Capitolo 5

Sistemi di equazioni lineari e matrici

Per definire rigorosamente cosa intendiamo per equazioni lineari e scrivere una generica equazione lineare dobbiamo prima stabilire una notazione conveniente per denotare tali equazioni.
Infatti, per non avere limitazioni sul numero delle incognite, non possiamo continuare a indicarle con le lettere dell'alfabeto x, y, z etc., che sono in numero limitato. Per cui useremo sempre la stessa lettera, tradizionalmente la x, con degli indici numerici che ci dicono di quale incognita si tratta: x_1 indicherà la prima incognita, x_2 la seconda, e così via. In generale x_n indicherà la n-esima incognita, dove n è un numero naturale.
Inoltre per ogni incognita x_i, denotiamo il suo coefficiente con una lettera, a, con lo stesso indice dell'incognita.

Definizione 5.1. Si definisce **equazione lineare in** n **incognite** $x_1, x_2, \dots, x_n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{5.1}$$

dove $b, a_1, a_2, \dots, a_n$ sono elementi del campo $\mathbb{K}$ che vengono detti rispettivamente **termine noto** e **coefficienti delle incognite**.

Per noi i coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n$ ed il termine noto b saranno spesso elementi del campo $\mathbb{R}$ ovvero saranno numeri reali.
Dare una soluzione dell'equazione (5.1) significa trovare degli elementi del campo, ovvero dei numeri, che sostituiti alle incognite rendano l'uguaglianza vera.
Ad esempio, nell'equazione lineare in due incognite $x_1 - x_2 = 1$ a coefficienti nel campo dei reali $\mathbb{R}$, ponendo $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$ si ottiene l'uguaglianza vera $2 - 1 = 1$, mentre ad esempio ponendo $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ si ottiene $1 - 2 = 1$ che è falsa.
Da questo semplice esempio si vede come dare una soluzione dell'equazione $x_1 - x_2 = 1$ significa non solo dare *due* valori numerici, da sostituire alle due incognite dell'equazione, ma anche precisare quale valore vada sostituito alla prima incognita e quale alla seconda, ovvero specificare in quale ordine stiamo prendendo questi due elementi.

Risulta quindi chiaro che la soluzione data è la *coppia ordinata* di numeri $(2, 1)$. Al contrario la coppia $(1, 2)$ non è una soluzione dell'equazione $x_1 - x_2 = 1$.
Analogamente una soluzione di un'equazione lineare in 3 incognite sarà data da una terna ordinata. Ad esempio, la terna ordinata $(3, 2, 1)$ è una soluzione dell'equazione è $x_1 - x_2 + x_3 = 2$ in quanto sostituendo $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$ si ottiene l'uguaglianza vera $3 - 2 + 1 = 2$. La terna $(2, 1, 3)$ invece, non è una sua soluzione.
In generale, per equazioni con n incognite dovremo usare n-uple ordinate $(v_1, v_2, \dots, v_n)$: possiamo allora dare la seguente:

Definizione 5.2. Data un'equazione lineare $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ in n incognite a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$, si dice **soluzione** dell'equazione una n-upla ordinata $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che l'uguaglianza $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = b$ risulti vera.

In molte occasioni ci si trova a dover considerare più equazioni lineari contemporaneamente. Per queste occorrenze abbiamo bisogno di definire i *sistemi di equazioni lineari*.
Per scrivere un sistema generico dobbiamo risolvere un problema di notazione simile a quello affrontato quando abbiamo scritto la generica equazione lineare. In questo caso abbiamo bisogno di una notazione efficace per indicare i diversi coefficienti delle incognite nelle diverse equazioni del sistema.
A questo scopo, nell'espressione della generica equazione lineare $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ doteremo sia i coefficienti che il termine noto di un ulteriore pedice che serve ad indicare di quale equazione del sistema si tratta. La prima equazione del sistema sarà cioè denotata con $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$, la seconda con $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$ e così via.

Definizione 5.3. Un **sistema di m equazioni lineari in n incognite** è un insieme di m equazioni lineari nelle stesse n incognite e viene denotato con

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5.2}$$

Definizione 5.4. Una soluzione del sistema (5.2) è una n-upla $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ che è soluzione di tutte le equazioni del sistema.

Ovviamente, per conoscere un sistema abbiamo bisogno solo di sapere quali sono i coefficienti che moltiplicano ogni singola incognita e i termini noti di tutte le equazioni.

Quindi, se, dato un sistema, scriviamo una tabella di numeri disposti in righe e in colonne in modo che in ogni riga ci siano i coefficienti delle incognite di una certa equazione (ordinati secondo le incognite) e il termine noto, tale tabella conterrà tutte le informazioni che ci servono sul sistema. Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \tag{5.3}$$

può essere rappresentato dalla tabella

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

In generale, tutte le informazioni relative al sistema (5.2) sono contenute nella tabella

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

che chiameremo **matrice completa del sistema**.
Come vedremo, non solo la matrice completa costituisce una "fotografia" fedele di un sistema e contiene tutte le informazioni necessarie a determinarlo, ma sarà anche l'oggetto sul quale conviene lavorare per risolverlo.
Se ci limitiamo invece ai coefficienti delle incognite otterremo la cosiddetta **matrice dei coefficienti del sistema**. Ad esempio, la matrice dei coefficienti del sistema (5.3) è

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mentre quella del sistema (5.2) è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Come vedremo, il concetto di matrice è di fondamentale importanza e comparirà in molti contesti in questo corso. Nei capitoli successivi ne faremo una trattazione indipendente e più approfondita. Per il momento, limitiamoci a definire una matrice come una tabella rettangolare di elementi di $\mathbb{K}$, detti le sue **entrate**, disposti in righe e in colonne. Analogamente alla notazione che abbiamo introdotto per identificare i coefficienti delle incognite di un sistema, per denotare la generica entrata di una matrice useremo due indici. Il primo ci dice in quale riga della matrice si trova, il secondo in quale colonna. Una generica matrice sarà quindi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Come si vede, tale matrice ha m righe e n colonne. La sua generica entrata è del tipo a_{ij}, dove il primo indice, detto *indice di riga*, va da 1 a m, mentre il secondo, detto *indice di colonna*, va da 1 a n. Si dice anche che a_{ij} è *l'entrata di posto i j*.
Ad esempio, nella matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

che ha tre righe e due colonne, 5 è la prima entrata della prima riga, e quindi $a_{11} = 5$. In corrispondenza della terza riga e seconda colonna troviamo il numero 7, quindi $a_{32} = 7$. E così via per le altre entrate.

5.1 Equazioni superflue e equazioni incompatibili

Nel prossimo paragrafo vedremo come determinare tutte le soluzioni di un sistema lavorando sulla sua matrice completa. In particolare, scopriremo che possono verificarsi solamente tre possibilità[1]:

- il sistema non ha nessuna soluzione
- il sistema ha una sola soluzione
- il sistema ha infinite soluzioni

Prima di entrare nei dettagli, vediamo un esempio di ciascuna di queste possibilità, con l'obiettivo di capire le ragioni per cui esse possono verificarsi.

Non è difficile esibire un esempio di sistema con infinite soluzioni. Ad esempio, consideriamo il seguente sistema formato da una sola equazione in due incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

[1] Questo è un fatto caratteristico delle equazioni lineari: per una generica equazione possono verificarsi anche altri casi. Ad esempio l'equazione $x^2 = 9$ ha due soluzioni, $x = 3$ e $x = -3$.

Una soluzione del sistema è una coppia di numeri reali la cui somma è zero. Questo significa che i numeri devono essere uno l'opposto dell'altro. Scelto un qualunque $t \in \mathbb{R}$, la coppia $(t, -t)$ è una soluzione: le soluzioni sono quindi infinite, tante quanti i numeri reali.
Aggiungiamo ora una seconda equazione, ottenendo quindi un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

Le soluzioni del sistema sono quindi le coppie che soddisfano non solo la prima equazione, ma anche la seconda. Quest'ultima afferma semplicemente che $x_1 = x_2$, cioè i due elementi della coppia devono essere non solo opposti ma anche uguali tra loro. L'unico numero reale uguale al suo opposto è lo zero, e quindi il sistema ha come unica soluzione la coppia $(0, 0)$.
Questo esempio suggerisce che in generale più equazioni ci sono in un sistema, maggiori sono i vincoli che imponiamo sulle incognite e quindi esisteranno meno n-uple che soddisfino tutte le equazioni, ovvero meno soluzioni:. L'esempio del sistema (5.7) sembra suggerire che con due incognite, due condizioni siano sufficienti a ottenere una sola soluzione.
Tuttavia, è facile fornire un altro esempio che sembra contraddire questa prima impressione. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

Ora, è immediato vedere che le soluzioni $(t, -t)$ della prima equazione soddisfano anche la seconda, quindi il sistema continua ad avere le infinite soluzioni della forma $(t, -t)$. Questo accade perché la seconda equazione è in realtà del tutto equivalente alla prima. Infatti mettendo in evidenza il 2, si può riscrivere $2x_1 + 2x_2 = 0$ come $2(x_1 + x_2) = 0$, ovvero, dividendo per 2, proprio la prima equazione. Per cui la seconda equazione non aggiunge nessun nuovo vincolo sulle incognite.

Definizione 5.5. Un'equazione di un sistema si dice **superflua** se ogni soluzione comune delle altre equazioni è anche una sua soluzione.

Le equazioni superflue presenti in un sistema possono essere tuttavia molto meno evidenti che nel caso appena visto. Ad esempio, consideriamo il sistema di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \tag{5.9}$$

Una qualunque terna (x_1, x_2, x_3) che verifica le due equazioni soddisfa necessariamente anche l'uguaglianza che si ottiene sommandole membro a membro. In altre parole soddisfa l'equazione

$$(x_1 + x_2 + x_3) + (2x_1 + x_2 + 3x_3) = 1 + 2$$

cioè, svolgendo i conti,

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3\,.$$

Essendo tale equazione una conseguenza delle prime due, aggiungerla al sistema non modifica l'insieme delle soluzioni. Quindi il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \tag{5.10}$$

contiene un'equazione superflua, cioè dipendente dalle altre, certamente meno evidente che nel caso del sistema (5.8).

Si noti che, nella matrice completa del sistema (5.10)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

il fatto che la terza equazione sia stata ottenuta sommando le prime due membro a membro si traduce nel fatto che la terza riga della matrice è somma delle prime due. Più precisamente ogni entrata della terza riga è la somma delle corrispondenti entrate delle altre due righe (la prima con la prima: 1+2 = 3; la seconda con la seconda: 1+1=2 etc.). Denotando con R_1, R_2, R_3 le tre righe, possiamo esprimere questa relazione usando la notazione $R_3 = R_1 + R_2$.

Naturalmente, equazioni superflue possono essere ottenute anche con combinazioni più complicate della somma delle prime due equazioni. Ad esempio, sempre in riferimento al sistema (5.9), una terna che soddisfi le due equazioni necessariamente soddisfa anche l'uguaglianza

$$5(x_1 + x_2 + x_3) + (-3)(2x_1 + x_2 + 3x_3) = 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 2$$

cioè, svolgendo i conti,

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1.$$

Quindi anche nel sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases} \tag{5.12}$$

la terza equazione è superflua, in un modo forse ancora meno evidente.
Anche qui, nella matrice completa del sistema (5.12)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

la relazione di dipendenza tra le equazioni si traduce nella corrispondente relazione di dipendenza tra le righe, che stavolta possiamo scrivere come $R_3 = 5R_1 + (-3)R_2$. In altri termini ogni entrata della terza riga si ottiene moltiplicando la corrispondente entrata della prima riga per 5 e sommando la corrispondente entrata della seconda riga moltiplicata per -3.

Definizione 5.6. Le righe di una matrice con m righe $R_1, R_2, \dots, R_m$, si dicono **dipendenti tra loro** se una di queste si scrive come combinazione delle altre, ovvero se

$$R_i = c_1R_1 + c_2R_2 + \cdots + c_{i-1}R_{i-1} + c_{i+1}R_{i+1} + \cdots + c_mR_m$$

per qualche $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Osservazione 5.7. Se la matrice è la matrice completa di un sistema, il fatto che le sue righe siano dipendenti equivale al fatto che nel sistema ci sono equazioni superflue, nel senso della Definizione 5.5.

Per quello che riguarda i sistemi senza soluzioni, è altrettanto semplice esibirne uno. Ad esempio, il sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

è evidentemente privo di soluzioni, in quanto se la somma di due numeri è uguale a 0 non può allo stesso tempo essere uguale a 1.
In altre parole, le due equazioni del sistema sono tra loro incompatibili, ovvero esprimono condizioni contraddittorie.

Definizione 5.8. Due equazioni si dicono **incompatibili** se gli insiemi delle loro soluzioni sono disgiunti, cioè se nessuna soluzione della prima è soluzione della seconda (o viceversa).

Un sistema si dice **incompatibile** se contiene due equazioni incompatibili (ed in tal caso non ha soluzioni). Per contro, un sistema si dice **compatibile** se ammette almeno una soluzione.

Analogamente a quanto fatto sopra per le equazioni superflue, si possono costruire esempi di sistemi in cui l'incompatibilità di una equazione con le altre non è così evidente come nel sistema precedente.
Ad esempio, prendiamo sempre come punto di partenza il sistema (5.9). Come abbiamo visto sopra, una terna che soddisfi le due equazioni soddisfa anche l'uguaglianza $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3$ che si ottiene sommando le due equazioni membro a membro.
Ma allora, se modifichiamo solo il termine noto di quest'ultima uguaglianza, ne otteniamo una che è incompatibile con le altre due. Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases} \tag{5.14}$$

non ha soluzioni, perchè per una qualunque terna (x_1, x_2, x_3) che soddisfi le prime due equazioni si deve avere che $3x_1 + 2x_2 + 4x_3$ è uguale a 3, e non a 5.
Confrontando la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema (5.14)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

notiamo che l'incompatibilità delle equazioni si traduce nel fatto che la terza riga è somma delle prime due nella matrice dei coefficienti ma non nella matrice completa (l'ultima entrata non soddisfa $5 = 1 + 2$). Riassumendo, la matrice dei coefficienti presenta una relazione di dipendenza tra le sue righe che nella matrice completa non vale (in quanto l'incompatibilità è stata ottenuta sommando i primi membri delle due equazioni, che contengono i coefficienti delle incognite, ma non i termini noti).

Definizione 5.9. Un sistema in cui i termini noti sono tutti nulli si dice **omogeneo**.

Osservazione 5.10. Un sistema omogeneo ha sempre almeno la soluzione $(0, 0, \dots, 0)$, in quanto ponendo tutte le incognite uguali a zero si ottengono uguaglianze vere. Quindi i sistemi omogenei sono sempre compatibili.

5.2 La risoluzione di un sistema lineare

Il metodo di risoluzione di un qualunque sistema con m equazioni lineari in n incognite che trattiamo in questa sezione può essere considerato come una generalizzazione dei metodi tradizionalmente usati per la risoluzione dei sistemi di due equazioni in due incognite. Per ricordare quali sono questi metodi, prendiamo ad esempio il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \tag{5.15}$$

Solitamente, per risolvere tale sistema si ricava una delle incognite in funzione dell'altra usando una delle due equazioni. Per esempio dalla prima equazione si trova $x_1 = -x_2$, e si sostituisce l'espressione così ottenuta nell'altra equazione:

$$-(-x_2) + x_2 = 1$$

ovvero

$$2x_2 = 1.$$

In questo modo, abbiamo *eliminato* la prima incognita dalla seconda equazione che è diventata una semplice equazione di primo grado con una sola incognita, che ha come soluzione $x_2 = \frac{1}{2}$. A questo punto, per ricavare x_1 basta sostituire il valore di x_2 nella prima equazione:

$$x_1 + \frac{1}{2} = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -\frac{1}{2}.$$

Quello che ci ha permesso di risolvere il sistema è stato quindi aver ridotto il numero di incognite presenti in una delle equazioni.
Allo stesso risultato si può arrivare, ad esempio, sommando membro a membro le due equazioni. Se $x_1 + x_2 = 0$ e $-x_1 + x_2 = 1$ allora

$$(x_1 + x_2) + (-x_1 + x_2) = 0 + 1$$

e quindi, svolgendo i conti, si ottiene come sopra $2x_2 = 1$.
Questo secondo metodo, apparentemente più artificioso, si rivela in realtà più semplice se si lavora sulla matrice completa del sistema invece che sulle equazioni. Infatti, la matrice completa del sistema (5.15) è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché le due righe della matrice ci danno coefficienti e termini noti delle equazioni, sommare membro a membro le due equazioni equivale a sommare tra loro le due righe. Sostituendo poi tale somma alla seconda riga originale si ottiene, senza dover maneggiare le incognite e dover fare sostituzioni o semplificazioni, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa corrisponde proprio al sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

le cui soluzioni si ottengono, come abbiamo visto sopra, risolvendo prima l'equazione con una sola incognita.

Questo stesso procedimento di eliminazione di incognite, realizzato lavorando sulle righe della matrice completa, ci permette di risolvere qualunque sistema lineare, indipendentemente dal numero di equazioni e di incognite.
Più precisamente, ci porremo l'obiettivo di trasformare le equazioni in modo che a partire dalla prima in esse compaiano sempre meno incognite. Se, per darci un criterio, scegliamo di eliminarle seguendo l'ordine $x_1, x_2, \ldots, x_n$, questo significa che vogliamo che le righe della matrice completa inizino con un numero sempre maggiore di zeri. Ad esempio, la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

nella quale le righe iniziano con un numero sempre maggiore di zeri, ha come sistema corrispondente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_3 = 5 \end{cases}$$

nel quale le equazioni presentano un numero decrescente di incognite.

Definizione 5.11. Una matrice si dice **a gradini** se, andando dalla prima all'ultima, ogni riga inizia con un numero sempre maggiore di zeri.
Il primo elemento non nullo in ogni riga di una matrice a gradini si chiama **pivot**.

In altre parole, una matrice è a gradini se in ogni riga il pivot ha un indice di colonna strettamente maggiore del pivot della riga precedente. Ad esempio, delle matrici seguenti

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

la prima è a gradini perché i suoi pivot (7 nella prima riga, 4 nella seconda e 6 nella terza) si trovano, nell'ordine, sulla prima, seconda e quarta colonna (indice di colonna sempre più grande), mentre le altre due no (nella seconda, il primo elemento non nullo della terza riga sta nella stessa colonna del primo elemento non nullo della seconda riga; nella terza matrice, il primo elemento non nullo della terza riga sta in una colonna di indice più piccolo del primo elemento non nullo della seconda riga).
Un sistema si dice a gradini se la sua matrice completa è una matrice a gradini.

Vogliamo ora presentare un metodo per ridurre una matrice qualunque in una matrice a gradini in modo da applicarlo alle matrice completa di un sistema di equazioni per risolverlo. Questo procedimento si chiama appunto **metodo di riduzione a gradini** o, dal momento che consiste nell'eliminare incognite, **metodo di eliminazione di Gauss-Jordan**.
Come stiamo per vedere, il procedimento di riduzione a gradini, oltre a semplificare il sistema, fa emergere anche le eventuali incompatibilità e le eventuali equazioni superflue.

Per trasformare un sistema in un sistema a gradini, trasformeremo la sua matrice completa in una matrice a gradini effettuando le seguenti operazioni sulle sue righe, dette *operazioni elementari di primo, secondo e terzo tipo*:

(I) Scambiare tra loro due righe della matrice (in simboli, $R_i \leftrightarrow R_j$)

(II) Moltiplicare una riga della matrice per un coefficiente non nullo (in simboli, $R_i \to cR_i$, con $c \neq 0$)

(III) Sommare a una riga della matrice un'altra riga moltiplicata per un numero qualunque (in simboli, $R_i \to R_i + dR_j$)

Il fatto importante è che tali operazioni, che modificano le righe, corrispondono a modificare le equazioni del sistema *in modo però da non cambiare l'insieme delle soluzioni*.

Proposizione 5.12. *La matrice ottenuta dalla matrice completa di un sistema col metodo di Gauss-Jordan è la matrice completa di un sistema* **equivalente** *a quello iniziale (ovvero avente le stesse soluzioni del sistema iniziale).*

Dimostrazione. Per quanto riguarda le prime due operazioni questo è abbastanza chiaro. In particolare scambiare tra loro le righe della matrice equivale a cambiare l'ordine delle equazioni corrispondenti, e questo chiaramente non modifica le soluzioni del sistema che sono soluzioni comuni alle equazioni indipendentemente dall'ordine in cui le mettiamo. Inoltre moltiplicare una riga della matrice per $c \neq 0$ equivale a moltiplicare entrambi i membri dell'equazione corrispondente per c, e anche questo produce un'equazione equivalente.[2] Denotiamo ora le equazioni di un sistema con le lettere $R_1, \dots, R_m$ con un abuso di notazione. Ora per le operazioni del terzo tipo supponiamo di voler dimostrare che i sistemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \text{e}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) + d(a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n) = b_i + db_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sono equivalenti. Vogliamo cioè dimostrare che tutte le soluzioni del primo sono soluzioni del secondo e viceversa. Sia dunque $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ una soluzione del primo sistema. Allora dobbiamo solo mostrare che questa soddisfa anche l'equazione $(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) + d(a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n) = b_i + db_j$. Ma questo è chiaro poichè $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ è in particolare soluzione della j-esima e i-esima equazione del primo sistema. Se, viceversa, $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ è soluzione del secondo sistema, allora in particolare è soluzione della sua j-esima equazione. Ma allora

$$\begin{aligned} (a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n) + d(a_{j1}v_1 + \cdots + a_{jn}v_n) &= b_i + db_j \\ (a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n) + d(b_j) &= b_i + db_j \\ a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n &= b_i \end{aligned}$$

e quindi $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ è soluzione di tutte le equazioni del primo sistema. □

Ora, mostriamo tramite alcuni esempi come, usando le operazioni elementari, si possa trasformare un qualunque sistema in un sistema a gradini (che, in base alla Proposizione 5.12, sarà equivalente al sistema originale) e come poi risolvere tale sistema.
Si consideri il sistema

[2] Qui si capisce anche la condizione che c non debba essere zero: moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per zero si ottiene $0 = 0$, che è sicuramente un'uguaglianza vera ma non può essere sostituita all'equazione originale, perché questo equivarrebbe a cancellarla dal sistema.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \tag{5.16}$$

la cui matrice completa[3] è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right). \tag{5.17}$$

Ora, vogliamo trasformare tale matrice in una matrice a gradini usando le operazioni elementari, in modo da ottenere un sistema a gradini equivalente al sistema (5.16). Osserviamo che il primo elemento a_{11} della prima riga è diverso da zero. In base alla definizione di matrice a gradini i pivot della seconda e della terza riga non possono stare nella prima colonna. In altre parole, dobbiamo trasformare la matrice in modo che a_{21} e a_{31} siano uguali a zero.
Otteniamo sicuramente questo scopo se applichiamo le operazioni elementari del terzo tipo $R_2 \to R_2 + R_1$ e $R_3 \to R_3 + R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

La matrice trasformata non è ancora una matrice a gradini in quanto il pivot della terza riga si trova in corrispondenza della stessa colonna (la seconda) del pivot della seconda riga. Dobbiamo far sì che $a_{32} = 0$. A questo scopo, basta applicare l'operazione elementare $R_3 \to R_3 - R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

Abbiamo ottenuto quindi una matrice a gradini. Il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_3 = -3 \end{cases} \tag{5.18}$$

corrispondente alla matrice trasformata è, come sappiamo, equivalente al sistema originale (5.16), quindi trovando le sue soluzioni avremo risolto il sistema (5.16).

[3] D'ora in poi, nella matrice completa tracceremo a volte una linea per separare la matrice dei coefficienti dalla colonna dei termini noti.

Il principale vantaggio di un sistema a gradini consiste nel fatto che nelle equazioni compaiono sempre meno incognite (leggendole dalla prima all'ultima). Per risolverlo, basta quindi iniziare a risolvere le equazioni da quella che contiene meno incognite (l'ultima) e risalire mediante sostituzioni fino alla prima. Più precisamente, dall'ultima equazione $4x_3 = -3$ ricaviamo subito $x_3 = -\frac{3}{4}$; sostituendo il valore così trovato nella seconda equazione troviamo

$$2x_2 - 2x_3 = 1 \longrightarrow 2x_2 = 1 + 2x_3 = 1 + 2(-\frac{3}{4}) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow x_2 = -\frac{1}{4}$$

e analogamente, sostituendo i valori di x_2 e x_3 così ottenuti nella prima equazione troviamo

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \longrightarrow x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - (-\frac{1}{4}) - (-\frac{3}{4}) = 2$$

Riassumendo, la terna $\left(2, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ è l'unica soluzione del sistema (5.18), ovvero del sistema iniziale (5.16).

Ora vediamo altri due esempi significativi di risoluzione di un sistema lineare, che metteranno in evidenza ulteriori vantaggi della riduzione a gradini.
Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \tag{5.19}$$

che ha come matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right). \tag{5.20}$$

Come fatto per il sistema precedente, trasformiamo tale matrice in una matrice a gradini mediante operazioni elementari.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Notiamo che la terza riga della matrice trasformata corrisponde all'equazione $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$, ovvero $0 = -1$. Poichè questa uguaglianza è falsa, non esiste nessuna terna che soddisfi le tre condizioni del sistema ridotto corrispondente, ovvero tale sistema non ha soluzioni. Questo, in virtù dell'equivalenza tra il sistema originale e quello ridotto, ci dice che il sistema di partenza non ha soluzioni, ovvero è incompatibile.
Necessariamente tra le equazioni del sistema di partenza vi era una incompatibilità non evidente che il procedimento di riduzione a gradini ha fatto emergere. In effetti, se moltiplichiamo membro a membro la prima equazione per 2 e le sottraiamo la seconda equazione otteniamo

$$2(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1 - x_2 - x_3) = 2 \cdot 1 - 0$$

e quindi, svolgendo i calcoli,

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2.$$

Questa condizione, che è conseguenza delle prime due equazioni ed è quindi soddisfatta da qualunque terna le soddisfi, è chiaramente incompatibile con la terza equazione. Il procedimento di riduzione a gradini ha messo in luce questa incompatibilità trasformandola nell'incompatibilità evidente $0 = -1$.

Consideriamo ora come ultimo esempio il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \tag{5.21}$$

che ha come matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right). \tag{5.22}$$

Applicando operazioni elementari per ridurre a gradini,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -2 \end{array}\right) \tag{5.23}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{5.24}$$

notiamo che la terza riga della matrice trasformata corrisponde all'equazione $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$, ovvero $0 = 0$.

Quest'ultima condizione è un'identità vera indipendentemente dal valore che diamo alle incognite, quindi essa può essere cancellata dal sistema senza influire sulle sue soluzioni. In altre parole, il sistema iniziale di tre equazioni si è trasformato nel sistema di due equazioni equivalente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \tag{5.25}$$

Benché non sia rimasta un'equazione con una sola incognita come nel primo sistema che abbiamo risolto, possiamo comunque procedere come segue. Ricaviamo x_2 dalla seconda equazione.

$$-3x_2 - 2x_3 = -1 \longrightarrow -3x_2 = 2x_3 - 1 \longrightarrow x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3} \tag{5.26}$$

Poi sostituiamo l'espressione ottenuta nella prima equazione per ricavare x_1:

$$x_1+x_2+3x_3 = 1 \longrightarrow x_1 = 1-x_2-3x_3 = 1-\left(-\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}\right)-3x_3 = \frac{2}{3}-\frac{7}{3}x_3. \tag{5.27}$$

Ora, per qualunque valore $t \in \mathbb{R}$ assegniato a x_3, la (5.26) e la (5.27) implicano che ponendo $x_2 = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}$ e $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}t$, le equazioni del sistema sono soddisfatte, ovvero si ottiene una soluzione del sistema. In altre parole, le soluzioni del sistema sono esattamente tutte le terne del tipo $(\frac{2}{3} - \frac{7}{3}t, -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$: il sistema ha infinite soluzioni.

Più precisamente, dal momento che le infinite soluzioni del sistema dipendono da un solo parametro libero t, si dice che il sistema ha "infinito alla uno" (si scrive ∞^1) soluzioni.

In generale, possiamo dare la seguente

Definizione 5.13. Un sistema di equazioni lineari ha ∞^k **soluzioni** se l'espressione generale della sua soluzione dipende da k parametri liberi.

Osservazione 5.14. Quando risolviamo un sistema ridotto a gradini, procediamo dall'ultima equazione alla prima ricavando per ogni equazione del sistema una incognita (eventualmente in funzione di altre incognite). Questo significa che, ammesso che il sistema sia compatibile, il numero di parametri liberi nell'espressione della soluzione sarà uguale alla differenza tra il numero delle incognite e il numero di equazioni non nulle rimaste dopo la riduzione.

In particolare, avremo un'unica soluzione (cioè nessun parametro libero) solo nel caso in cui il numero di equazioni non nulle rimaste *dopo la riduzione* sia uguale al numero di incognite[4].

Dal momento che il procedimento di riduzione a gradini produce una riga nulla quando tale riga era superflua (ovvero dipendente dalle altre), il numero di righe non nulle dopo la riduzione a gradini ci dà l'importante informazione di quante righe indipendenti aveva la matrice iniziale. Questo numero, che si chiama *rango della matrice*, ha un significato che va ben oltre la risoluzione di sistemi lineari.

Definizione 5.15. Data una matrice A, si dice **rango** di A il numero di righe non nulle nella matrice ottenuta riducendo A a gradini.

Osservazione 5.16. Il rango di una matrice, come lo abbiamo appena definito, dovrebbe essere chiamato più precisamente **rango per righe**, in quanto esso ci dice quante *righe* indipendenti ci sono in una matrice data. A priori, si potrebbe definire l'analoga nozione per le colonne, il **rango per colonne**, che ci dica quante *colonne* indipendenti ci sono in una matrice data. Tuttavia, questa distinzione è inutile in quanto un importante risultato, che non dimostriamo, afferma che *il rango per righe è sempre uguale al rango per colonne*, ovvero il numero di righe indipendenti di una matrice è uguale al numero delle sue colonne indipendenti.
Ad esempio, nella matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

la seconda riga R_2 è evidentemente dipendente dalle altre, in quanto $R_2 = 2R_1$ (se volessimo far apparire anche la terza riga in questa relazione di dipendenza, potremmo equivalentemente scrivere $R_2 = 2R_1 + 0R_3$).
Per il risultato appena citato, allora anche una delle colonne della matrice deve essere dipendente dalle altre: in effetti, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

che era molto meno evidente della relazione di dipendenza esistente tra le righe.

Allora, quanto detto nell'Osservazione 5.14 si può riassumere nella seguente

Proposizione 5.17. *Se un sistema di equazioni lineari è compatibile, allora esso ha* ∞^{n-r} *soluzioni, dove* n *denota il numero di incognite e* r *è il rango della matrice. In particolare, se* $r = n$ *allora il sistema ha una sola soluzione.*

[4] Osserviamo che questa affermazione è falsa se non ci limitiamo a sistemi ridotti a gradini, come dimostra il semplice esempio del sistema (5.8) che ha due equazioni in due incognite ma infinite soluzioni.

5.3 Qualche applicazione geometrica

Vediamo ora alcuni problemi geometrici che possono essere risolti grazie ai concetti appena visti.
Ad esempio, consideriamo le due rette r e r' di equazioni cartesiane

$$r\colon \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=5 \end{cases} \quad , \quad r'\colon \begin{cases} x-y-2z=-2 \\ x+3y+2z=2 \end{cases} \tag{5.28}$$

e supponiamo di voler determinare se esse hanno punti in comune.
Dal momento che i punti di una retta espressa in equazioni cartesiane sono proprio le soluzioni del sistema formato dalle due equazioni, i punti comuni alle due rette sono dati dalle soluzioni comuni a tutte e quattro le equazioni delle due rette, ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=5 \\ x-y-2z=-2 \\ x+3y+2z=2 \end{cases} \tag{5.29}$$

Riducendo la matrice completa otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-R_1 \\ R_4\to R_4-R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3\to 3R_3-2R_2 \\ R_4\to 3R_4+2R_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to 7R_4+R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vediamo quindi che il sistema è compatibile e, essendosi annullata una riga, la matrice ha rango 3. Quindi avendo 3 incognite, in base alla Proposizione 5.17, il sistema ha $\infty^{3-3}=1$ soluzioni, cioè una sola soluzione. Questa può essere determinata risolvendo il sistema ridotto corrispondente

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -3y-z=1 \\ -7z=-14 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ottiene $z=2$, che sostituito nella seconda dà

$$-3y = z + 1 = 2 + 1 = 3$$

ovvero $y = -1$. Sostituendo nella prima equazione per ottenere x si ha

$$x = 2 - y - z = 2 - (-1) - 2 = 1$$

Quindi l'unica equazione del sistema è data dalla terna $(1, -1, 2)$, che sono le coordinate del punto in cui si incontrano le due rette.

Supponiamo invece che le rette siano

$$r\colon \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \quad , \quad r' : \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \tag{5.30}$$

e supponiamo ancora di voler determinare se esse hanno punti in comune.

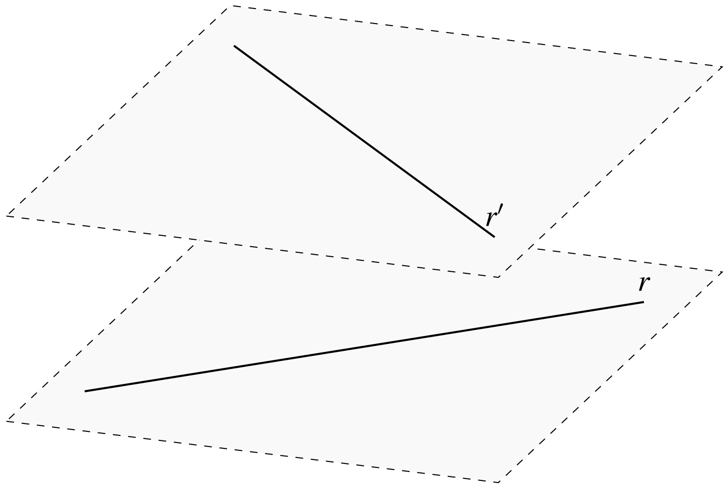
Come sopra, mettiamo insieme le quattro equazioni e riduciamo la matrice completa del sistema così ottenuto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{} \tag{5.31}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to 7R_4 + 2R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

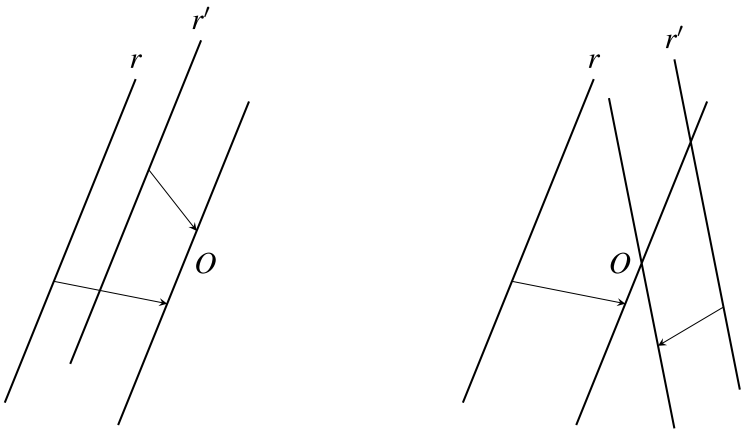
Essendo il sistema incompatibile (l'ultima riga corrisponde all'uguaglianza falsa $0 = 7$) deduciamo che le due rette non hanno punti in comune.

Mentre nel piano due rette che non hanno punti in comune sono necessariamente parallele, nello spazio tridimensionale questo non è più vero. Come si vede nel seguente disegno, due rette nello spazio, grazie alla dimensione in più presente rispetto al piano, possono trovarsi su piani paralleli e quindi non intersecarsi pur non avendo la stessa direzione.



Definizione 5.18. Due rette senza punti in comune si dicono **sghembe** se non sono parallele.

Vediamo ora come sia possibile determinare se le rette date sono sghembe o parallele senza ulteriori calcoli, ma sfruttando la riduzione già fatta.
Due rette che non hanno punti in comune sono parallele se e solo se coincidono quando traslate parallelamente a se stesse sull'origine (ovvero hanno infiniti punti in comune). Sono invece sghembe se e solo se hanno un solo punto in comune (l'origine) quando traslate parallelamente a se stesse sull'origine.



Possiamo così tradurre il problema di capire se le due rette hanno la stessa direzione nel problema di determinare un'intersezione (tra le rette traslate).
Per traslare una retta espressa in equazioni cartesiane, parallelamente a se stessa, basta modificare i termini noti delle equazioni lasciando invariati i primi membri poichè, come visto in precedenza questi traslano i piani parallelamente. In particolare, otteniamo la

traslazione sull'origine se poniamo i termini noti uguali a zero. Infatti in tal caso le equazioni risultano soddisfatte dalla terna $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, che sono le coordinate dell'origine, il che significa che la retta traslata è proprio quella che passa per l'origine. In altre parole, la retta parallela passante per l'origine è data in equazioni cartesiane dal sistema omogeneo associato.
Nel caso delle due rette r e r' date da (5.30), le parallele per l'origine sono rappresentate rispettivamente dalle equazioni

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \tag{5.32}$$

Per determinare se tali rette traslate hanno infiniti punti in comune o uno solo dobbiamo risolvere il sistema che si ottiene mettendo insieme le 4 equazioni, che ha come matrice associata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Per ridurre a gradini questa matrice dovremmo applicare esattamente le stesse operazioni usate per ridurre la (5.31), che differisce da essa solo per il fatto di avere tutti i termini noti uguali a zero. L'unica differenza è che i termini noti rimarrangono sempre nulli qualunque operazione elementare si applichi. Quindi, senza dover rifare i conti, sappiamo che arriveremmo alla stessa matrice ridotta ma con l'ultima colonna (quella dei termini noti) tutta nulla:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Guardando questa matrice, che rappresenta ora un sistema compatibile con 3 incognite e rango 3, concludiamo che traslando le rette sull'origine avremmo una sola soluzione (l'origine stessa) e quindi le rette di partenza non erano parallele.
Per vedere invece cosa succederebbe se le rette fossero parallele, consideriamo l'esempio seguente:

$$r\colon \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=0 \end{cases} , \quad r'\colon \begin{cases} 2x+3z=3 \\ x+3y=-3 \end{cases} \tag{5.33}$$

Allo scopo di controllare se le rette hanno punti in comune, mettiamo insieme le quattro equazioni e riduciamo la matrice completa del sistema così ottenuto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}}{\longrightarrow} \tag{5.34}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \underset{\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \underset{R_4 \to 2R_4 + 5R_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Come si vede, le rette non hanno punti in comune in quanto la terza riga corrisponde all'uguaglianza falsa $0 = 2$. D'altra parte il sistema omogeneo associato (formato dalle due rette traslate sull'origine) avrebbe come matrice ridotta la stessa matrice ottenuta ora ma con ultima colonna di zeri:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

che rappresenta la matrice di un sistema ridotto compatibile con 3 incognite e rango 2. Questo sistema ha quindi infinite soluzioni: questo significa che le due rette, traslate sull'origine, hanno infiniti punti in comune, ovvero coincidono. Concludiamo che le due rette di partenza erano parallele.

Osservazione 5.19. Per rette date in equazioni parametriche verificare se esse sono parallele o meno è immediato, in quanto come sappiamo dal capitolo precedente nelle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

un vettore che rappresenta la direzione della retta è dato dalla terna (l, m, n) dei coefficienti di t. Basta quindi confontare i due vettori così ottenuti per ognuna delle due rette: queste avranno la stessa direzione se tali vettori sono proporzionali. Nel caso in cui le rette siano date in equazioni cartesiane, si può passare alle parametriche semplicemente risolvendo i sistemi dati dalle cartesiane stesse. Ad esempio, per le rette viste sopra in (5.33), riducendo la matrice completa delle cartesiane di r otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2 \to R_2 - R_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

ovvero il sistema ridotto

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y+z=-1 \end{cases}$$

Ponendo $z=t$ si ricava $-2y=-1-t$ (ovvero $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$) e $x=1-y-z=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t)-t=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t$. Quindi r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t \\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases} \tag{5.35}$$

Analogamente, riducendo la matrice completa delle cartesiane di r' otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \underset{R_2\to 2R_2-R_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

che corrisponde al sistema ridotto

$$\begin{cases} 2x+3z=3 \\ 6y-3z=-9 \end{cases}$$

Ponendo $z=t$ si ricava $6y=9+3t$ (ovvero $y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t$) e $2x=3-3z=3-3t$, ovvero $x=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}t$. Quindi r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}t \\ y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases} \tag{5.36}$$

Confrontando i coefficienti di t nelle parametriche (5.35) e (5.36) vediamo che le rette r ed r' hanno entrambe direzione rappresentata dal vettore di coordinate $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},1)$, e quindi sono parallele[5].

Un altro problema geometrico che può essere risolto con l'aiuto delle tecniche viste in questo capitolo è il seguente. Supponiamo di avere una retta data in equazioni cartesiane

$$r\colon \begin{cases} Ax+By+Cz=D \\ A'x+B'y+C'z=D' \end{cases} \tag{5.37}$$

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, la (5.37) significa che la retta r è intersezione del piano dato dall'equazione cartesiana $Ax+By+Cz=D$ e dal piano di

[5] Si noti che sappiamo che le rette hanno la stessa direzione, che non esclude il caso in cui esse siano parallele coincidenti, ovvero che le equazioni cartesiane date rappresentassero in realtà la stessa retta.

equazione cartesiana $A'x + B'y + C'z = D'$. Le due equazioni che compongono le cartesiane sono quindi le equazioni di due particolari piani che contengono la retta.
Ora, vogliamo determinare *tutti* i piani che contengono la retta.

Proposizione 5.20. *La generica equazione cartesiana del piano che contiene la retta* (5.37) *è data da*

$$\alpha(Ax + By + Cz - D) + \beta(A'x + B'y + C'z - D') = 0 \tag{5.38}$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *(non entrambi nulli).*

Dimostrazione. Iniziamo con l'osservare che se un piano ha equazione della forma (5.38), allora esso contiene la retta. Infatti, dire che una retta è contenuta in un piano significa che se un punto appartiene alla retta allora esso appartiene anche al piano. Ma se un punto appartiene alla retta, allora le sue coordinate (x, y, z) soddisfano entrambe le equazioni $Ax + By + Cz = D$ e $A'x + B'y + C'z = D'$ della retta, e quindi

$$\alpha(Ax+By+Cz-D)+\beta(A'x+B'y+C'z-D') = \alpha(D-D)+\beta(D'-D') = \alpha\cdot 0+\beta\cdot 0 = 0.$$

Quindi (x, y, z) soddisfa anche l'equazione (5.38): il punto appartiene al piano rappresentato da tale equazione. Questo dimostra che, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (non entrambi nulli), l'equazione (5.38) rappresenta un piano che contiene la retta.

Viceversa, vogliamo mostrare che qualunque piano che contenga la retta può essere rappresentato nella forma (5.38). Per vederlo, osserviamo che un generico piano di equazione $A''x + B''y + C''z = D''$ contiene tutta la retta di equazioni (5.37) se e solo se ogni terna che soddisfa le equazioni $Ax + By + Cz = D$ e $A'x + B'y + C'z = D'$ soddisfa automaticamente anche l'equazione $A''x + B''y + C''z = D''$ del piano.
In altre parole, nel sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \\ A''x + B''y + C''z = D'' \end{cases}$$

che si ottiene mettendo insieme tutte le cartesiane, la terza equazione è superflua ovvero dipendente dalle altre. A livello della matrice completa

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

questo si traduce nel fatto che la terza riga deve essere combinazione lineare delle altre due, ovvero devono esistere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} A & B & C & D \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

In altri termini devono essere soddisfatte le quattro condizioni

$$A'' = \alpha A + \beta A', \quad B'' = \alpha B + \beta B', \quad C'' = \alpha C + \beta C', \quad D'' = \alpha D + \beta D'.$$

Quindi l'equazione $A''x + B''y + C''z = D''$ si riscrive

$$(\alpha A + \beta A')x + (\alpha B + \beta B')y + (\alpha C + \beta C')z = \alpha D + \beta D'$$

che equivale proprio alla (5.38).

□

Esempio 5.21. Data la retta

$$r\colon \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

vogliamo trovare l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e passa per il punto P_0 di coordinate $(1, 1, 1)$.
Determiniamo prima tutti i piani che contengono r che, secondo la Proposizione 5.20, sono dati al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dall'equazione

$$\alpha(x + y + z - 1) + \beta(x - y + 2z) = 0. \tag{5.39}$$

Poiché tra tutti questi piani cerchiamo quello che contiene il punto $(1, 1, 1)$, vogliamo che tale equazione sia soddisfatta quando poniamo $x = 1, y = 1, z = 1$. Sostituendo otteniamo

$$\alpha(1 + 1 + 1 - 1) + \beta(1 - 1 + 2) = 2\alpha + 2\beta = 0$$

da cui $\alpha = -\beta$. Sostituendo questa relazione nella (5.39), si ottiene

$$-\beta(x + y + z - 1) + \beta(x - y + 2z) = 0$$

ovvero, svolgendo i calcoli,

$$-2\beta y + \beta z + \beta = 0.$$

Al variare del parametro β, queste equazioni rappresentano tutte lo stesso piano (il piano π cercato) in quanto si tratta di equazioni proporzionali, tutte equivalenti. Dividendo per il parametro β (o, equivalentemente, scegliendo $\beta = 1$), possiamo allora scrivere che π ha equazione cartesiana

$$-2y + z + 1 = 0.$$

Se, invece del passaggio per il punto, volessimo imporre che il piano, oltre a contenere r, fosse parallelo a un altro piano, ad esempio quello di equazione cartesiana $x+2y+3z = -1$, dovremmo procedere come segue.
Come abbiamo visto nel capitolo precedente, due piani $Ax + By + Cz = D$ e $A'x + B'y + C'z = D'$ sono paralleli se e solo se le terne (A, B, C) e (A', B', C') sono proporzionali, in quanto rappresentano le coordinate di vettori normali (perpendicolari) ai piani. In realtà, poiché abbiamo la libertà di moltiplicare l'equazione di un piano per qualunque coefficiente senza che il piano venga modificato, possiamo sempre far sì che sia $(A, B, C) = (A', B', C')$. Allora, poiché svolgendo i calcoli nella (5.39), vediamo che il generico piano che contiene r è della forma

$$(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y + (\alpha + 2\beta)z - \alpha = 0, \tag{5.40}$$

la condizione di parallelismo tra questo piano e il piano di equazione $x + 2y + 3z = -1$ è

$$(\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha + 2\beta) = (1, 2, 3)$$

ovvero

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + 2\beta = 3 \end{cases}$$

Per trovare il piano dato, basta quindi risolvere tale sistema e sostituire i valori di α e β trovati nella (5.40). In questo caso, si vede riducendo a gradini la sua matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to 2R_3 + R_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

il sistema è incompatibile e quindi la condizione di parallelismo non può essere soddisfatta. Possiamo concludere che tra i piani che contengono la retta r, non ne esiste uno parallelo al piano dato.

Esempio 5.22. Date le due rette

$$r_1 \colon \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad r_2 \colon \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

determiniamo, se esiste, il piano che le contiene.
Come abbiamo visto sopra, il generico piano che contiene r_1 ha equazione

$$\alpha_1(x + y + z - 3) + \beta_1(x - 2y + z) = 0$$

ovvero

$$(\alpha_1+\beta_1)x+(\alpha_1-2\beta_1)y+(\alpha_1+\beta_1)z-3\alpha_1=0. \tag{5.41}$$

Il generico piano che contiene r_2 ha invece equazione

$$\alpha_2(2x+y-z-2)+\beta_2(x-y-z+1)=0$$

ovvero

$$(2\alpha_2+\beta_2)x+(\alpha_2-\beta_2)y+(-\alpha_2-\beta_2)z+(-2\alpha_2+\beta_2)=0. \tag{5.42}$$

Per trovare, se esiste, il piano che contiene entrambe le rette basta controllare se esistono valori di $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ tali che la (5.41) e la (5.42) coincidano. Uguagliando i coefficienti di x, y, z e il termine noto in tali equazioni si ottiene

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1=2\alpha_2+\beta_2 \\ \alpha_1-2\beta_1=\alpha_2-\beta_2 \\ \alpha_1+\beta_1=-\alpha_2-\beta_2 \\ -3\alpha_1=-2\alpha_2+\beta_2 \end{cases}$$

ovvero il sistema omogeneo di 4 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1-2\alpha_2-\beta_2=0 \\ \alpha_1-2\beta_1-\alpha_2+\beta_2=0 \\ \alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2=0 \\ -3\alpha_1+2\alpha_2-\beta_2=0 \end{cases}$$

Tale sistema ha sicuramente sempre la soluzione $\alpha_1=\beta_1=\alpha_2=\beta_2=0$, ma se sostituissimo tali valori nelle (5.41) e la (5.42) otterremmo $0=0$, che non è l'equazione di un piano. Quindi per l'esistenza del piano che contiene entrambe le rette deve esistere una soluzione non nulla di tale sistema.
Riducendo a gradini la sua matrice dei coefficienti troviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1 \\ R_4\to R_4+3R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4+R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4+R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè la matrice ha rango 3 il sistema ha sicuramente altre soluzioni oltre alla 4-upla nulla $(0,0,0,0)$, quindi esiste il piano che contiene le rette.

Per trovare tale piano, basta risolvere il sistema, che abbiamo ridotto alla forma equivalente

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 - 2\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ -3\beta_1 + \alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 3\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Vediamo però che non è necessario determinare completamente la soluzione del sistema. Infatti l'ultima equazione non nulla ci dà il valore di α_2 (in funzione di β_2), mentre le prime due i valori di α_1 e β_1 (sempre in funzione di β_2). Quindi se sostituiamo i valori di α_1 e β_1 così trovati nella (5.41) o quello di α_2 nella (5.42) otteniamo lo stesso piano (il sistema esprime proprio la condizione che i due piani siano uguali). Dunque per trovare il piano basta determinare α_2 dall'ultima equazione non nulla $3\alpha_2+2\beta_2 = 0$ senza dover risolvere le altre due.

Questa equazione è equivalente a $\alpha_2 = -\frac{2}{3}\beta_2$ che sostituita nella (5.42) dà

$$(-\frac{4}{3}\beta_2 + \beta_2)x + (-\frac{2}{3}\beta_2 - \beta_2)y + (\frac{2}{3}\beta_2 - \beta_2)z + (\frac{4}{3}\beta_2 + \beta_2) = 0$$

ovvero

$$-\frac{1}{3}\beta_2 x - \frac{5}{3}\beta_2 y - \frac{1}{3}\beta_2 z + \frac{7}{3}\beta_2 = 0.$$

Dividendo per β_2 e moltiplicando per -3 (solamente per ottenere coefficienti interi) si ottiene infine

$$x + 5y + z - 7 = 0$$

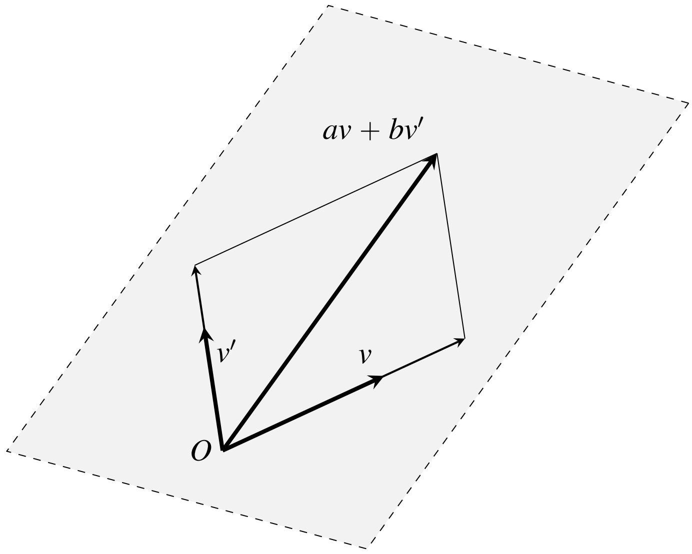
che è l'equazione del piano cercato.

Concludiamo questo capitolo con un ultimo esempio di applicazione geometrica delle tecniche apprese per risolvere i sistemi.

È possibile determinare se tre vettori applicati nello spazio tridimensionale v, v', v'' sono complanari?

La risposta è affermativa, e per vederlo si sfrutta proprio il procedimento di riduzione a gradini. Fissiamo una base e supponiamo che rispetto a questa i vettori abbiano coordinate $v \equiv (-1, 2, 1)$, $v' \equiv (-2, -1, 1)$ e $v'' \equiv (3, 4, -1)$.

Ora, due qualunque di questi vettori, ad esempio v e v', appartengono sicuramente a un piano, e un qualunque vettore che stia anch'esso su tale piano si scrive come combinazione $av + bv'$.



Quindi, il terzo vettore v'' appartiene allo stesso piano su cui stanno v e v' se e solo se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $v'' = av + bv'$.
In coordinate, questo equivale a dire che

$$(3, 4, -1) = a(-1, 2, 1) + b(-2, -1, 1).$$

Questo significa che la terna $(3, 4, -1)$ si scrive come combinazione delle altre due e quindi è dipendente da esse. Ma allora, per capire se questo accade o no, basta scrivere la matrice che ha tali terne come righe

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

ed effettuare una riduzione a gradini. Infatti, come sappiamo, una riga è dipendente dalle altre solo se essa si annulla in seguito alla riduzione a gradini. Calcoliamo quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + 3R_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 + 2R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendosi annullata la terza riga, questa era combinazione delle prime due: quindi i tre vettori rappresentati in coordinate dalle righe della matrice sono complanari.