n} |a_k| b_k$. SO CHE

$|a_k| \leq s_n < L + \varepsilon$ PER $k \geq n$ QUINDI

$$|a_k| b_k < (L+\varepsilon)(1+\varepsilon) = L + (L+1)\varepsilon + \varepsilon^2$$

DA CUI $t_n \leq L + (L+1)\varepsilon + \varepsilon^2$. PER L'ARBITRARIETÀ DI ε SEGUE CHE $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t_n =$

$= \text{"}\lim_{k\to+\infty}\text{"} |a_k| b_k \leq L$. PER CONCLUDERE, BASTA ESCLUDERE CHE RISULTI $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t_n = L_1 < L$.

SE COSÌ FOSSE, SI AVREBBE $t_n < \dfrac{L_1 + L}{2} < L$

DEFINITIVAMENTE. PRENDO UN $t_{n_0} < \dfrac{L_1+L}{2}$ ED

OSSERVO CHE $|a_k| b_k \leq t_{n_0} < \dfrac{L_1+L}{2}$

PER OGNI $k \geq n_0$. NOI SAPPIAMO CHE ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE $|a_{k_j}| \xrightarrow[j\to+\infty]{} L$. SOSTITUENDOLA SI TROVA $|a_{k_j}| \cdot b_{k_j} \to L \leq \dfrac{L_1+L}{2} < L$

PERMANENZA DEL SEGNO

ME 20 APR 2022

SICCOME $f'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\,a_k\,x^{k-1}$ CONVERGE IN $(-r,r)$

SI HA ANCHE $f''(x)=\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\,a_k\,x^{k-2}$ IN $(-r,r)$

E, IN GENERALE, $f^{(j)}(x)=\sum_{k=j}^{+\infty}\frac{k!}{(k-j)!}\,a_k\,x^{k-j}$.

ESERCIZIO: TROVARE LA SERIE DI TAYLOR DI $f(x)$ AVENTE PUNTO BASE NELL'ORIGINE (SERIE DI MACLAURIN).

LA SERIE È $\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j$, E SICCOME $f^{(j)}(0)$

$= j!\,a_j$ (PONGO $x=0$ NELLA SERIE DI $f^{(j)}(x)$)

LA SERIE CERCATA È $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j\,x^j$.

IL VICEVERSA NON È VERO: SE $f\in C^{\infty}((a,b))$ E PRENDO $x_0\in(a,b)$ POSSO SCRIVERE LA SERIE

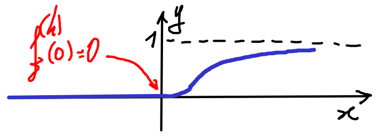
$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ MA NON È DETTO CHE RISULTI $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ IN (a,b).

ESEMPIO: $f(x)=\frac{1}{1-x}$ IN $(a,b)=(-\infty,1)$

CON $x_0=0$ TROVO LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ CHE NON CONVERGE IN $(-\infty,-1]$ MA SOLO IN $(-1,1)$

ESEMPIO: SICCOME $e^{x}\to 0$ PER $x\to-\infty$ INSIEME A TUTTE LE SUE DERIVATE, SONO POSSIBILI ESEMPI PIÙ SORPRENDENTI ATTRIBUITI A CAUCHY:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{SE } x\in(-\infty,0]\\ e^{-1/x}, & \text{SE } x\in(0,+\infty)\end{cases}$$



LA SERIE DI MACLAURIN È $\sum_{k=0}^{+\infty} 0$ CHE CONVERGE A ZERO SU TUTTO $\mathbb{R}$. QUINDI DIFFERISCE DA $f(x)$ PER $x\in(0,+\infty)$.

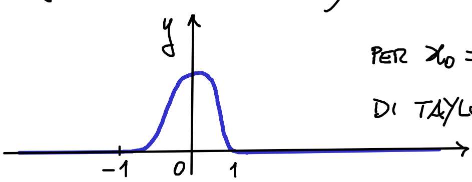
ESEMPIO: $$g(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ 0, & \text{SE } x=0\end{cases}$$

QUI $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{+\infty}0\neq g(x)$

PER OGNI $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

ESEMPIO: $$\varphi(x)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{1-x^2}}, & x\in(-1,1)\\ 0, & \text{SE } x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)\end{cases}$$

(FUNZIONE A CAMPANA)



PER $x_0=\pm 1$ LA SERIE DI TAYLOR È $\sum_{k=0}^{+\infty} 0$

DUNQUE $\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ MA NON È ANALITICA.

VE 22 APR 2022

ALLA LUCE DEGLI ESEMPI PRECEDENTI, COSA CI ASSICURA CHE $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$? LA FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE: PER OGNI $x \neq 0$ ED OGNI $n \in \mathbb{N}$ ESISTE ALMENO UN PUNTO $c(x,n)$ NELL'INTERVALLO APERTO AVENTE PER ESTREMI x E L'ORIGINE TALE CHE

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^x\right)_{x=c} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

QUINDI $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x - e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. FACCIO IL LIMITE PER $n \to +\infty$ E TROVO $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

IN QUANTO $c \in (-|x|, |x|)$ QUINDI $e^c < e^{|x|}$

E PERCIÒ $\left| e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| < e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0.$

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

E $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE: IL METODO DI CUI SOPRA CONSENTE DI DIMOSTRARE CHE $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

PURCHÉ $\left| f^{(n)}(c) \right| \leq L$ NELL'INTERVALLO AVENTE PER ESTREMI x E x_0, CON L INDIPENDENTE DA n.

ANZI, È SUFFICIENTE CHE $\left| f^{(n)}(c) \right| \leq L \cdot M^n$

PERCHÉ $L \cdot M^n \frac{|x|^n}{n!} \longrightarrow 0$. BASTA ANCHE

$\left| f^{(n)}(c) \right| \leq M^n$ DEFINITIVAMENTE.

$$\boxed{\text{ESTENSIONE AL CAMPO COMPLESSO}}$$

IL CAMPO $\mathbb{C}$ È DOTATO DI UNA NORMA, CHE È IL MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO. IN GENERALE, UNO SPAZIO VETTORIALE NORMATO X È UNO SPAZIO VETTORIALE SUL QUALE È DEFINITA UNA NORMA, CIOÈ UNA FUNZIONE A VALORI REALI CHE, COME IL MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO, IL VALORE ASSOLUTO DI UN NUMERO REALE, LA NORMA EUCLIDEA DI UN VETTORE IN $\mathbb{R}^N$, ABBIA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1) $\|x\| \geq 0$ PER OGNI $x \in X$
2) $\|x\| = 0$ SE E SOLO SE $x = \bar{0}$
3) PER OGNI $\lambda \in \mathbb{R}$ ED OGNI $x \in X$ RISULTA $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
4) PER OGNI $x, y \in X$ RISULTA $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

CONSIDERIAMO SPAZI VETTORIALI SUL CAMPO $\mathbb{R}$.

POSTO $y = -z$ DIVENTA $\|x - z\| \leq$
$\leq \|x\| + \|-z\| =$
$= \|x\| + |-1| \cdot \|z\|$
$= \|x\| + \|z\|$

LA NORMA INDUCE LA METRICA $d(x,y) = \|x - y\|$

NORMA

OPERAZIONE SUI VETTORI

UNA SUCCESSIONE DI PUNTI x_k IN UNO SPAZIO METRICO X CONVERGE AL PUNTO y SE $d(x_k, y) \in \mathbb{R}$ TENDE A $0 \in \mathbb{R}$ NELLA TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}$.

GLI INGREDIENTI DELLE SERIE SONO LA SOMMA E IL LIMITE: ESSE SI POSSONO DEFINIRE IN UNO SPAZIO VETTORIALE NORMATO.

DATA UNA SUCCESSIONE DI ELEMENTI x_k IN UNO SPAZIO VETTORIALE NORMATO X SI PUÒ DEFINIRE LA SOMMA $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \in X$. SE $S_n \longrightarrow S$ NELLA METRICA DI X SI SCRIVE $S = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$.

PRENDIAMO ADESSO UN NUMERO COMPLESSO $z \in \mathbb{C}$ E STUDIAMO LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LA SERIE CONVERGE: SI USA LA COMPLETEZZA. UNO SPAZIO METRICO X SI DICE COMPLETO SE TUTTE LE SUCCESSIONI FONDAMENTALI CONVERGONO: UNA SUCCESSIONE DI PUNTI $x_k \in X$ SI DICE FONDAMENTALE SE $d(x_k, x_n)$ TENDE A 0 NELLA TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}$ QUANDO $k, n \longrightarrow +\infty$.

PRIMA PARTE: COMPLETEZZA DEL CAMPO COMPLESSO.
PRENDO UNA SUCCESSIONE FONDAMENTALE DI NUMERI COMPLESSI $z_k = x_k + i y_k$. ESSENDO FONDAMENTALE, SI HA $d(z_k, z_n) = \| z_k - z_n \| \longrightarrow 0$

MA ALLORA $|x_k - x_n| = \sqrt{(x_k - x_n)^2} \leq$

$$\leq \sqrt{(x_k-x_n)^2 + (y_k - y_n)^2} = \| z_k - z_n \| \longrightarrow 0$$

IDEM $|y_k - y_n| \leq \| z_k - z_n \| \longrightarrow 0$ QUINDI ESISTONO $a, b \in \mathbb{R}$ TALI CHE $x_k \to a$ E $y_k \to b$.

SE ADESSO INDICHIAMO CON $w = a + ib \in \mathbb{C}$ SI VERIFICA CHE $z_k \longrightarrow w$ PERCHÉ $d(z_k, w) =$

$$\| z_k - w \| = \sqrt{(x_k - a)^2 + (y_k - b)^2} \longrightarrow 0.$$

VE 22 APR 2022

SECONDA PARTE: LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ CONVERGE.

POSTO $S_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!}$ E $S_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}$,

SENZA LEDERE LA GENERALITÀ SUPPONIAMO $k > n$

E ABBIAMO $\| S_k - S_n \| = \left\| \sum_{j=n+1}^{k} \frac{z^j}{j!} \right\| \leq$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{k} \frac{\|z\|^j}{j!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

PERCHÉ LA SERIE $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!}$ CONVERGE PER OGNI $t \in \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE: $e^z = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!}$, $z \in \mathbb{C}$

SIMILMENTE: $\operatorname{sen} z = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}$ E

$\cos z = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!}$ PER OGNI $z \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ PER OGNI $\theta \in \mathbb{R}$.

VE 29 APR 2022

NOTA: IL TEOREMA DI ABEL ASSERISCE CHE SE UNA SERIE DI POTENZE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ CONVERGE IN UN PUNTO $x_0 \neq 0$ ALLORA CONVERGE UNIFORMEMENTE NELL'INTERVALLO AVENTE PER ESTREMI x_0 E L'ORIGINE.

ESERCIZIO: IL SUDDETTO INTERVALLO SI INTENDE CHIUSO O APERTO?

VE 22 APR 2022

SERIE DI FOURIER

NEL 1822 FOURIER PUBBLICA UN MODELLO MATEMATICO DELLA CONDUZIONE DEL CALORE SECONDO IL QUALE LA TEMPERATURA È UNA FUNZIONE $u(x,t)$ CHE SODDISFA L'EQUAZIONE $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ DOVE

$$\Delta u = \nabla^2 u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \text{E} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

IL MODELLO SI APPLICA ANCHE AD UN CORPO FILIFORME DI FORMA ANULARE. IN TAL CASO SI PUÒ TROVARE UNA SUCCESSIONE DI SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI $u_k(\alpha,t) = e^{-k^2 t} \operatorname{sen} k\alpha$ E UN'ALTRA $v_k(\alpha,t) = e^{-k^2 t} \cos k\alpha$. LA RICERCA DELL'INTEGRALE GENERALE CONDUCE ALLO STUDIO DELLA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k^2 t}\left(a_k \cos k\alpha + b_k \operatorname{sen} k\alpha\right)$$

IN PARTICOLARE, ALL'ISTANTE INIZIALE $t=0$ SI OTTIENE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \cos k\alpha + b_k \operatorname{sen} k\alpha\right) = u_0(\alpha)$$

VE 29 APR 2022

IL PROBLEMA DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER CONSISTE NEL DETERMINARE I COEFFICIENTI E NELLO STABILIRE SE LA SERIE CONVERGE E IN CHE SENSO CONVERGE.

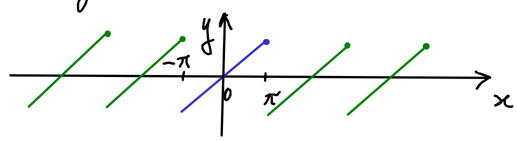
OSSERVAZIONE: LA SOMMA PARZIALE $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right)$ È PERIODICA DI PERIODO 2π: $S_n(x+2\pi) = S_n(x)$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

VE 29 APR 2022

SE $S_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ ALLORA $S_n(x+2\pi) \longrightarrow f(x+2\pi)$ E SE NE DEDUCE CHE $f(x) = f(x+2\pi)$: LA SOMMA DI UNA SERIE DI FOURIER È UNA FUNZIONE PERIODICA.

SPESSO LA FUNZIONE GENERATRICE $f(x)$ È DEFINITA SU DI UN INTERVALLO LIMITATO (IL CORPO SEDE DELLA CONDUZIONE DEL CALORE).

QUALUNQUE FUNZIONE $f: (-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ SI ESTENDE PER PERIODICITÀ A TUTTO L'ASSE REALE PONENDO $\tilde{f}(x) = f(t)$ SE $x = t + 2k\pi$ PER UN $k \in \mathbb{Z}$. DI SOLITO SI IDENTIFICANO f ED $\tilde{f}$. ESEMPIO: $f(t) = t$ PER $t \in (-\pi, \pi]$. ALLORA $\tilde{f}(x)$ È LA FUNZIONE A DENTE DI SEGA



ESERCIZIO: POSTO $f(t) = \operatorname{sgn} t$ PER $t \in (-\pi, \pi]$ TRACCIARE IL GRAFICO DI $\tilde{f}(x)$ PER $x \in \mathbb{R}$.

VE 29 APR 2022

PROPOSIZIONE: SIA $f \in C^0(\mathbb{R})$ PERIODICA DI PERIODO 2π. CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ $S_m \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE È CHE RISULTI $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \fint_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx$$

NOTA: L'APPLICAZIONE $(f,g) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx$ È BILINEARE, SIMMETRICA, E DEFINITA POSITIVA.

PER DIMOSTRARE LA PROPOSIZIONE, USIAMO LE RELAZIONI DI ORTOGONALITÀ:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{sen}\,kx)(\mathrm{sen}\,nx)\,dx = 0 \quad \text{SE } n \neq k;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)(\cos nx)\,dx = 0 \quad \text{SE } n \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{sen}\,kx)(\cos nx)\,dx = 0 \quad \text{PER OGNI } n, k.$$

QUEST'ULTIMA SEGUE DAL FATTO CHE LA FUNZIONE INTEGRANDA È DISPARI, E $\int_{-z}^{z} f(x)\,dx =$

$$= -\int_{-z}^{z} f(-x)\,dx = \int_{z}^{-z} f(t)\,dt = -\int_{-z}^{z} f(x)\,dx.$$

LE ALTRE SI POSSONO OTTENERE INTEGRANDO PER PARTI O ANCHE USANDO LE FORMULE DI WERNER:

DA $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$

SEGUE $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$

PONENDO $\alpha = kx$ E $\beta = nx$ SI TROVA

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)(\cos nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((k+n)x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((k-n)x)\,dx = 0 \quad \text{PER } k \neq n$$

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE: SE LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE, ALLORA PER OGNI n SI HA $S_k(x)\cos nx \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x)\cos nx$ UNIFORMEMENTE: $\left|S_k(x)\cos nx - f(x)\cos nx\right| = |\cos nx|\cdot|S_k(x) - f(x)| \leq |S_k(x) - f(x)|$.

MA ALLORA $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kx)(\cos nx)\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{sen}\,kx)(\cos nx)\,dx\right].$$

IN PARTICOLARE, SE $n = 0$ TROVIAMO $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0$. SE, INVECE, $n \geq 1$ SI TROVA

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi a_n.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx\,dx.$$

DA ORA IN AVANTI PONIAMO $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$ PER OGNI $k \geq 0$ E SCRIVIAMO LA SERIE NELLA FORMA

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos kx + b_k\,\mathrm{sen}\,kx\right)$$

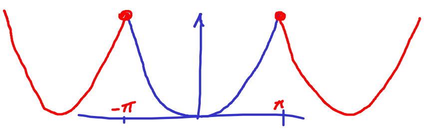
VE 29 APR 2022

OSSERVAZIONE: NEL 1856 BERNHARD RIEMANN CERCÒ DI SVILUPPARE IN SERIE DI FOURIER FUNZIONI DISCONTINUE, E SICCOME a_k, b_k SONO DEFINITI TRAMITE INTEGRALI, DIEDE LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE TUTTORA IN USO. IL TESTO DI ULISSE DINI « FONDAMENTI PER LA TEORICA DELLE FUNZIONI DI VARIABILI REALI » TESTIMONIA CHE LA DEFINIZIONE ERA $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$, CON F PRIMITIVA DI f.

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONVERGENZA

SE $f \in C^1([-\pi,\pi])$ E SE $\boxed{f(-\pi)=f(\pi)}$ ALLORA (SI ESTENDE PER PERIODICITÀ A UNA $\tilde{f} \in C^0(\mathbb{R})$ E C^1 A TRATTI, E) LA SERIE DI FOURIER CONVERGE UNIFORMEMENTE.

$f(x)=x^2$



IL PRIMO TASSELLO PER LE DIMOSTRAZIONI DEI VARI TEOREMI DI CONVERGENZA CONOSCIUTI È LA DISUGUAGLIANZA DI BESSEL:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

IN EFFETTI VALE L'UGUAGLIANZA DI PARSEVAL:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

CHE SI DIMOSTRA SUCCESSIVAMENTE

LU 02 MAG 2022

CONSIDERIAMO UNA $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ CONTINUA A TRATTI, CIOÈ ESISTONO $x_0=-\pi < x_1 < \dots < x_n=\pi$ TALI CHE $f \in C^0((x_{i-1},x_i))$ ED ESISTONO FINITI I LIMITI $\lim_{x\to x_{i-1}^+} f(x) = f(x_{i-1}^+)$ E $\lim_{x\to x_i^-} f(x) = f(x_i^-)$ PER OGNI $i=1,\dots,n$.

NOTA: $f\in C^0([-\pi,\pi])$ VA BENE!

DEFINIAMO $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$ E $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx$, E QUINDI $S_n(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx + b_k\,\mathrm{sen}\,kx\right)$.

OSSERVAZIONE N. 1:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,S_n(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx = \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right).$$

OSSERVAZIONE N. 2:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\,S_n(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\cos jx\,dx + \sum_{j=1}^{n} b_j \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\,\mathrm{sen}\,jx\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{-\pi}^{\pi} a_j(\cos jx)^2\,dx + b_j \int_{-\pi}^{\pi} b_j(\mathrm{sen}\,jx)^2\,dx$$

 LU 02 MAG 2022

QUINDI $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(S_m(x)\right)^2 dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{j=1}^{m}\left(a_j^2+b_j^2\right)\right)$

DIMOSTRIAMO LA DISUGUAGLIANZA DI BESSEL:

$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_m(x)\right)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + $$

$$-2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,S_m(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left(S_m(x)\right)^2 dx$$

QUINDI $\displaystyle\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+b_k^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$

PER OGNI n. ANZI,

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_m(x)\right)^2 dx$$

QUANDO $n \to +\infty$ SI HA $\displaystyle\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) \le$

$\le \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

LEMMA, O TEOREMA, DI RIEMANN, O DI RIEMANN–LEBESGUE: SE $f \in L^1((-\pi,\pi))$ ALLORA

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0 \quad \text{E}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,kx\,dx = 0.$$

SE f È CONTINUA A TRATTI, LA CONCLUSIONE SEGUE DALLA DISUGUAGLIANZA DI BESSEL INVOCANDO LA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE NUMERICA.

PER DIMOSTRARE CHE $S_m(x) \to f(x)$ COL METODO DI DIRICHLET CI SERVIRÀ OSSERVARE CHE

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\cos kx = \frac{\text{sen}\,\frac{2n+1}{2}x}{2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}} \quad \text{PER } x \ne 2k\pi$$

NOTA: $\displaystyle\frac{\text{sen}\,\frac{2n+1}{2}x}{2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}} \sim \frac{\frac{2n+1}{2}x}{2\,\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} n+\frac{1}{2}$

NOTA: $\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\frac{\text{sen}\,\frac{2m+1}{2}x}{2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}}\,dx = \int_{0}^{\pi}\frac{\text{sen}\,\frac{2m+1}{2}x}{2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}}\,dx = \frac{\pi}{2} +$

$\displaystyle+\sum_{k=1}^{m}\int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx = \frac{\pi}{2}$

DIMOSTRAZIONE DELL'IDENTITÀ TRIGONOMETRICA: CALCOLIAMO $\displaystyle\text{sen}\,\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{m}2(\cos kx)\,\text{sen}\,\frac{x}{2}$ USANDO LA FORMULA DI WERNER $2\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta = \text{sen}(\alpha+\beta) + - \text{sen}(\alpha-\beta)$. POSTO $\alpha = kx$ E $\beta = \frac{x}{2}$ SI TROVA

$$\text{sen}\,\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left(\text{sen}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)x - \text{sen}\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right) =$$

$$= \text{sen}\,\frac{x}{2} + \left(\text{sen}\,\frac{3}{2}x - \text{sen}\,\frac{x}{2}\right) + \left(\text{sen}\,\frac{5}{2}x - \text{sen}\,\frac{3}{2}x\right) +$$

$$+ \ldots + \left(\text{sen}\,\frac{2n+1}{2}x - \text{sen}\,\frac{2n-1}{2}x\right) = \text{sen}\,\frac{2m+1}{2}x.$$

NOTA: LA CONTINUITÀ DI f NON BASTA NEANCHE PER LA CONVERGENZA PUNTUALE! FAMOSO UN ESEMPIO DOVUTO A KOLMOGOROV. VALE PERÒ IL TEOREMA DI FEJÉR: SE $f(-\pi) = f(\pi)$ ALLORA LA MEDIA $\displaystyle\bar{S}_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} S_k(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE AD $f(x)$. SI DICE CHE LA SERIE DI FOURIER CONVERGE AD $f(x)$ NEL SENSO DI CESÀRO. ESERCIZIO: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k$

LU 02 MAG 2022

SUPPONIAMO QUINDI, IN AGGIUNTA ALLA CONTINUITÀ A TRATTI, CHE IN UN PUNTO $x_0 \in [-\pi, \pi]$ ESISTANO LA DERIVATA DESTRA E LA DERIVATA SINISTRA, CIOÈ, SE $x_0 \in (-\pi, \pi)$ PONIAMO $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ E $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ E SUPPONIAMO CHE ESISTANO FINITI I LIMITI $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} = f'(x_0^-)$

E $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} = f'(x_0^+)$. SE $x_0 = \pm\pi$

PONIAMO $f(\pi^-) = \lim_{x \to \pi^-} f(x)$ E SUPPONIAMO CHE ESISTA FINITO IL LIMITE $\lim_{x \to \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi^-)}{x - \pi}$,

INOLTRE PONIAMO $f((-\pi)^+) = \lim_{x \to (-\pi)^+} f(x)$ E SUPPONIAMO CHE ESISTA FINITO IL LIMITE $f'((-\pi)^+) =$

$$= \lim_{x \to (-\pi)^+} \frac{f(x) - f((-\pi)^+)}{x + \pi}.$$

SOTTO TALI IPOTESI, SI DIMOSTRA CHE $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) =$

$$= \begin{cases} \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}, & x_0 \in (-\pi, \pi) \\ \frac{f(\pi^-) + f((-\pi)^+)}{2}, & x_0 = \pm\pi \end{cases}$$

IN PARTICOLARE, SE f È CONTINUA IN $x_0 \in (-\pi, \pi)$, ALLORA $S_n(x_0) \to f(x_0)$. SE, INVECE, $x_0 = \pm\pi$, E SE $f((-\pi)^+) = f(\pi^-) = \ell$ ALLORA $S_n(\pm\pi) \to \ell$.

MA 03 MAG 2022

CI LIMITIAMO A DIMOSTRARE LA TESI NEL PUNTO $x_0 = 0$. SE $x_0 \neq 0$ LA TECNICA È LA STESSA: VEDERE IL TESTO.

TESI: $\frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, CIOÈ

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \right) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2}, \text{ OVVERO}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

PER PROCEDERE, OSSERVIAMO CHE $S_n(0) =$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} dx. \text{ D'ALTRO CANTO}$$

$$\frac{1}{2} f(0^+) = \frac{1}{\pi} f(0^+) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(0^+) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} dx \text{ E}$$

$$\frac{1}{2} f(0^-) = \frac{1}{\pi} f(0^-) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(0^-) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} dx$$

QUINDI $\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} dx$

DOVE $\varphi(x) = \begin{cases} f(0^+), & x > 0 \\ f(0^-), & x < 0 \end{cases}$. PER PROSEGUIRE ANCOR PIÙ SEMPLICEMENTE, CI LIMITIAMO AL CASO $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$ E SCRIVIAMO

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(0) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} dx, \text{ QUINDI}$$

$$S_n(0) - f(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - f(0)\big) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} dx$$

MA 03 MAG 2022

LA TESI $S_m(0)-f(0)\longrightarrow 0$ SEGUE DAL TEOREMA DI RIEMANN. INFATTI $\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x = \operatorname{sen}\left(nx+\frac{x}{2}\right)$ $= \cos\frac{x}{2}\operatorname{sen} nx + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos nx$ E QUINDI

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-f(0)\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)-f(0)}{x}\,\frac{\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen} nx\,dx +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)-f(0)}{x}\,\frac{x}{2}\cos nx\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

NOTA: SI INTENDE CHE LA FUNZIONE INTEGRANDA È

$$\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\,\dfrac{x}{2}\cos nx, & x\neq 0\\[2mm] 0, & x=0\end{cases}$$

LA QUALE È CONTINUA (A TRATTI) SE f LO È.

ESERCIZIO: SE $x_0=2\pi$, LA SERIE DI FOURIER $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos kx + b_k\operatorname{sen}kx\right)$ CONVERGE?

ESERCIZIO: TROVIAMO LA SERIE DI FOURIER DI $f(x)=x$ PER $x\in[-\pi,\pi]$. RISULTA $a_k=0$ PER OGNI k PERCHÉ $x\cos kx$ È DISPARI. INOLTRE

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen}kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\operatorname{sen}kx\,dx =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos kx}{k}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx =$$

$$=\frac{-2\pi}{k\pi}\cos k\pi = -\frac{2}{k}(-1)^k,$$ QUINDI

PER OGNI $x\in(-\pi,\pi)$ SI HA $-x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{k}(-1)^k\operatorname{sen}kx$

OVVERO $\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\operatorname{sen}kx = \operatorname{sen}x-\frac{\operatorname{sen}2x}{2}+\frac{\operatorname{sen}3x}{3}-\frac{\operatorname{sen}4x}{4}+\dots$

NOTARE CHE CON $x=\pm\pi$ SI TROVA

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\operatorname{sen}kx = 0 = \frac{\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2}$$

INVECE, CON $x=\frac{\pi}{2}$ SI TROVA $\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\operatorname{sen}k\frac{\pi}{2}$

$$=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(2j+1)\frac{\pi}{2}}{2j+1}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots$$

SERIE DI LEIBNIZ.

ME 04 MAG 2022

ESERCIZIO: 1) TROVARE LA SERIE DI FOURIER DI $f(x)=x^2$ PER $x\in[-\pi,\pi]$. 2) VERIFICARE CHE $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$. 1) SI TROVA $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$ $=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{3}\pi^2$, $a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kx\,dx =$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\operatorname{sen}kx}{k}\right]_0^{\pi}-\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi}x\operatorname{sen}kx\,dx =$$

$$=-\frac{2}{k}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\operatorname{sen}kx\,dx = -\frac{2}{k}\left(-\frac{2}{k}(-1)^k\right)$$

$=\frac{4}{k^2}(-1)^k$ E $b_k=0$ PER $k\geq 1$. QUINDI

$$\frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}+$$

$-\cos x+\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 3x}{9}+\dots$ UNIFORMEMENTE IN $[-\pi,\pi]$, E, IN PARTICOLARE, $0=$ $=\frac{\pi^2}{12}-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\dots$ OVVERO $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

2) PONENDO, INVECE, $x=\pi$ SI OTTIENE $\frac{\pi^2}{4}=$

$$=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\cos k\pi}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

DA CUI LA TESI.

MA 03 MAG 2022

PER DIMOSTRARE LA CONVERGENZA UNIFORME DELLA SERIE DI FOURIER AD UNA $f \in C^1([-\pi,\pi])$ TALE CHE $f(-\pi)=f(\pi)$ SI OSSERVA INNANZITUTTO CHE $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right)$ PER OGNI $x \in [-\pi,\pi]$ IN VIRTÙ DEL TEOREMA DI CONVERGENZA PUNTUALE, E SI DIMOSTRA CHE LA SERIE CONVERGE TOTALMENTE. INFATTI $\left|a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right| \le |a_k| + |b_k|$ QUINDI $s_k = \max_{[-\pi,\pi]} \left|a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right| \le M_k = |a_k| + |b_k|$. PER VEDERE CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k < +\infty$ APPLICHIAMO LA DISUGUAGLIANZA DI BESSEL A $f' \in C^0([-\pi,\pi])$, QUINDI $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right) < +\infty$ DOVE

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi} f(x)\cos kx\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = k\,b_k \quad \text{E}$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\operatorname{sen} kx\,dx = \frac{1}{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\Big]_{-\pi}^{\pi} + \left(-\frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\right) = -k\,a_k.$$

SI HA, DUNQUE, $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\left(a_k^2 + b_k^2\right) < +\infty$.

NOTARE CHE $0 \le (x \mp y)^2 = x^2 \mp 2xy + y^2$ QUINDI $2|xy| \le x^2 + y^2$ (DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY).

ALLORA PONIAMO $x = \frac{1}{2k}$ E $y = \alpha_k$ E TROVIAMO $2\,\frac{1}{2k}|\alpha_k| = \frac{1}{k}k|b_k| \le \frac{1}{4k^2} + \alpha_k^2$ E SIMILMENTE $|a_k| \le \frac{1}{4k^2} + \beta_k^2$, QUINDI

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(|a_k| + |b_k|\right) \le \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k^2} + \alpha_k^2 + \beta_k^2\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right) < +\infty.$$

NOTA: SE $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 < +\infty$ NON È DETTO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty$! BASTA PRENDERE $a_k = \frac{1}{k}$.

LEMMA: SE $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 a_k^2 < +\infty$ ALLORA $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty$.

OSSERVAZIONE: SE f È CONTINUA A TRATTI, LA FUNZIONE $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ È CONTINUA E TALE CHE PER OGNI $x_0 \in (-\pi,\pi)$ SI HA

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

QUINDI LA SERIE $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right)$ CONVERGE PUNTUALMENTE AD $F(x)$ IN TUTTO $(-\pi,\pi)$ ESSENDO $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\,dx$ E $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\operatorname{sen} kx\,dx$, E QUINDI

MA 03 MAG 2022

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = \int_0^{x_2} f(t)\,dt - \int_0^{x_1} f(t)\,dt$$
$$= F(x_2)-F(x_1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\left(\cos kx_2-\cos kx_1\right)+b_k\left(\operatorname{sen} kx_2-\operatorname{sen} kx_1\right)\right)$$

ME 04 MAG 2022

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx =$
$$= \frac{\alpha_0}{2}(x_2-x_1)+\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{x_1}^{x_2}\left(\alpha_k\cos kt+\beta_k \operatorname{sen} kt\right)dt$$
ESSENDO α_k, β_k I COEFFICIENTI DI FOURIER DI f,
CIOÈ $\displaystyle\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\cos kx\,dx$

ESSENDO $t_0=-\pi<t_1<\dots<t_n=\pi$ I PUNTI DOVE f HA EVENTUALI DISCONTINUITÀ. QUINDI $\alpha_k =$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\left(\Big[F(x)\cos kx\Big]_{t_{i-1}}^{t_i} + k\int_{t_{i-1}}^{t_i}F(x)\operatorname{sen} kx\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\Big(F(\pi)-F(-\pi)\Big)\cos k\pi + k b_k =$$
$$= \frac{(-1)^k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + kb_k = (-1)^k\alpha_0 + kb_k$$
E SIMILMENTE $\displaystyle\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx =$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\Big[F(x)\operatorname{sen} kx\Big]_{t_{i-1}}^{t_i} +$$
$$-\frac{k}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} F(x)\cos kx\,dx = -k a_k$$

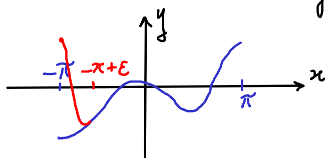
ME 04 MAG 2022

USANDO TALI RELAZIONI, TROVIAMO $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx =$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\left(\cos kx_2-\cos kx_1\right)+b_k\left(\operatorname{sen} kx_2-\operatorname{sen} kx_1\right)\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(kb_k\int_{x_1}^{x_2}\cos kx\,dx - ka_k\int_{x_1}^{x_2}\operatorname{sen} kx\,dx\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\alpha_k\int_{x_1}^{x_2}\cos kx\,dx + \beta_k\int_{x_1}^{x_2}\operatorname{sen} kx\,dx\right) +$$
$$-\alpha_0\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\int_{x_1}^{x_2}\cos kx\,dx$$
MA $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\int_{x_1}^{x_2}\cos kx\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{\operatorname{sen} kx_2}{k}-\frac{\operatorname{sen} kx_1}{k}\right)$

$= -\frac{x_2}{2}+\frac{x_1}{2} = -\frac{x_2-x_1}{2}$ E PERCIÒ $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx =$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\alpha_k\int_{x_1}^{x_2}\cos kx\,dx + \beta_k\int_{x_1}^{x_2}\operatorname{sen} kx\,dx\right) +$$
$+\frac{\alpha_0}{2}(x_2-x_1)$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

OSSERVAZIONE: SE $f\in C^1([-\pi,\pi])$ E $f(-\pi)=f(\pi)$ SI HA $S_n(x)\longrightarrow f(x)$ UNIFORMEMENTE, E QUINDI $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2dx = 0$ E DI CONSEGUENZA VALE L'UGUAGLIANZA DI PARSEVAL:
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$$
PRESENTATA NELLA LEZIONE DEL 29/04.

SFIDA: MA LA CONDIZIONE $f(-\pi)=f(\pi)$ È NECESSARIA? O BASTA $f\in C^1([-\pi,\pi])$?



ME 04 MAG 2022

$\boxed{\text{I PROBLEMI AI LIMITI}}$ DETTI ANCHE

« PROBLEMI AL CONTORNO »

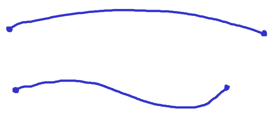
$$\begin{cases} y''(x) = -y(x) \quad \text{IN } (a,b) \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

IN PARTICOLARE: $\begin{cases} y'' = -\lambda y, \quad \lambda \in (0,+\infty) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

SOLUZIONI: $y(x) = \operatorname{sen} kx$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

SE $\lambda \notin \mathbb{Z}^+$ HO SOLO $y(x) \equiv 0$

È IL CASO $n = 1$ DI $\Delta u = -\lambda u$ IN $\Omega \subset \mathbb{R}^n$



J. DIEUDONNÉ: ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

GLI SPAZI DI LAGRANGE $C^k([a,b])$

SI POSSONO DEFINIRE COME L'INSIEME DELLE $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ TALI CHE $f, f', \ldots, f^{(k)}$ (ESISTONO E) SONO CONTINUE IN $[a,b]$

SI VERIFICA FACILMENTE CHE $\|f\|_{C^k} =$

$$= \max_{[a,b]} |f(x)| + \max_{[a,b]} |f'(x)| + \ldots + \max_{[a,b]} |f^{(k)}(x)|$$

HA LE PROPRIETÀ DELLA NORMA:

VE 06 MAG 2022

1) $\|f\|_{C^k} \geq 0$ PER OGNI $f \in C^k([a,b])$, $\|f\|_{C^k} = 0$ SE E SOLO SE $f(x) = 0$ PER OGNI $x \in [a,b]$ (N.B. TALE FUNZIONE È IL VETTORE NULLO DELLO SPAZIO $C^k([a,b])$);

2) SE $t \in \mathbb{R}$ E $g(x) = t f(x)$ SI HA $g^{(i)}(x) = t f^{(i)}(x)$ PER OGNI $i = 0, \ldots, k$ QUINDI

$$\max_{[a,b]} |g^{(i)}(x)| = |t| \max_{[a,b]} |f^{(i)}(x)|$$ E SOMMANDO SU i SI OTTIENE $\|tf\|_{C^k} = |t| \cdot \|f\|_{C^k}$;

3) PRESE $f, g \in C^k([a,b])$ SI HA

$$|f^{(i)}(x) + g^{(i)}(x)| \leq |f^{(i)}(x)| + |g^{(i)}(x)| \leq$$

$$\max_{[a,b]} |f^{(i)}(x)| + \max_{[a,b]} |g^{(i)}(x)|$$ PER OGNI $i = 0, \ldots, k$ E $x \in [a,b]$. QUINDI

$$\max_{[a,b]} |f^{(i)}(x) + g^{(i)}(x)| \leq \max_{[a,b]} |f^{(i)}(x)| + \max_{[a,b]} |g^{(i)}(x)|$$

VE 06 MAG 2022

SOMMANDO SU i SI OTTIENE $\| f+g \|_{C^k} \leq \| f \|_{C^k} + \| g \|_{C^k}$.

OSSERVAZIONE: UNA SUCCESSIONE DI $f_n \in C^k([a,b])$ CONVERGE A $f \in C^k([a,b])$ NELLA NORMA DI $C^k([a,b])$ SE E SOLO SE $f_n^{(i)} \longrightarrow f^{(i)}$ UNIFORMEMENTE IN $[a,b]$ PER OGNI $i=0,\dots,k$.

PER QUESTO SI PARLA DI NORMA UNIFORME.

INFATTI $f_n \to f$ IN $C^k([a,b])$ SE $\| f_n - f \|_{C^k} \longrightarrow 0$ IN $\mathbb{R}$. SICCOME $\| f_n - f \|_{C^k} = s_n^{(0)} + \dots + s_n^{(k)}$ DOVE $s_n^{(i)} = \max\limits_{[a,b]} \left| f_n^{(i)}(x) - f^{(i)}(x) \right|$ PER $i=0,\dots,k$. ESSENDO $s_n^{(i)} \geq 0$, SI HA CHE $s_n^{(0)} + \dots + s_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ SE E SOLO SE $s_n^{(i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ PER CIASCUN i.

OSSERVAZIONI: 1) $\sup\limits_{(a,b)} |f(x)|$ È ILLIMITATO AL VARIARE DI $f \in C^0((a,b))$ E PUÒ ESSERE ANCHE $\sup\limits_{(a,b)} |f(x)| = +\infty$ PER CERTE f, QUINDI NON DEFINISCE UNA FUNZIONE DI f (A VALORI REALI); 2) SI PUÒ PRENDERE $B^k((a,b)) = \{ f \in C^k((a,b)) : f^{(i)}$ È LIMITATA PER $i=0,\dots,k \}$ E DEFINIRE $\| f \| = \sum\limits_{i=0}^{k} \sup\limits_{(a,b)} |f^{(i)}(x)|$

TEOREMA: GLI SPAZI $C^k([a,b])$ SONO COMPLETI.

OSSERVAZIONE: SE PRENDO UNA SUCCESSIONE FONDAMENTALE DI $f_n \in C^k([a,b])$ HO CHE $\| f_n - f_j \|_{C^k} = \sum\limits_{i=0}^{k} s_{nj}^{(i)} \xrightarrow[n,j\to+\infty]{} 0$ ESSENDO $s_{nj}^{(i)} = \max\limits_{[a,b]} \left| f_n^{(i)}(x) - f_j^{(i)}(x) \right|$, QUINDI, PER IL CRITERIO DI CAUCHY UNIFORME, $f_n^{(i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} g_i \in C^0$ UNIFORMEMENTE PER CIASCUN $i=0,\dots,k$.

DIMOSTRAZIONE DELLA COMPLETEZZA: SI APPLICA IL TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA (11 APRILE) PER ASSICURARSI CHE $g_i(x) = \frac{d^i}{dx^i} g_0(x)$, QUINDI $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C^k} g_0$.

OSSERVAZIONE: GLI SPAZI $C^k([a,b])$ SONO IL DOMINIO DI TALUNI FUNZIONALI INTEGRALI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI, COME AD ESEMPIO IL FUNZIONALE $\mathcal{J}: C^1([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ DATO DA $\mathcal{J}(f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$ CHE ESPRIME LA LUNGHEZZA DEL GRAFICO DI f, OPPURE $\mathcal{J}(f) = \int_a^b (f'(x))^2\, dx$ DETTO FUNZIONALE DELL'ENERGIA O FUNZIONALE DI DIRICHLET.

VE 06 MAG 2022

PER CARATTERIZZARE UNA EVENTUALE f_0 TALE CHE $\mathcal{J}(f_0) \leq \mathcal{J}(f)$ PER OGNI f SI SUOLE CONSIDERARE LE DERIVATE DIREZIONALI DI $\mathcal{J}$:

SI FISSA UNA RETTA $\tau = \{ t\eta(x) : t \in \mathbb{R} \}$

E SI DEFINISCE $\varphi(t) = \mathcal{J}(f_0 + t_\eta)$

PER $t \in \mathbb{R}$ E SI ESPRIME LA CONDIZIONE NECESSARIA $\varphi'(0) = 0$: DOBBIAMO PERCIÒ CALCOLARE $\frac{d}{dt} \int_a^b \left(f_0'(x) + t\,\eta'(x) \right)^2 dx =$

$= \frac{d}{dt} \left(\int_a^b (f_0'(x))^2 dx + 2t \int_a^b f_0'(x)\,\eta'(x)\,dx + t^2 \int_a^b (\eta'(x))^2 dx \right)$ CHE PER $t = 0$ SI RIDUCE A

$2\int_a^b f_0'(x)\,\eta'(x)\,dx$ QUINDI LA CONDIZIONE $\varphi'(0) = 0$ EQUIVALE A $\int_a^b f_0'(x)\,\eta'(x)\,dx = 0$.

OSSERVAZIONE: LA NORMA DI $C^k([a,b])$ INDUCE UNA METRICA COME NELLA LEZIONE DEL 22/04:

$$d(f,g) = \| f - g \|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \max \ldots = \sum_{i=0}^{k} \max_{[a,b]} \left| f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x) \right|.$$

LE NORME-p IN $\mathbb{R}^N$

HERMANN MINKOWSKI, NEL LIBRO « APPROSSIMAZIONI DIOFANTEE » DEL 1907 STUDIA L'INSIEME $\mathbb{Z}^2$ DEI PUNTI DEL PIANO AVENTI COORDINATE INTERE E NE STUDIA LE DISTANZE UTILIZZANDO LA NORMA-p: OGGI CONSIDERIAMO $x \in \mathbb{R}^n$ E DEFINIAMO $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ PER $p \in [1, +\infty)$. SI PONE ANCHE $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE: 1) SODDISFANO GLI ASSIOMI DELLA NORMA; 2) $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$; 3) SONO EQUIVALENTI FRA LORO; 4) TUTTE LE NORME SU $\mathbb{R}^n$ SONO EQUIVALENTI FRA LORO; 5) SU $C^0([a,b])$ ESISTONO NORME NON EQUIVALENTI (QUALI?)

OSSERVAZIONE: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

DEFINIZIONE: DUE NORME $\|x\|$ E $|x|$ SULLO SPAZIO VETTORIALE X SI DICONO EQUIVALENTI SE ESISTONO DUE COSTANTI POSITIVE m, M TALI CHE

$$m|x| \leq \|x\| \leq M|x| \quad \text{PER OGNI } x \in X$$

OSSERVAZIONE: SE DUE NORME SONO EQUIVALENTI, ALLORA

$$m|x_n - x| \leq \|x_n - x\| \leq M|x_n - x|$$

QUINDI $x_n \to x$ NELLA TOPOLOGIA INDOTTA DA $\|x\|$ SE E SOLO SE $x_n \to x$ NELLA TOPOLOGIA INDOTTA DA $|x|$.

SIMILMENTE, $m|x_n - x_k| \le \|x_n - x_k\| \le$ $\le M|x_n - x_k|$ QUINDI LE SUCCESSIONI FONDAMENTALI SONO LE STESSE. INFINE, SE X È UNO SPAZIO METRICO COMPLETO RISPETTO ALLA METRICA INDOTTA DA UNA NORMA $\|x\|$, ALLORA LO È RISPETTO A QUELLA INDOTTA DA UNA EQUIVALENTE.

SFIDA: SAPENDO CHE $C^0([a,b])$ È COMPLETO RISPETTO ALLA NORMA LAGRANGIANA, TROVARE UNA NORMA RISPETTO ALLA QUALE NON SIA COMPLETO.

ESERCIZI: 1) VERIFICARE CHE LA FUNZIONE $\|x\|_p$ SODDISFA I PRIMI DUE (O TRE) ASSIOMI DELLA NORMA: $\|x\|_p \ge 0$; $\|x\|_p = 0$ SE E SOLO SE $x = \bar{0}$; $\|tx\|_p = |t| \cdot \|x\|_p$; 2) VERIFICARE CHE $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$; 3) DISEGNARE LA PALLA-$p$ CENTRATA NELL'ORIGINE E DI RAGGIO 1 NEL PIANO, PER $p = 1, 2, \infty$.

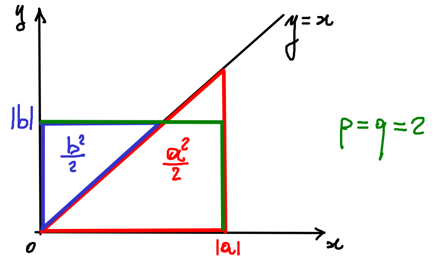
PER VERIFICARE LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE, SI USA L'ARTIFICIO INDICATO DA F. RIESZ IN « LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES... » (1913)

1) VERIFICHIAMO LA DISUGUAGLIANZA DI YOUNG:

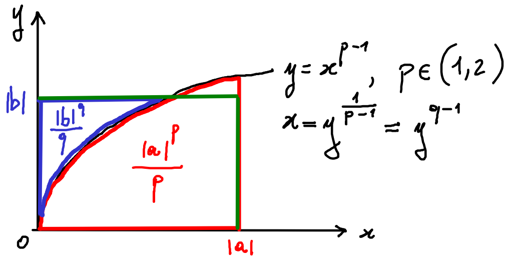
$$|ab| \le \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q$$

QUALUNQUE SIANO $a, b \in \mathbb{R}$ E $p, q \in (1, +\infty)$ TALI CHE $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. NOTA: $p = q = 2$ VA BENE, E LA DISUGUAGLIANZA DIVENTA $2|ab| \le a^2 + b^2$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA (B. SIMON)



PER $p \in (1,2)$ CONVIENE OSSERVARE CHE DA $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ SI RICAVA $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ QUINDI $q - 1 = \frac{1}{p-1}$



QUINDI $|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} = \int_0^{|a|} x^{p-1}\,dx + \int_0^{|b|} y^{q-1}\,dy$

DIMOSTRAZIONE ANALITICA: PASSO AI LOGARITMI, OSSERVANDO CHE $\frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} = \lambda |a|^p + (1-\lambda)|b|^q$ ESSENDO $\lambda = \frac{1}{p}$. SI PARLA DI COMBINAZIONE LINEARE CONVESSA DI $|a|^p$ E $|b|^q$. SICCOME LA FUNZIONE $\log t$ È CONCAVA, SI TROVA $\log(\lambda|a|^p + (1-\lambda)|b|^q)$ $\ge \lambda \log|a|^p + (1-\lambda)\log|b|^q = \log|a| + \log|b| =$ $= \log|ab|$. SICCOME $\log t$ È CRESCENTE, SEGUE LA TESI.

2) VERIFICHIAMO LA DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER DISCRETA: SE $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ SI HA

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q .$$

SI PONE $u=\frac{x}{\|x\|_p}$, $v=\frac{y}{\|y\|_q}$ DA CUI $x_i=\|x\|_p u_i$ E $y_i=\|y\|_q v_i$ E LA DISUGUAGLIANZA DIVENTA

$$\sum_{i=1}^{n}|u_i v_i| \leq 1$$ (DISCUTERE I CASI $x=\bar{0}$, $y=\bar{0}$)

DOVE $\|u\|_p=\left\|\frac{x}{\|x\|_p}\right\|_p=\frac{1}{\|x\|_p}\|x\|_p=1=\|v\|_q$.

PER VERIFICARLA SI USA LA DISUGUAGLIANZA DI YOUNG:

$$|u_i v_i| \leq \frac{|u_i|^p}{p}+\frac{|v_i|^q}{q} \quad \text{PER OGNI } i.$$

SOMMANDO SU i SI TROVA $\sum_{i=1}^{n}|u_i v_i| \leq$

$$\leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}|v_i|^q=\frac{1}{p}\|u\|_p^p+\frac{1}{q}\|v\|_q^q$$

$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE f, g SONO FUNZIONI MISURABILI, SI HA $\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}$

DOVE $\|f\|_{L^p}=\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$. PER $p=2$

SI HA $\|f\|_{L^2}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$. RESTA ESCLUSO IL CASO IN CUI $\|f\|_{L^p}=+\infty$ E $\|g\|_{L^q}=0$ O VICEVERSA (PERCHÉ IL SECONDO MEMBRO DELLA DISUGUAGLIANZA NON HA SIGNIFICATO).

3) VERIFICHIAMO CHE $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p$.

OSSERVIAMO CHE $\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p=$

$$=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i|+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|y_i|.$$

PER LA DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER, POSTO $z_i=|x_i+y_i|^{p-1}$ POSSIAMO SCRIVERE

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i| \leq \|z\|_q \cdot \|x\|_p \quad \text{MA} \quad \|z\|_q^q=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} z_i^q=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p$$

QUINDI $\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|x\|_p=\|x+y\|_p^{p-1}\cdot\|x\|_p$ E SIMILMENTE

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|y_i| \leq \|x+y\|_p^{p-1}\cdot\|y\|_p,$$

QUINDI $\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p=\|x+y\|_p^p \leq \|x+y\|_p^{p-1}\cdot(\|x\|_p+\|y\|_p)$ E SEMPLIFICANDO $\|x+y\|_p^{p-1}$ SI TROVA $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p$ (DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI). VEDERE $p=\infty$.

VERIFICHIAMO INSIEME CHE $\lim_{p\to+\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$.

BASTA SCRIVERE $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=$

$=\|x\|_\infty\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ E OSSERVARE CHE

$1 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty}\right)^p \leq n$. LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO $\left(n^{\frac{1}{p}}\xrightarrow[p\to+\infty]{}1\right)$.

LU 09 MAG 2022

PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ DELLA NORMA IN UNO SPAZIO VETTORIALE NORMATO X

NOTA: UNA STESSA FUNZIONE PUÒ ESSERE CONTINUA IN UNA TOPOLOGIA E DISCONTINUA IN UN'ALTRA!

1) LA NORMA È LIPSCHITZIANA RISPETTO ALLA METRICA DA ESSA INDOTTA: UNA $F: X \to Y$, SPAZI METRICI, SI DICE LIPSCHITZIANA SE ESISTE UNA COSTANTE L TALE CHE PER OGNI $x_1, x_2 \in X$ SI HA $d_Y(F(x_1), F(x_2)) \le$ $\le L\, d_X(x_1, x_2)$. IN PARTICOLARE, PONENDO $F(x) = \|x\|$ E $Y = \mathbb{R}$ VERIFICHIAMO CHE $\big|\,\|x_1\| - \|x_2\|\,\big| \le \|x_1 - x_2\|$. POSTO $z = x_1 - x_2$ SI HA $\|x_1\| = \|x_2 + z\| \le \|x_2\| +$ $+ \|x_1 - x_2\|$, QUINDI $\|x_1\| - \|x_2\| \le \|x_1 - x_2\|$, E, SCAMBIANDO x_1 CON x_2, $\|x_2\| - \|x_1\| \le \|x_1 - x_2\|$ QUINDI $\big|\,\|x_1\| - \|x_2\|\,\big| \le \|x_1 - x_2\|$.

2) QUALUNQUE NORMA SU $\mathbb{R}^n$ È CONTINUA RISPETTO ALLA TOPOLOGIA CANONICA: POSTO $x =$ $= \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{e}_i$, CON $\hat{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots,$ $\hat{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE IMPLICA CHE $\|x\|$, QUALUNQUE ESSA SIA, SODDISFA $\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} \|x_i \hat{e}_i\| =$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|\hat{e}_i\| \le C \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2},$$

DOVE $C = \max_{i=1,\dots,n} \|\hat{e}_i\|$. MA $\sqrt{x_i^2} \le$ $\le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = |x|$ NORMA EUCLIDEA, QUINDI $\|x\| \le C n |x|$ E LA TESI SEGUE: SE $x_n \xrightarrow[|\cdot|]{} x_0$ ALLORA $|x_n - x_0| \to 0$ E $\|x_n - x_0\| \to 0$ QUINDI $\big|\,\|x_n\| - \|x_0\|\,\big| \longrightarrow 0$.

MA 10 MAG 2022

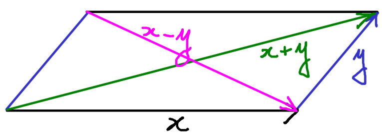
NORME E PRODOTTI SCALARI

QUANDO UNA NORMA $\|x\|$ IN UNO SPAZIO VETTORIALE X VIENE DA UN PRODOTTO SCALARE, CIOÈ $\|x\|^2 = x \cdot x = \langle x, x \rangle$, PER OGNI $x, y \in X$ SI HA $\|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y, x \pm y \rangle =$ $= \|x\|^2 \pm 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ E QUINDI

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

OVVERO $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$

IDENTITÀ DEL PARALLELOGRAMMA



CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE: LA $f(x,y) = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2$, CHE È SIMMETRICA E $f(x,x) = \|x\|^2$ DEFINITA POSITIVA, RISULTA BILINEARE (TEOREMA DI FRÉCHET - VON NEUMANN - JORDAN NEL TESTO DI K. YOSIDA, FUNCTIONAL ANALYSIS)

MA 10 MAG 2022

IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI
TEOREMA DI BANACH
O DI BANACH–CACCIOPPOLI

IL TEOREMA DI ESISTENZA IN PICCOLO DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

GIÀ DIMOSTRATO IL 29 E 30/03, SI PUÒ OTTENERE SOTTO IPOTESI PIÙ RESTRITTIVE APPLICANDO IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI: IL PRIMO PASSO CONSISTE NELLO SCRIVERE L'EQUAZIONE INTEGRALE

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

CHE SAPPIAMO (11 MARZO) ESSERE EQUIVALENTE AL PROBLEMA DATO. ESSA ISPIRA LA DEFINIZIONE DELL'OPERATORE F IL QUALE ASSOCIA ALLA FUNZIONE $y(x)$ LA FUNZIONE $z(x)$ DATA DA $z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$

UNA FUNZIONE $y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE INTEGRALE SE E SOLO SE $z = y$, CIOÈ SE $y = F(y)$. SI DICE CHE LA FUNZIONE $y(x)$ IN TAL CASO È UN PUNTO FISSO DELL'OPERATORE F.

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI: UNA CONTRAZIONE $F: X \to X$ IN UNO SPAZIO METRICO COMPLETO X HA UNO E UN SOLO PUNTO FISSO, CIOÈ UN $y \in X$ TALE CHE $y = F(y)$. INOLTRE QUALUNQUE SIA $x_0 \in X$, PONENDO $x_{k+1} = F(x_k)$ PER $k \in \mathbb{N}$ SI DEFINISCE PER RICORRENZA UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE AL PUNTO FISSO y.

DEFINIZIONE: UN'APPLICAZIONE $F: X \to X$, CON X SPAZIO METRICO, SI DICE CONTRAZIONE SE ESISTE $\alpha < 1$ TALE CHE PER OGNI $x_1, x_2 \in X$ RISULTI $d(F(x_1), F(x_2)) \le \alpha\, d(x_1, x_2)$.

OSSERVAZIONE: UNA CONTRAZIONE HA, AL MASSIMO, UN PUNTO FISSO. INFATTI, SE $x_1 = F(x_1)$ E $x_2 = F(x_2)$, SI TROVA $d(F(x_1), F(x_2)) = d(x_1, x_2) \le \alpha\, d(x_1, x_2)$ QUINDI $\underbrace{(1-\alpha)}_{\text{POSITIVO}}\, d(x_1, x_2) \le 0$, DA CUI SEGUE

$$0 \le d(x_1, x_2) \le 0$$

QUINDI $d(x_1, x_2) = 0$ E $x_1 = x_2$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI:

1) LA SUCCESSIONE DELLE x_k CONVERGE PERCHÉ È FONDAMENTALE. INFATTI $d(x_{k+1}, x_k) = d(F(x_k), F(x_{k-1})) \le \alpha\, d(x_k, x_{k-1})$ QUINDI $d(x_{k+1}, x_k) \le \alpha^k d(x_1, x_0)$.

BASE DELL'INDUZIONE: $k = 1$, O ANCHE $k = 0$

PASSO INDUTTIVO: $d(x_{k+1}, x_k) \le \alpha\, d(x_k, x_{k-1}) \le$
$\le \alpha\, \alpha^{k-1} d(x_1, x_0) = \alpha^k d(x_1, x_0)$ PER $k \ge 1$

PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE, PRESO $n > k$ TROVIAMO $d(x_n, x_k) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{k+1}, x_k) = \sum_{i=k}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq$

$$\leq d(x_1, x_0) \sum_{i=k}^{n-1} \alpha^i \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

PER IL CRITERIO DI CAUCHY PER LE SERIE NUMERICHE (07/04).

2) IL LIMITE y DELLA SUCCESSIONE x_k È UN PUNTO FISSO: SO CHE $x_{k+1} = F(x_k)$ E CHE F È CONTINUA PERCHÉ È UNA CONTRAZIONE, QUINDI QUANDO $k \to +\infty$ SI HA $x_{k+1} \to y$ E $F(x_k) \to F(y)$ QUINDI SI TROVA $y = F(y)$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

VERIFICHIAMO CHE L'OPERATORE F IL QUALE ASSOCIA ALLA FUNZIONE $y(x)$ LA FUNZIONE $z(x)$ DATA DA $z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$

È UNA CONTRAZIONE SULLO SPAZIO $X = C^0([x_0-\delta, x_0+\delta])$ A CONDIZIONE DI PRENDERE $\delta \leq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ SODDISFACENTE $\delta < \frac{1}{L}$. QUI $f : [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \longrightarrow \mathbb{R}$, È CONTINUA, $M = \max |f|$, E $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$.

SI RAMMENTI CHE SE $M = 0$ O SE $L = 0$ IL PROBLEMA È BANALE.

MA 10 MAG 2022

PER LA VERIFICA, PRENDO DUE FUNZIONI $y_1, y_2 \in C^0([x_0-\delta, x_0+\delta])$ E PONGO $z_i = F(y_i)$, $i = 1, 2$, CIOÈ $z_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_i(t))\, dt$, $i = 1, 2$.

TROVIAMO CHE $|z_1(x) - z_2(x)| \leq$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \left| f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \right| dt \right|$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|\, dt \right| \leq$$

$$\leq L \|y_1 - y_2\|_{C^0} \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| \leq \delta L \|y_1 - y_2\|_{C^0}$$

QUINDI $\max_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} |z_1(x) - z_2(x)| = \|z_1 - z_2\|_{C^0} \leq \delta L \|y_1 - y_2\|_{C^0}$ E SICCOME $\alpha = \delta L < 1$ LA TESI SEGUE.

ME 11 MAG 2022

ALTRA TIPICA APPLICAZIONE: RISOLUZIONE DI $f(x) = 0$ CON $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. SI RISCRIVE $f(x) + x = x$ E CIOÈ $g(x) = x$ E SI VEDE SE g È UNA CONTRAZIONE. ESEMPIO: $x = \cos x$

$g(x) = \cos x$ NON È UNA CONTRAZIONE SU $\mathbb{R}$ MA $g(x) - x$ È CONTINUA, POSITIVA IN $x = 0$, NEGATIVA IN $x = \frac{\pi}{3}$, QUINDI STUDIO $X = [0, \frac{\pi}{3}]$ E $g([0, \frac{\pi}{3}]) = [\frac{1}{2}, 1] \subset [0, \frac{\pi}{3}]$ E g È UNA CONTRAZIONE IN X $\left(|g'(x)| \leq \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1\right)$