Introduzione alla logica proposizionale

Francesco Paoli
Dispense per gli studenti

April 21, 2021

1 Il calcolo HK per la logica classica

In questo paragrafo definiremo un linguaggio proposizionale adeguato per formulare la logica classica e la presenteremo mediante un calcolo assiomatico **HK** del tipo usualmente definito *alla Hilbert*. Infine, dimostreremo un appropriato teorema di adeguatezza di **HK** rispetto alla semantica delle tavole di verità: dimostreremo cioè che i teoremi di **HK** sono *tutte e sole* le tautologie. Questo risultato sarà ottenuto come corollario di un teorema più forte, in base al quale si fa vedere che le nozioni di derivabilità in **HK** e di conseguenza logica (definite sotto) coincidono.

1.1 Sintassi logica

Vogliamo adesso costruire un calcolo logico, che chiameremo **HK**, il quale generi tutte e sole le tautologie.

Un calcolo proposizionale alla Hilbert consta di due componenti: 1) un linguaggio proposizionale e 2) un insieme di postulati.

Il linguaggio proposizionale di **HK**, che chiamiamo $\pounds_0$, è così strutturato:

- *Simboli descrittivi*: un insieme numerabile di *variabili* $\{p_1, p_2, ...\}$.
- *Simboli logici*: il connettivo unario $\neg$ (negazione), i connettivi binari $\wedge$ (congiunzione), $\vee$ (disgiunzione), $\rightarrow$ (implicazione).
- *Simboli ausiliari*: le parentesi di apertura e di chiusura: (e).

L'insieme $\mathbf{FOR}(\pounds_0)$ delle formule di $\pounds_0$ è definito induttivamente nel modo seguente:

- ogni variabile p_i è una formula;
- se α, β sono formule, allora $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta$ sono formule;
- nient'altro è una formula.

Attenzione! Seguiremo qui la convenzione in base alla quale congiunzione e disgiunzione legano più fortemente dell'implicazione. La formula $\alpha \wedge \beta \to \gamma$, quindi, dovrà essere interpretata come $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$ e non come $\alpha \wedge (\beta \to \gamma)$.

I postulati di **HK** si dividono a loro volta in 1) assiomi e 2) regole di inferenza. Gli assiomi sono formule definite come tali. In **HK** (e, generalmente, in ogni calcolo alla Hilbert) gli assiomi vengono specificati *schematicamente*: dicendo ad esempio che $\neg\neg\alpha \to \alpha$ è un assioma, intendiamo che ogni formula ottenuta sostituendo alla metavariabile α una qualsiasi formula in $\mathbf{FOR}(\pounds_0)$ è un assioma. Le regole di inferenza sono insiemi di $n+1$ formule $\{\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$, dove $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sono dette premesse e α_{n+1} conclusione. La notazione standard per una regola di inferenza è

$$\frac{\alpha_1, ..., \alpha_n}{\alpha_{n+1}}$$

e la sua interpretazione intuitiva è: dalle assunzioni $\alpha_1, ..., \alpha_n$ si può concludere α_{n+1}. Anche le regole di inferenza vengono presentate schematicamente.

Nella tabella seguente vengono presentati i postulati di **HK**.

A1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$	
A2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	
A3. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$	A4. $\alpha \wedge \beta \to \beta$
A5. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \wedge \gamma))$	
A6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$	A7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
A8. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$	
A9. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$	A10. $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$
A11. $\neg\neg\alpha \to \alpha$	R1. $\dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}$

I prossimi due concetti di fondamentale importanza che vogliamo introdurre sono quelli di dimostrazione e di teorema.

Una *dimostrazione* in **HK** è una successione finita di formule $\alpha_1, ..., \alpha_n$ appartenenti a $\mathbf{FOR}(\pounds_0)$ tale che, per ogni $i \leq n$, α_i è un assioma di **HK** oppure è ottenuta da formule precedenti nella successione applicando l'(unica) regola di inferenza di **HK**.

Un *teorema* (o formula dimostrabile) di **HK** è la formula conclusiva di una qualche dimostrazione in **HK**. Per dire che α è un teorema di **HK** scriveremo spesso $\vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$. Si noti che in particolare gli assiomi sono teoremi, in quanto ciascun assioma è la formula conclusiva della dimostrazione (banale) che consiste in lui stesso e basta.

Ecco un esempio di dimostrazione in **HK**. Facciamo vedere come dimostrare il principio di identità $\alpha \to \alpha$.

1	$(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$	A2
2	$\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$	A1
3	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$	R1, 1, 2
4	$\alpha \to (\alpha \to \alpha)$	A1
5	$\alpha \to \alpha$	R1, 3, 4

Una volta che un teorema è stato dimostrato, si possono accorciare le dimostrazioni giustificando alcuni passaggi mediante un riferimento al teorema appena dimostrato. Facciamo un esempio. Chiamiamo T1 il principio di identità $\alpha \to \alpha$ appena dimostrato. Dimostriamo adesso il teorema T2 (legge di *assorbimento* o di *contrazione*):

$$(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)\,.$$

1	$(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to ((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \beta))$	A2
2	$\alpha \to \alpha$	T1
3	$(\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \alpha))$	A1
4	$(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \alpha)$	R1, 2, 3
5	$((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to ((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \beta))) \to (((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)))$	A2
6	$((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta))$	R1, 1, 5
7	$(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$	R1, 4, 6

In senso stretto, quella appena riportata non è neanche una dimostrazione: la formula al passo 2 non è né un assioma, né ottenuta da formule precedenti mediante R1. Si tratta però di un teorema: quindi la successione di formule precedente può essere trasformata in una dimostrazione semplicemente *inserendo* la dimostrazione di T1 dopo il passo 1.

Una *derivazione* della formula α in **HK** dall'insieme di formule Γ (dette *assunzioni*) è una successione finita di formule $\alpha_1, ..., \alpha_n$ appartenenti a $\mathbf{FOR}(\pounds_0)$ tale che, per ogni $i \leq n$, α_i è una delle seguenti tre cose:

- un assioma di **HK**;
- oppure è un elemento di Γ;
- oppure è ottenuta da formule precedenti nella successione applicando l'(unica) regola di inferenza di **HK**.

Quindi, l'unica differenza tra una dimostrazione e una derivazione è che i passi di quest'ultima possono essere giustificati anche con riferimento ad un'assunzione in Γ. Le derivazioni intendono insomma formalizzare il ragionamento *ex hypothesi*. Scriviamo $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$ per indicare che esiste una derivazione di α in **HK** dall'insieme di assunzioni Γ, o più brevemente: α è derivabile in **HK** da Γ. Una dimostrazione può essere vista anche come derivazione dall'insieme vuoto di assunzioni. Esempio: facciamo vedere che γ è derivabile in **HK** da $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha$.

1	$\alpha \to \beta$	assunzione
2	$\beta \to \gamma$	assunzione
3	α	assunzione
4	β	R1, 1, 3
5	γ	R1, 2, 4

Enunciamo senza dimostrarlo il seguente

Theorem 1 *(Teorema di deduzione).* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathbf{HK}} \beta$ *se e solo se* $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha \to \beta$.

Lemma 2 *In* **HK** *si dimostra:*
(i) $\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$

1.2 Semantica logica

Vogliamo adesso usare le tavole di verità per interpretare le formule del nostro calcolo logico. Abbiamo visto che ciascuna riga della tavola di verità per la formula α riflette una possibile assegnazione di valori di verità agli enunciati atomici che compongono α. Vogliamo adesso compiutamente formalizzare quest'idea di "possibile assegnazione di valori di verità agli enunciati atomici che compongono una formula".

Una *valutazione* (del linguaggio $\pounds_0$) è una funzione v da $\mathbf{FOR}(\pounds_0)$ nell'insieme $\{0, 1\}$ che obbedisce alle seguenti clausole:

$$\begin{aligned} v(\neg\alpha) &= 1 \text{ sse } v(\alpha) = 0; \\ v(\alpha \wedge \beta) &= 1 \text{ sse } v(\alpha) = 1 \text{ e } v(\beta) = 1; \\ v(\alpha \vee \beta) &= 1 \text{ sse } v(\alpha) = 1 \text{ o } v(\beta) = 1; \\ v(\alpha \to \beta) &= 1 \text{ sse } v(\alpha) = 0 \text{ o } v(\beta) = 1. \end{aligned}$$

Diciamo che α è *conseguenza logica* in **HK** dell'insieme di formule Γ (e scriviamo $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$) quando per ogni valutazione v, se $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, allora anche $v(\alpha) = 1$. Equivalentemente: α è *conseguenza logica* in **HK** di Γ quando non esiste nessuna valutazione v tale che $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$ e al contempo $v(\alpha) = 0$. Intuitivamente, α è conseguenza logica di Γ se α non può mai essere falsa quando tutte le formule in Γ sono vere (cfr. la definizione di schema di argomento valido!!). Si noti che, se α è una tautologia, allora è impossibile trovare una valutazione v tale che $v(\alpha) = 0$; di conseguenza una tautologia può essere vista come una conseguenza logica dell'insieme di formule vuoto. La notazione $\vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$, pertanto, è un modo equivalente di esprimere il fatto che α è una tautologia. Ancora, si osservi che in base alla definizione una tautologia è conseguenza logica di un *qualsiasi* insieme di formule.

2 Il teorema di adeguatezza

Vogliamo ora dimostrare che per quanto riguarda **HK** il concetto sintattico di derivabilità e quello semantico di conseguenza logica coincidono: in altre parole, vogliamo dimostrare che per ogni insieme di formule Γ e per ogni formula α si ha che $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$ se e solo se $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$. Se riusciremo nell'intento, in particolare avremo dimostrato che i teoremi di **HK** coincidono con le tautologie, e che quindi **HK** è davvero un calcolo che genera in maniera effettiva le tautologie che avevamo introdotto mediante le tavole di verità. Infatti, se per ogni insieme di formule Γ e per ogni formula α si ha:

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha \text{ se e solo se } \Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha,$$

in particolare, quando Γ è l'insieme vuoto, si ha che:

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \alpha \text{ se e solo se } \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha.$$

Tale teorema di adeguatezza per **HK** si divide in due parti:
Teorema di correttezza per **HK**: se $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$ allora $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$.
Teorema di completezza per **HK**: se $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$ allora $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$.

Theorem 3 *(Teorema di correttezza per* **HK***): per ogni insieme di formule* Γ *e per ogni formula* α *si ha: se* $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$ *allora* $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$.

Proof. Per ipotesi sappiamo che $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$, ovvero che esiste una derivazione di α da Γ in **HK**. La dimostrazione si svolge per induzione sulla lunghezza n di tale derivazione, ovvero sul numero di formule contenute in tale derivazione,

Base: $n = 1$. Se la derivazione di α da Γ in **HK** consiste di un unico passo, allora i casi sono due:

1. $\alpha \in \Gamma$; oppure

2. α è un assioma di **HK**.

Caso 1). Supponiamo che $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$; dunque vale in particolare $v(\alpha) = 1$ e quindi $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$. Caso 2): basta controllare che ogni assioma di **HK** è una tautologia, poiché, come già osservato, se α è una tautologia allora per ogni Γ vale $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$. Questa operazione, come sappiamo, si può fare con le tavole di verità (esercizio).

Passo induttivo. Supponiamo che l'enunciato del teorema sia vero per derivazioni che hanno lunghezza massima pari a un certo numero m. La nostra ipotesi d'induzione è quindi: "se esiste una derivazione di α da Γ in **HK** che ha lunghezza massima pari a m, allora $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$."

Dimostriamo che il teorema è vero anche per derivazioni di lunghezza pari a

$m+1$. Sia dunque

$$\left.\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \alpha\end{array}\right\} m+1 \text{ formule}$$

Se $\alpha \in \Gamma$, oppure α è un assioma di **HK**, ci si riconduce al caso precedente. Se invece α è ottenuta da formule precedenti $\delta, \delta \to \alpha$ tramite R1, allora si considerino le sotto-derivazioni $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{D}''$, entrambe di lunghezza $\leq m$, che terminano rispettivamente con δ e $\delta \to \alpha$:

$$\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}\vdots\\ \delta \to \alpha\end{array}\right\} \mathcal{D}' \leq m\\ \vdots\\ \delta\end{array}\right\} \mathcal{D}'' \leq m\\ \\ \vdots\\ \alpha\end{array}\right\} \mathcal{D}m+1$$

Tali derivazioni hanno una lunghezza $\leq m$ e quindi vi posso applicare l'ipotesi di induzione: si ha dunque $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \delta$ e $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \delta \to \alpha$. Sia adesso v una generica valutazione t.c. $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$; ne segue che $v(\delta) = v(\delta \to \alpha) = 1$. Ma allora $v(\alpha) = 1$ e quindi $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$. ■

Il teorema di completezza è più arduo da dimostrare e richiede alcune definizioni aggiuntive ed una serie di lemmi. Diciamo innanzitutto che $\Gamma \subseteq \mathbf{FOR}(\pounds_0)$ è un insieme *consistente* se e solo se esiste almeno una formula $\alpha \in \mathbf{FOR}(\pounds_0)$ tale che $\Gamma \nvdash_{\mathbf{HK}} \alpha$. In altri termini, Γ è un insieme consistente se da esso non si può derivare tutto. Diciamo anche che Γ è *inconsistente* se non è consistente. Dimostriamo adesso che Γ è consistente se da esso non si può derivare una contraddizione.

Lemma 4 *Γ è un insieme consistente se e solo se per nessuna formula β, $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \beta$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\beta$.*

Proof. Da sinistra a destra. Dimostriamo, per contrapposizione, che se esiste una formula β tale che $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \beta$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\beta$, allora Γ è inconsistente. Sia dunque $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \beta$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\beta$. Esistono dunque due derivazioni in **HK**, rispettivamente di β e di $\neg\beta$, dalle medesime assunzioni Γ. Unifichiamole. Otteniamo dunque la seguente derivazione da Γ:

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ \vdots \\ \neg\beta \end{array}$$

Sia α una formula arbitraria. Prolunghiamo tale derivazione in questo modo:

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ \vdots \\ \neg\beta \\ \beta \quad \rightarrow \quad (\neg\beta \rightarrow \alpha) \end{array}$$

Lo possiamo fare? Sì: $\beta \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha)$ è un'istanza di A10, quindi è un assioma e lo possiamo usare. Adesso applichiamo due volte R1:

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ \vdots \\ \neg\beta \\ \beta \ \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \\ \neg\beta \rightarrow \alpha \\ \alpha \end{array}$$

Abbiamo quindi fatto vedere che $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$, con α arbitraria, e quindi Γ è inconsistente.

Da destra a sinistra. Dimostriamo, per contrapposizione, che se Γ è inconsistente, allora esiste una formula β tale che $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \beta$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\beta$. Ma questo è banale: se da Γ si deriva tutto, allora in particolare da Γ si possono derivare β e $\neg\beta$. ■

Da qui in avanti applicheremo il Lemma 4 senza ulteriore menzione, ricorrendo alla definizione originaria di consistenza o alla sua caratterizzazione equivalente a seconda della convenienza.

Lemma 5 *Se c'è una valutazione v tale che $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, allora Γ è consistente.*

Proof. Ancora una volta, dimostriamo il lemma per contrapposizione: se Γ è inconsistente, allora non c'è nessuna valutazione v tale che $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$. Supponiamo quindi che per qualche formula β, $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \beta$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\beta$. Per il Teorema 3, $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \beta$ e $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \neg\beta$. Se esistesse una valutazione v tale che $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, per definizione di conseguenza logica avremmo $v(\beta) = v(\neg\beta) = 1$, il che è impossibile, perché se $v(\beta) = 1$ allora $v(\neg\beta) = 0$ e viceversa. ■

Lemma 6 *i) Se* $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *è inconsistente, allora* $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$*; ii) se* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *è inconsistente, allora* $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\alpha$*.*

Proof. i) Supponiamo che $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{\mathbf{HK}} \beta$ e $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\beta$. Per il Teorema 1, $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\alpha \to \beta$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\alpha \to \neg\beta$. Ancora una volta, unifichiamo queste due derivazioni, ottenendo la seguente derivazione da Γ:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
\vdots \\
\neg\alpha \to \beta \\
\vdots \\
\vdots \\
\neg\alpha \to \neg\beta
\end{array}$$

Prolunghiamo tale derivazione in questo modo:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
\vdots \\
\neg\alpha \to \beta \\
\vdots \\
\vdots \\
\neg\alpha \to \neg\beta \\
(\neg\alpha \to \beta) \quad \to \quad ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha)
\end{array}$$

Lo possiamo fare? Sì: $(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha)$ è un'istanza di A9, quindi è un assioma e lo possiamo usare. Adesso applichiamo due volte R1:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
\vdots \\
\neg\alpha \to \beta \\
\vdots \\
\vdots \\
\neg\alpha \to \neg\beta \\
(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha) \\
(\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha \\
\neg\neg\alpha
\end{array}$$

Infine, prolunghiamo la derivazione usando l'assioma A11 $\neg\neg\alpha \to \alpha$ e poi usiamo nuovamente R1:

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{D} \\
\vdots \\
\neg\alpha \to \beta \\
\vdots \\
\vdots \\
\neg\alpha \to \neg\beta \\
(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha) \\
(\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha \\
\neg\neg\alpha \\
\neg\neg\alpha \to \alpha \\
\alpha
\end{array}
$$

Quindi $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$. (ii) Simile. ■

La prossima nozione è fondamentale per la dimostrazione di completezza. Un insieme $\Gamma \subseteq \mathbf{FOR}(\pounds_0)$ è un insieme *consistente massimale* se e solo se:

1. è consistente;

2. ogni Δ che include propriamente Γ è inconsistente.

Intuitivamente, un insieme di formule è consistente massimale se "non ci posso aggiungere niente" senza farlo diventare inconsistente. Il prossimo risultato, noto come *Lemma di Lindenbaum*, ci dice che ogni insieme consistente è incluso in un insieme consistente massimale.

Lemma 7 *(Lemma di Lindenbaum). Se $\Gamma \subseteq \mathbf{FOR}(\pounds_0)$ è un insieme consistente, allora esiste Δ consistente massimale tale che $\Gamma \subseteq \Delta$.*

Proof. Consideriamo un'enumerazione $\alpha_1, \alpha_2, ...$ di $\mathbf{FOR}(\pounds_0)$ (esiste perché $\mathbf{FOR}(\pounds_0)$ è un insieme numerabile!). Definiamo induttivamente una successione di insiemi nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \Gamma \\
\Gamma_{n+1} &= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} \text{ se } \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} \text{ è consistente;} \\ \Gamma_n, \text{ altrimenti.} \end{cases} \\
\Delta &= \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n.
\end{aligned}
$$

Si osservi che, per costruzione, ogni Γ_n è consistente e vale anche che $\Gamma \subseteq \Delta$. Dimostriamo ora che Δ è consistente massimale. Innanzitutto, supponiamo per assurdo che Δ sia inconsistente. Allora, per qualche formula β, si ha che $\Delta \vdash_{\mathbf{HK}} \beta$ e $\Delta \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\beta$. Ma le derivazioni sono successioni finite di formule: quindi le nostre ipotetiche derivazioni di β e $\neg\beta$, nel loro complesso, avranno utilizzato come assunzioni solo un sottoinsieme finito $\{\delta_1, ..., \delta_m\}$ di Δ. Ora, ciascun δ_i

sarà stato introdotto in un qualche indice della costruzione precedente. Tra tutti questi, prendiamo l'indice più grande e chiamiamolo k. Ma allora $\Gamma_k \vdash_{\mathbf{HK}} \beta$ e $\Gamma_k \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\beta$, poiché in Γ_k ho già tutto ciò che mi serve per derivare sia β che $\neg\beta$. Dunque, Γ_k sarebbe inconsistente: contraddizione. Quindi l'ipotesi per assurdo è falsa e Δ è consistente.

Infine, ci rimane da dimostrare che se $\Delta \subset \Delta'$, allora Δ' è inconsistente. Infatti, se $\Delta \subset \Delta'$, allora esiste $\psi \in \Delta'$ tale che $\psi \notin \Delta$. Riandiamo alla nostra enumerazione di $\mathbf{FOR}(\pounds_0)$: per qualche i, avremo che $\psi = \alpha_i$. Poiché $\psi \notin \Delta$, significa che $\Gamma_i \cup \{\psi\}$ è inconsistente. Ma allora a maggior ragione sarà inconsistente Δ', perché $\Gamma_i \cup \{\psi\} \subseteq \Delta'$. ■

Lemma 8 *(Lemma di chiusura deduttiva). Se $\Gamma \subseteq \mathbf{FOR}(\pounds_0)$ è un insieme consistente massimale e se $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$, allora $\alpha \in \Gamma$.*

Proof. Infatti, se per assurdo $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$ ma $\alpha \notin \Gamma$, allora $\Gamma \cup \{\alpha\}$ è inconsistente, poiché Γ è consistente massimale. Per il Lemma 6, allora, $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\alpha$, e quindi Γ è inconsistente: contraddizione. ■

Lemma 9 *(Lemma delle clausole omofoniche). Se $\Gamma \subseteq \mathbf{FOR}(\pounds_0)$ è un insieme consistente massimale, allora, se α e β sono formule arbitrarie:*

1. *$\neg\alpha \in \Gamma$ se e solo se $\alpha \notin \Gamma$;*
2. *$\alpha \wedge \beta \in \Gamma$ se e solo se $\alpha \in \Gamma$ e $\beta \in \Gamma$;*
3. *$\alpha \vee \beta \in \Gamma$ se e solo se $\alpha \in \Gamma$ o $\beta \in \Gamma$;*
4. *$\alpha \to \beta \in \Gamma$ se e solo se (se $\alpha \in \Gamma$ allora $\beta \in \Gamma$).*

Proof. Ci limitiamo ai casi (1), (2), (4).

(1) Sappiamo che $\alpha, \neg\alpha$ non possono appartenere entrambi a Γ perché Γ è un insieme consistente. Dimostriamo ora che almeno una tra α e $\neg\alpha$ ci appartiene, da cui la nostra conclusione segue. Consideriamo l'insieme $\Gamma \cup \{\alpha\}$. Se è inconsistente, per il Lemma 6 $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\alpha$ e quindi, per il Lemma 8, $\neg\alpha \in \Gamma$. Se invece $\Gamma \cup \{\alpha\}$ è consistente, allora $\alpha \in \Gamma$, perché Γ è consistente massimale e non può essere esteso in modo consistente.

(2) Supponiamo che $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$. Per A3, A4, $\vdash_{\mathbf{HK}} \alpha \wedge \beta \to \alpha$ e $\vdash_{\mathbf{HK}} \alpha \wedge \beta \to \beta$. Quindi, usando R1, $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \beta$:

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \alpha \wedge \beta \to \alpha \\ \alpha \wedge \beta \to \beta \\ \alpha \wedge \beta \\ \alpha \\ \beta \end{array}$$

Da ciò concludiamo $\alpha \in \Gamma$ e $\beta \in \Gamma$ per il Lemma 8. Viceversa, supponiamo che $\alpha \in \Gamma$ e $\beta \in \Gamma$. Per il Lemma 2(i), $\vdash_{\mathbf{HK}} \alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$. Quindi, usando R1 due volte, $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha \wedge \beta$:

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \alpha \\ \beta \\ \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta) \\ \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta \\ \alpha \wedge \beta \end{array}$$

Per il Lemma 8, quindi, $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$.

(4) Supponiamo $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$ e $\alpha \in \Gamma$. Quindi, per R1, $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \beta$ e abbiamo ancora una volta la conclusione desiderata, cioè $\beta \in \Gamma$, per il Lemma 8. Viceversa, supponiamo che se $\alpha \in \Gamma$ allora $\beta \in \Gamma$. Ciò significa che o $\alpha \notin \Gamma$ oppure $\beta \in \Gamma$. Nel primo caso, per (1), $\neg\alpha \in \Gamma$. ma in virtù di A10, $\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$. Quindi $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha \rightarrow \beta$ e per il Lemma 8 $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$. Nel secondo caso, in virtù di A1 $\vdash_{\mathbf{HK}} \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, da cui ancora una volta $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha \rightarrow \beta$ e per il Lemma 8 $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$. ■

Dimostriamo adesso il converso del Lemma 5.

Lemma 10 *(Lemma della valutazione canonica).Se Γ è consistente, allora c'è una valutazione v tale che $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$.*

Proof. Sia Γ consistente. Per il Lemma 7, Γ è contenuto in un Δ consistente massimale. Definiamo adesso, per ogni variabile proposizionale p,

$$v(p) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \Delta, \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Tale funzione v determina automaticamente una valutazione di $\pounds_0$, poiché la possiamo estendere a tutto $\mathbf{FOR}(\pounds_0)$ nel modo consueto. Dimostriamo adesso che per ogni $\alpha \in \mathbf{FOR}(\pounds_0)$, $v(\alpha) = 1$ se e solo se $\alpha \in \Delta$. Questo verrà dimostrato per induzione sul numero n dei connettivi logici presenti in α.

Base: $n = 0$. Allora α è una variabile proposizionale e sappiamo già che $v(\alpha) = 1$ se e solo se $\alpha \in \Delta$.

Passo induttivo. Supponiamo per ipotesi di induzione che l'enunciato del teorema sia vero per formule che hanno al massimo m connettivi logici, e prendiamo α con $m+1$ connettivi logici. Andiamo a vedere qual è il suo connettivo principale. Se si tratta di una negazione, allora $\alpha = \neg\beta$, e β contiene m connettivi. Quindi posso applicare l'ipotesi di induzione a β, cioè $v(\beta) = 1$ se e solo se $\beta \in \Delta$. Ma per il Lemma 9(1), $\beta \in \Delta$ se e solo se $\neg\beta \notin \Delta$, quindi $v(\beta) = 1$ se e solo se $\neg\beta \notin \Delta$. Ma allora

$$\begin{aligned} v(\alpha) = v(\neg\beta) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad v(\beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \neg\beta = \alpha \in \Delta. \end{aligned}$$

Se invece il connettivo principale è una congiunzione o una disgiunzione o un'implicazione, si ragiona nello stesso modo sfruttando le altre clausole del Lemma 9. Quindi, in particolare, v è tale che $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$. ■

La valutazione di cui al lemma precedente sarà chiamata la *valutazione canonica* per Γ.

Siamo adesso finalmente pronti a dimostrare il teorema di completezza.

Theorem 11 *(Teorema di completezza per* **HK***): per ogni insieme di formule* Γ *e per ogni formula* α *si ha: se* $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$ *allora* $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$*.*

Proof. Ragioniamo ancora una volta per contrapposizione: dimostriamo cioè che, se $\Gamma \nvdash_{\mathbf{HK}} \alpha$, allora $\Gamma \nvDash_{\mathbf{HK}} \alpha$. Sia dunque $\Gamma \nvdash_{\mathbf{HK}} \alpha$. Allora $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è consistente. Consideriamo la valutazione canonica v per $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$: per il Lemma 10, $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$. In altri termini, si ha che $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$ e $v(\neg\alpha) = 1$, cioè $v(\alpha) = 0$. Ma allora $\Gamma \nvDash_{\mathbf{HK}} \alpha$. ■

Come conseguenza di questi teoremi, abbiamo quindi:

Teorema di adeguatezza per **HK**: per ogni insieme di formule Γ e per ogni formula α si ha: $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$ se e solo se $\Gamma \vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$.

I teoremi di **HK** *coincidono con le tautologie*: per ogni formula α si ha: $\vdash_{\mathbf{HK}} \alpha$ se e solo se $\vDash_{\mathbf{HK}} \alpha$.